MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HENRI FAURE

Problème du cercle et harmoniques sphériques

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 59-70
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__59_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 59 à 70

PROBLEME DU CERCLE ET HARMONIQUES SPHERIQUES (*)

par

Henri FAURE

-:-:-:-

§ 1. - Enoncé des résultats.

Landau a montré en 1915 [1] un théorème généralisant celui de Sierpinski sur le problème du cercle. Au lieu du cercle et des points à coordonnées entières dans le plan, il considère un hyperellipsoïde et les points à coordonnées entières de l'espace à n-dimensions. De plus à chaque point, il associe une exponentielle complexe, ce qui le conduit à un résultat plus général.

Ici, on se propose de montrer un théorème voisin en associant à chaque point la valeur prise par une harmonique sphérique au point correspondant sur la sphère unité. (Le cas à deux dimensions, traité par A. Blanchard [2], est à l'origine de travail). Pour cela, on va poser autrement le problème en parlant d'hypersphère et de réseau quelconque au lieu d'hyperellipsoïde et du réseau des points entiers. La méthode utilisée permet de retrouver le théorème de Landau comme cas particulier. On l'obtiendra au paragraphe 3 avec le résultat sur l'harmonique sphérique, le paragraphe 2 étant consacré à la méthode.

1°) THEOREME 1 , de Landau

Soit Q une forme quadratique définie positive : $Q(u_1,\dots,u_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\, u_\mu\, u_\nu$, de discriminant D , et $z = (z_1,\dots,z_n)$, $h = (h_1,\dots,h_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Alors, si $x \in \mathbb{R}^+$ et si

$$B(x) = \sum_{\substack{(v_1,\dots,v_n)\in \mathbb{Z}^n \\ 0 < Q(v_1+z_1,\dots,v_n+z_n) \le x}} e^{2i\pi(h_1v_1+\dots+h_nv_n)}$$

On a $B(x) = b\, x^{\frac{n}{2}} \bmod O(x^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}})$ quand x tend vers l'infini, avec

$$b = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \quad \text{si } h \in \mathbb{Z}^n \text{ et } b = 0 \text{ sinon.}$$

Le théorème de Sierpinski est le cas particulier du cercle avec $h \in \mathbb{Z}^2$.

(*) Cet article développe une note publiée aux comptes rendus de l'Académie des Sciences [5].

2°) Autre formulation

(l'énoncé ci-dessous est plus complet que celui figurant dans la note [5], où on était limité par la place).

THEOREME 2. - Soit E un espace euclidien de dimension n, avec une origine O ($<,>$ désigne le produit scalaire) ; G un sous-groupe de rang n de E, de volume fondamental B (volume du parallélotope P construit sur une base de G) ; G' le sous-groupe de E formé des éléments de produits scalaires entiers avec les éléments de G ; z, z' des éléments de E ; x un réel positif.

Alors, si on désigne par $A(z,z',G,x)$ la somme $\sum e^{2i\pi<\xi,z'>}$ étendue aux éléments ξ de la classe $z+G$ suivant le sous-groupe G, contenus dans la boule fermée $B(0, \sqrt{x})$ de centre O et de rayon $\sqrt{x}$, on a :

$$A(z,z',G,x) = ax^{\frac{n}{2}} \bmod O\left(x^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}}\right)$$ quand x tend vers l'infini avec

$$a = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\, e^{2i\pi<z,z'>}}{V\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$ si $z' \in G'$ et $a = 0$ sinon.

3°) Résultat voisin obtenu avec une harmonique sphérique

On rappelle qu'une harmonique sphérique de degré k est la restriction à la sphère unité Σ_{n-1} de E d'un polynôme harmonique homogène de degré k à n variables.

THEOREME 3. Soit E un espace euclidien de dimension n, avec une origine O ; G un sous-groupe de rang n de E ; z un élément de E ; x un réel positif. φ étant une harmonique sphérique de degré k $(k \geq 0)$ on désigne par $A_\varphi(z,G,x)$ la somme $\sum \varphi(u)$ étendue aux éléments $\xi = |\xi| u$ de la classe $z+G$ situés dans la boule fermée $B(0, \sqrt{x})$. On a alors :

$$A_\varphi(z,G,x) \in O\left(x^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}}\right)$$ quand x tend vers l'infini.

Remarque : On aurait pu démontrer le théorème 3 avec la somme $\sum \varphi(u)e^{2i\pi<\xi,z'>}$, le résultat étant le même.

§ 2. - Technique de démonstration des théorèmes 2 et 3

On expose la méthode avec la somme $\sum \varphi(u)$. D'autre part, dans la suite, quand des constantes interviennent sans qu'on les calcule, on les désigne par K ou C, sans les distinguer.

1°) χ_x désignant la fonction caractéristique de la boule fermée $B(0, \sqrt{x})$, on a $A_\varphi(z,G,x) = \sum_{s\in G} (u)\, \chi_x(z+s)$ avec $\xi = z+s = |\xi| u = ru$.

A_φ, comme fonction de z, est donc périodique, de groupe de périodes G. On peut penser à la développer en série de Fourier, mais comme elle n'est pas assez régulière, cela ne donne rien. En fait pour avoir une série de Fourier suffisamment régulière, il faut intégrer un certain nombre de fois A_φ par rapport à x, de façon précise h fois, avec $n \leq 2h$, ce qui conduit à prendre $h = [\frac{n+1}{2}]$. On est alors arrêté plus loin par des intégrations par parties où interviennent des fonctions de Bessel. Pour terminer ces intégrations, il faut modifier A_φ et utiliser $A^*_\varphi = \sum_{s\in G} r^k \varphi(u)\, \chi_x(z+s)$ (ce n'est pas gênant car on peut facilement revenir à A_φ ensuite). Un premier lemme donne la fonction à développer en série de Fourier :

LEMME 1. <u>Soit</u> $A^*_{\varphi,h}(z,G,x) = \int_0^x dx_1 \cdots \int_0^{x_{h-1}} A^*_\varphi(z,G,x_h)\, dx_h$. <u>Alors on a</u> :

$$A^*_{\varphi,h}(z,G,x) = \sum_{s\in G} \Phi_h(z+s), \quad \underline{\text{avec}} \quad \Phi_h(\xi) = r^k \frac{(x-r^2)^h}{h\,!}\, \varphi(u)\, \chi_x(\xi), \quad \xi = ru.$$

On procède par récurrence sur h.

$$\int_0^x \Big(\sum_{s\in G} r^k \varphi(u)\, \chi_t(ru)\Big)\, dt = \sum_{s\in G} r^k \varphi(u) \int_0^x \chi_t(ru)\, dt,$$ ce qui donne

$\sum_{s\in G} r^k \varphi(u)\,(x-r^2)\, \chi_x(ru)$. Alors, si $\Phi_{h-1}(\xi) = r^k \frac{(x-r^2)^{h-1}}{(h-1)\,!} \varphi(u)\, \chi_x(\xi)$, on a :

$$\int_0^x \Big(\sum_{s\in G} r^k \varphi(u) \frac{(t-r^2)^{h-1}}{(h-1)\,!}\, \chi_t(ru)\Big)\, dt = \sum_{s\in G} r^k \varphi(u) \int_0^x \frac{(t-r^2)^{h-1}}{(h-1)\,!}\, \chi_t(ru)\, dt,$$

ce qui donne bien la fonction Φ_h.

2°) Pour développer $A^*_{\varphi,h}$ en série de Fourier, on se ramène au calcul de la transformée de Fourier de Φ_h grâce à un second lemme :

LEMME 2. <u>Soit</u> f <u>une fonction sommable à support compact dans</u> E, $\hat{f}$ <u>sa transformée de Fourier et</u> $\tilde{f}(z) = \sum_{s\in G} f(z+s)$. $\tilde{f}$ <u>est périodique de groupe de périodes</u> G, <u>et admet une série de Fourier de caractères de</u> E <u>ayant</u> G <u>pour groupe de périodes</u> ; <u>cette série s'écrit</u> :

$$\sum_{s'\in G'} c_{s'}\, e^{2i\pi<z,s'>}, \quad \underline{\text{avec}}$$

$$c_{s'} = \frac{1}{V} \int_P \tilde{f}(\xi)\, e^{-2i\pi<\xi,s'>}\, d\xi$$

($c_{s'}$ <u>est la valeur en</u> s' <u>de la transformée de Fourier de</u> $\tilde{f}$ <u>restreinte à</u> P). <u>Mais comme</u> $\hat{\tilde{f}}(s') = \frac{1}{V}\hat{f}(s')$, <u>on a en fait</u> $c_{s'} = \frac{1}{V}\hat{f}(s')$.

(On a défini la dualité de E avec lui-même par $e^{2i\pi<\xi,\eta>}$, et on a noté G' le groupe des caractères de E admettant G pour périodes car il est isomorphe à G' défini au théorème 2).

3°) Pour obtenir la transformée de Fourier de Φ_h , on a besoin de quelques propriétés des harmoniques sphériques, propriétés qu'on peut déduire de la théorie des représentations des groupes compacts appliquée à $S\,O(n)$. (voir [3] pour tous les détails sur les résultats utilisés ici). Pour éviter de trop longs développements, on admettra le théorème suivant ([3] page 161) :

THEOREME de Funk-Hecke. <u>Soit</u> φ <u>une harmonique sphérique de degré</u> k <u>et</u> F <u>une fonction intégrable sur</u> $[-1,+1]$ <u>pour la mesure</u> $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt$. <u>Alors</u>
$$\int_{\Sigma_{n-1}} F(<u,v>)\,\varphi(u)\,du = \gamma_{n,k}\,\varphi(v) \quad \underline{\text{avec}} \quad \gamma_{n,k} = a_k^{-2}\,c_n \int_{-1}^{+1} F(t)\,P^{(k)}(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt$$

$P^{(k)}(t)$ est le polynôme ultrasphérique qui définit l'harmonique zonale de pôle e_1 (premier vecteur de la base canonique de E) ; $a_k^2 = P^{(k)}(1)$; c_n est une constante de normalisation $\left(c_n^{-1} = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)$; du est la mesure de Lebesgue, normalisée, sur Σ_{n-1} ($\int_{\Sigma_{n-1}} du = 1$) ; on sait d'autre part que $P^{(k)}(t)$ est proportionnel à $(1-t^2)^{\frac{3-n}{2}}\frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\frac{n+2k-3}{2}}$. On pourra trouver la valeur de la constante de proportionnalité $\alpha_{k,n}$ dans [4] , (chap. IX, §3.4 et 4.8) :
$$\alpha_{k,n} = \frac{a_k^2(-1)^k\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2^k\,\Gamma(k+\frac{n-1}{2})} .$$

Finalement on a donc :
$$\gamma_{n,k} = \frac{(-1)^k\,\Gamma(\frac{n}{2})}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2}+k)}\int_{-1}^{+1} F(t)\,\frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\frac{n+2k-3}{2}}\,dt ,$$
d'où, après k intégrations par parties (quand F est k fois dérivable) :
$$\gamma_{n,k} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^k\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2}+k)}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\frac{n+2k-3}{2}}\,\frac{d^kF(t)}{dt^k}\,dt .$$

C'est ce dernier résultat qu'on va utiliser pour obtenir $\hat{\Phi}_h$:

LEMME 3. Soit φ une harmonique sphérique de degré k et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int^\infty f(r)\, r^{n-1}\, dr < \infty$. Si $h(\xi) = f(|\xi|)\, \varphi(u)$, alors $h \in L^1(E)$ et $\hat{h}(\eta) = f^o(|\eta|)\, \varphi(v)$, $\eta = |\eta|\, v$, avec :

$$f^o(\rho) = 2\pi(-i)^k\, \rho^{\frac{2-n}{2}} \int_0^\infty f(r)\, J_{\frac{n-2}{2}+k}(2\pi r\rho)\, r^{\frac{n}{2}}\, dr .$$

$J_{\frac{n-2}{2}+k}(2\pi r\rho)$ est la fonction de Bessel définie, par exemple, par :

$$\frac{(\pi r\rho)^{\frac{n-2}{2}+k}}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{n-1}{2}+k)} \int_{-1}^{+1} e^{2i\pi r\rho t}(1-t^2)^{\frac{n+2k-3}{2}}\, dt .$$

La condition sur f assure l'intégrabilité de h , et par définition on a :

$$\hat{h}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(|\xi|)\, \varphi(u)\, e^{-2i\pi<\xi,\eta>}\, d\xi$$

avec $\xi = |\xi|\, u = ru$, ce qui s'écrit encore :

$$\hat{h}(\eta) = \omega_{n-1} \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \varphi(u)\, e^{-2i\pi r\rho<u,v>}\, du\right) dr$$

($\eta = \rho\, v$ et $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ désigne l'aire de Σ_{n-1}). D'autre part $e^{-2i\pi r\rho t}$ est k fois dérivable par rapport à t et c'est une fonction intégrable sur $[-1,+1]$ pour la mesure $(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt$, d'où le théorème de Funk-Hecke donne :

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \varphi(u)\, e^{-2i\pi r\rho<u,v>}\, du = \varphi(v)\, \frac{\Gamma(\frac{n}{2})(-2i\pi r\rho)^k}{2^k \sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{n-1}{2}+k)} \int_{-1}^{+1} e^{2i\pi r\rho t}(1-t^2)^{\frac{n+2k-3}{2}}\, dt ,$$

d'où, après simplifications, le résultat annoncé.

LEMME 4. La transformée de Fourier de $\Phi_h(\xi)$ est la fonction

$$\hat{\Phi}_h(\eta) = (-i)^k\, \frac{x^{\frac{n+2h+2k}{4}}\, J_{\frac{n}{2}+h+k}(2\pi\rho\sqrt{x})}{\pi^h\, \rho^{\frac{n}{2}+h}}\, \varphi(v) , \quad \eta = \rho\, v .$$

D'après le lemme 3, on a :

$$\hat{\Phi}_h(\eta) = \frac{2\pi(-i)^k}{\rho^{\frac{n-2}{2}}\; h\,!}\, \varphi(v) \int_0^{\sqrt{x}} (x-r^2)\, r^{\frac{n}{2}+k}\, J_{\frac{n-2}{2}+k}(2\pi r\rho)\, dr .$$

Pour calculer l'intégrale, on procède par récurrence (c'est ici que r^k introduit au début joue son rôle). On sait que ([1] page 16)

$$\frac{d}{dr} r^{\nu} J_{\nu} (2\pi r\rho) = 2\pi\rho r^{\nu} J_{\nu-1} (2\pi r\rho) .$$

D'où :

$$\int_0^{\sqrt{x}} (x-r^2)^h \, r^{\frac{n}{2}+k} J_{\frac{n-2}{2}+k} (2\pi r\rho) \, dr = \frac{h}{\pi\rho} \int_0^{\sqrt{x}} (x-r^2)^{h-1} \, r^{\frac{n}{2}+k+1} J_{\frac{n}{2}+k} (2\pi r\rho) dr ,$$

après une intégration par parties.

Si à l'ordre p , $p < h$, on a :

$$\frac{h(h-1)\ldots(h-p+1)}{(\pi\rho)^p} \int_0^{\sqrt{x}} (x-r^2)^{h-p-1} \, r^{\frac{n}{2}+k+p+1} J_{\frac{n}{2}+k+p} (2\pi r\rho) dr ,$$

on en déduit par une nouvelle intégration par parties la même chose à l'ordre $p+1$; avec $p = h$ on a donc :

$$\frac{h\,!}{(\pi\rho)^h} \int_0^{\sqrt{x}} r^{\frac{n}{2}+k+h} J_{\frac{n}{2}+k+h-1} (2\pi r\rho) \, dr \quad ;$$

et une dernière intégration donne le résultat qu'il fallait montrer.

4°) On en déduit de ce qui précède que $A^{*}_{\varphi,h}$ a pour série de Fourier :

$$(-i)^k \sum_{s \in G'} \frac{x^{\frac{n+2h+2k}{4}} J_{\frac{n}{2}+h+k} (2\pi |s| \sqrt{x})}{V \pi^h |s|^{\frac{n}{2}+h}} \varphi(w) \, e^{2i\pi<z,s>}$$

avec $s = |s| \, w$.

LEMME 5. <u>La série de Fourier de</u> $A^{*}_{\varphi,h}$ <u>est absolument convergente</u> (<u>sa somme est donc égale à</u> $A^{*}_{\varphi,h}$) .

φ étant bornée, on est ramené à étudier

$$\sum_{s \in G'} \frac{\left| J_{\frac{n}{2}+h+k} (2\pi |s| \sqrt{x}) \right|}{|s|^{\frac{n}{2}+h}}$$

On écarte le terme en $s = 0$ et on transforme la série en intégrale de Stieltjès en posant $U(y) = \sum_{s \in G', 0<|s| \leq y} 1$. On obtient ainsi

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{\left| J_{\frac{n}{2}+h+k} (2\pi \, y \sqrt{x}) \right|}{y^{\frac{n}{2}+h}} dU(y)$$

avec y_o réel positif non nul assez petit pour que $U(y_o) = 0$. On sait d'autre part ([1] page 16) que $|J_\nu(2\pi y\sqrt{x})| \leq K\, y^{-\frac{1}{2}}$ avec K constante par rapport à y . La série étudiée est donc majorée par :

$$K \int_{y_o}^{\infty} \frac{dU(y)}{y^{\frac{n+1}{2}+h}} = K[U(y)y^{-(\frac{n+1}{2}+h)}]_{y_o}^{\infty} + K(\frac{n+3}{2}+h) \int_{y_o}^{\infty} \frac{U(y)\,dy}{y^{\frac{n+3}{2}+h}} .$$

Or $U(y) \leq C\, y^n$ (résultat trivial sur le nombre de points du réseau dans la boule $B(0,y)$) , d'où la dernière expression s'écrit :

$$CK(\frac{n+3}{2}+h) \int_{y_o}^{\infty} y^{\frac{n}{2}-h-\frac{3}{2}}\, dy = CK\, \frac{n+3+2h}{n-1-2h}\, [y^{\frac{n}{2}-h-\frac{1}{2}}]_{y_o}^{\infty}$$

n étant au plus égal à $2h$, on a le résultat annoncé.

§ 3. - Démonstration des théorèmes 2 et 3

On adapte la méthode de Landau ([1] page 25, § 3) pour l'utiliser avec le développement de $A^{*}_{\varphi,h}$: 1°) Opération Δ et calculs communs ; 2°) (resp. 3°) théorème 2 avec $z' \in G'$ (resp. $z' \notin G'$) ; 4°) théorème 3.

1°) F étant une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on définit l'opération Δ par $\Delta F = \sum_{\nu=0}^{h} (-1)^{h-\nu} \binom{h}{\nu} F(x+\nu\zeta)$ avec $\zeta \in \mathbb{R}^+$, $\zeta \neq 0$.

Si F est h fois dérivable on a

$$F = \int_x^{x+\zeta} dx_1 \ldots \int_{x_{h-1}}^{x_{h-1}+\zeta} F^{(h)}(x_h)\, dx_h .$$

De plus si $F^{(h)}$ est continue, on a : $\Delta F = \zeta^h F^{(h)}(c)$ avec $x \leq c \leq x+h\zeta$.
D'une estimation pour $\Delta A^{*}_{\varphi,h}$, on va déduire une estimation pour A^{*}_{φ} qui donnera les résultats annoncés pour A_φ (d'abord quand $k = 0$, puis pour $k > 0$). Mais avant de distinguer, on peut encore énoncer un lemme valable pour $k \geq 0$.

LEMME 6. ([1] p. 25)

<u>Soit</u> $$\Psi(x,y) = x^{\frac{n+2h+2k}{4}} J_{\frac{n}{2}+h+k}(2\pi y\sqrt{x}) .$$

<u>Alors</u> : $$|\Delta \Psi| \leq K\, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}}\, y^{-\frac{1}{2}} \min(x^{\frac{h}{2}} , x^{\beta h} y^h)$$

avec K constante par rapport à x et y ; $\zeta = x^{\beta}$, $0<\beta<1$, β à choisir au mieux ensuite.

On sait que $\left|J_{\frac{n}{2}+h+k}(2\pi y\sqrt{x+\nu z})\right| \leq \dfrac{K}{\sqrt{y}(x+z)^{1/4}}$ pour $\nu = 0,\dots,k$; d'où

$$|\Psi(x+\nu z,y)| \leq K\, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+\frac{k}{2}}\, y^{-\frac{1}{2}}$$, d'où la même chose

pour $\Delta\Psi$ (d'après la définition de Δ) .

Pour la deuxième majoration, on calcule la dérivée h-ième de Ψ qui vaut

$$\pi^h y^h x^{\frac{n}{4}+\frac{k}{2}} J_{\frac{n}{2}+k}(2\pi y\sqrt{x}) \quad \text{d'où}$$

$$\Delta\Psi = \pi^h y^h x^{\beta h} c^{\frac{n}{4}+\frac{k}{2}} J_{\frac{n}{2}+k}(2\pi y\sqrt{c}) \ ,$$

d'où

$$|\Delta\Psi| \leq K\, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}+\beta h}\, y^{h-\frac{1}{2}}$$

2°) Démonstration du théorème 2 ($k = 0$) quand $z \in G'$

$$A(z,z',G,x) = \sum_{s\in G} e^{2i\pi<s+z,z'>}\chi_x(z+s)$$

$$= \sum_{s\in G} e^{2i\pi<z,z'>}\chi_x(z+s) \ .$$

Tout revient donc à évaluer $A(z,G,x) = \sum\limits_{s\in G}\chi_x(z+s)$ et à multiplier ensuite par $e^{2i\pi<z,z'>}$. Or quand $k = 0$ (avec $\varphi = 1$) on a $A_\varphi(z,G,x) = A^*_\varphi(z,G,x) = A(z,G,x)$ (noté ensuite $A(x)$) ; se reportant à 1°) , on a donc à estimer $\Delta\ A_h(x)$, puis $A(x)$.

La série de Fourier de $A^*_{\varphi,h} = A_h$ s'écrit :

$$A_h = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n+2h}{2}}}{V\,\Gamma(\frac{n}{2}+h+1)} + \sum_{s\in G',s\neq 0} \frac{x^{\frac{n+2h}{4}} J_{\frac{n}{2}+h}(2\pi|s|\sqrt{x})}{V\,\pi^h\,|s|^{\frac{n}{2}+h}}\, e^{2i\pi<z,s>} \ .$$

(De $J_\nu(\zeta) = (\frac{\zeta}{2})^\nu \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\displaystyle\int_0^\pi \cos(\zeta\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta$, on déduit que

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{J_\nu(\zeta)}{\zeta^\nu} = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)} \ ;$$

d'où le terme en $s = 0$).

D'après la définition de Δ et la convergence absolue de la série, on peut écrire :

$$\Delta A_h = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{V\,\Gamma(\frac{n}{2}+h+1)}\,\Delta(x^{\frac{n}{2}+h}) + \sum_{s\in G',s\neq 0} \frac{e^{2i\pi<z,s>}\Delta\Psi(x,|s|)}{V\,\pi^h\,|s|^{\frac{n}{2}+h}}$$

. D'une part $\Delta(x^{\frac{n}{2}+h}) = x^{\beta h}(\frac{n}{2}+h)\ldots(\frac{n}{2}+1)\,c^{\frac{n}{2}}$ avec $x \le c \le x+h\,x^{\beta}$, d'où $\Delta(x^{\frac{n}{2}+h}) = x^{\beta h}(\frac{n}{2}+h)\ldots(\frac{n}{2}+1)\,x^{\frac{n}{2}} \bmod O\,(x^{\frac{n-2}{2}+(h+1)\beta})$.

. D'autre part, avec $U(y) = \sum_{s\in G',0<|s|\le y} 1$ et $U(y_o) = 0$, on a :

$$\left|\sum_{s\in G',s\neq 0} \frac{e^{2i\pi<z,s>}\Delta\Psi}{V\,\pi^h\,|s|^{\frac{n}{2}+h}}\right| \le \sum_{s\in G',s\neq 0}\frac{|\Delta\Psi|}{V\,\pi^h\,|s|^{\frac{n}{2}+h}} = \frac{1}{V\,\pi^h}\int_{y_o}^{\infty}\frac{|\Delta\Psi|}{y^{\frac{n}{2}+h}}\,dU(y)\ .$$

On décompose cette intégrale en deux parties : $\int_{y_o}^{x^\alpha}$ et $\int_{x^\alpha}^{\infty}$, avec α entre 0 et 1 , à choisir au mieux ensuite (en effet, pour les y "pas trop grands" on veut un exposant pour x aussi petit que possible, alors que pour les y "grands" on peut majorer plus grossièrement). D'après le lemme précédent, on a :

$$\int_{y_o}^{x^\alpha}\frac{|\Delta\Psi|}{y^{\frac{n}{2}+h}}\,dU(y) \le K\,x^{\frac{n-1}{4}+\beta h}\int_{y_o}^{x^\alpha}\frac{dU(y)}{y^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{et}$$

$$\int_{x^\alpha}^{\infty}\frac{|\Delta\Psi|}{y^{\frac{n}{2}+h}}\,dU(y) \le K\,x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}}\int_{x^\alpha}^{\infty}\frac{dU(y)}{y^{\frac{n+1}{2}+h}}\ ,$$

ce qui donne finalement (après intégration par parties) :

$$\frac{1}{V\,\pi^h}\int_{y_o}^{\infty}\frac{|\Delta\Psi|}{y^{\frac{n}{2}+h}}\,dU(y) \in O\,(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha}))\ .$$

. Au total, on a donc l'estimation suivante :

$$\Delta A_h = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,x^{\frac{n}{2}+\beta h}}{V\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \bmod O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha}, x^{\frac{n-2}{2}+\beta(h+1)})).$$

Il est facile d'en déduire le résultat attendu pour $A(x)$: en effet,

$$\Delta A_h = \int_x^{x+x^\beta} dx_1 \dots \int_{x_{h-1}}^{x_{h-1}+x^\beta} A(x_h)\, dx_h \qquad \text{d'où}$$

$$\Delta A_h = x^{\beta(h-1)} \int_{x_{h-1}}^{x_{h-1}+x^\beta} A(x_h)\, dx_h \qquad \text{avec} \quad x \leq x_{h-1} \leq x+hx^\beta \;;$$

et comme A est fonction croissante de x, on obtient :

$$x^{\beta h} A(x) \leq \Delta A_h \leq x^{\beta h} A(x+h\, x^\beta) .$$

Par suite

$$A(x) \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}}{V\, \Gamma(\frac{n}{2}+1)} + H(x) \quad \text{et} \quad A(x+h\, x^\beta) \geq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}}{V\, \Gamma(\frac{n}{2}+1)} + K(x),$$

avec

$$H(x), K(x) \in O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha-\beta h}, x^{\frac{n-2}{2}+\beta})) .$$

On est donc amené à chercher $\inf\limits_{\alpha,\beta\in]0,1[}$ (max (3 exposants ci-dessus)), et on obtient $\frac{n-2}{2} + \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$ (avec $\beta = \frac{1}{n+1}$ et $\alpha = \frac{n-1}{2(n+1)}$) .

3°) Démonstration du théorème 2 (k = 0) quand $z' \notin G'$

$$A(z,z',G,x) = \sum_{s\in G} e^{2i\pi<s+z,z'>} \chi_x(z+s) \qquad (\text{noté } A(x)).$$

Comme au lemme 1, $A_h(x) = \int_0^x dx_1 \dots \int_0^{x_{h-1}} A(x_h)\, dx_h$ est de la forme $\sum\limits_{s\in G} \Phi(z+s)$ avec $\hat{\Phi}(\xi) = e^{2i\pi<\xi,z'>} \frac{(x-r^2)^h}{h\,!} \chi_x(\xi)$, $\xi = r\,u$ d'où, k étant nul,

$$\hat{\Phi}(\eta) = \Phi_h(\eta - z') = \frac{x^{\frac{n+2h}{4}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi\rho\sqrt{x})}{\pi^h \rho^{\frac{n}{2}+h}} \qquad \text{avec} \quad \eta - z' = \rho\, v.$$

On en déduit

$$A_h(x) = \sum_{s\in G'} \frac{x^{\frac{n+2h}{4}} J_{\frac{n}{2}+h}(2\pi|s-z'|\sqrt{x})}{V\, \pi^h\, |s-z'|^{\frac{n}{2}+h}} e^{2i\pi<z,s>} .$$

Ici $|s-z'|$ ne s'annule jamais, on n'a donc pas à isoler un terme particulier. On pose $U(y) = \sum\limits_{s\in G', |s-z'|\leq y} 1$ et par un calcul identique au précédent on obtient :

$$\Delta A_h(x) \in O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha})).$$

D'autre part ([1]p. 29), on a :

$$|\Delta A_h(x) - x^{\beta h}|A(x)| \int_x^{x+x^\beta} dx_1 \dots \int_{x_{h-1}}^{x_{h-1}+x^\beta} |A(x_h)-A(x)|dx_h.$$

Or

$$|A(x_h)-A(x)| \le \sum_{s\in G} (\chi_{x_h}-\chi_x)(z+s) \le \sum_{s\in G} (\chi_{x+hx^\beta}-\chi_x)(z+s) \quad ,$$

car

$$x \le x_h \le x+h\, x^\beta \quad ; \quad \text{d'où} \quad |A(x_h)-A(x)| \le K\, x^{\frac{n-2}{2}+\beta} + H(x)$$

avec $H(x) \in O(x^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{n+1}})$ (en utilisant le résultat du 2°)).

Finalement $x^{\beta h} A(x) \in O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha}, x^{\frac{n-2}{2}+\beta(h-1)}))$

avec $\beta \ge \frac{1}{n+1}$. Le calcul donne alors de nouveau $A(x) \in O(x^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}})$.

4°) Démonstration du théorème 3

Ici on a k strictement positif, d'où le terme en $s = 0$ est nul. D'autre part, φ étant bornée, et d'après la convergence absolue, on peut écrire :

$$|\Delta A^*_{\varphi,h}| \le C \sum_{s\in G', s\neq 0} \frac{|\Delta\,\Psi\,(x,|s|)|}{|s|^{\frac{n}{2}+h}}$$

avec C constante qui dépend de φ.

Le même calcul qu'en 2°) (à l'exposant $\frac{k}{2}$ près, car ici $k > 0$) conduit alors à

$$\Delta A^*_{\varphi,h} \in O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha})).$$

On revient à A^*_φ comme au 3°, on a :

$$|\Delta A^*_{\varphi,h}(x)-x^{\beta h} A^*_\varphi(x)| \le \int_x^{x+x^\beta} dx_1 \dots \int_{x_{h-1}}^{x_{h-1}+x^\beta} |A^*_\varphi(x_h)-A^*_\varphi(x)|\ dx_h \quad , \quad \text{et}$$

$$|A^*_\varphi(x_h)-A^*_\varphi(x)| \le \sum_{s\in G} r^k|\varphi(u)|(\chi_{x_h}-\chi_x)(z+s) \in O(x^{\frac{k}{2}+\frac{n-2}{2}+\beta}) \quad \text{avec}$$

$\beta \ge \frac{1}{n+1}$ (car $x \le x_h \le x+h\,x^\beta$) ; d'où on déduit que

$$x^{\beta h}A^*_\varphi(x) \in O(\sup(x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}+\beta h+\frac{n-1}{2}\alpha}, x^{\frac{n-1}{4}+\frac{k}{2}+\frac{h}{2}+(\frac{n-1}{2}-h)\alpha}, x^{\frac{n-2}{2}+\frac{k}{2}+(h+1)\beta}));$$

avec $\beta = \frac{1}{n+1}$ et $\alpha = \frac{n-1}{2(n+1)}$, on obtient alors $A_\varphi^{**}(x) \in O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}}\right)$.

Enfin on a le résultat annoncé pour A_φ en écrivant

$$A_\varphi(x) = \int_{x_o}^{x} t^{-\frac{k}{2}}\, dA_\varphi^{**}(t) \ , \quad \text{avec } x_o \in \mathbb{R}^+ \ , \ x_o \neq 0 \ , \text{ tel que}$$

$$A_\varphi^{**}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq x_o \quad ; \text{ ce qui donne :}$$

$$A_\varphi(x) = A_\varphi^{**}(x)\, x^{-\frac{k}{2}} + \frac{k}{2}\int_{x_o}^{x} A_\varphi^{**}(t)\, t^{-\frac{t}{2}-1}\, dt \in O\left(x^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}}\right) .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANDAU E. - Ausgewählte abhandlungen zur Gütterpunktlehre. D.V.W. Berlin, 1962, p. 11 à 29 .

[2] BLANCHARD A. - Conférence au Colloque Poitou-Aquitaine, Poitiers, 1963, (non publié).

[3] COIFMAN R. and WEISS G. - Representations of compact groups and spherical harmonics - L'enseignement mathématique, II° série, tome XIV, fascicule 2, avril-juin 1968, p.121 à 173.

[4] VILENKIN N.Ja. - Fonctions spéciales et théories de la représentations des groupes - Dunod, Paris, 1969.

[5] FAURE H. - Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, séance du 8 septembre 1969, tome 269, n° 10, série A, p. 383 à 386.

-:-:-:-

Faculté des Sciences de Marseille
Département de Mathématiques
Place Victor Hugo
13 - Marseille (3e) (France)