MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ELHANAN MOTZKIN
PHILIPPE ROBBA

Prolongement analytique en analyse p-adique

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 151-158
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__151_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 151 à 158

PROLONGEMENT ANALYTIQUE EN ANALYSE p-ADIQUE

par

Elhanan MOTZKIN

(d'après un travail fait en commun avec Philippe ROBBA)

-:-:-:-

1. - Introduction

K désigne un corps valué ultramétrique et algébriquement clos.

Soit A un sous-ensemble ouvert de K. On dira qu'une fonction définie sur A vérifie le principe du prolongement analytique si sa nullité au voisinage d'un point entraîne sa nullité partout dans A.

Suivant M. Krasner nous dirons qu'une fonction est un élément analytique sur A si c'est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles n'ayant pas de pôles dans A. Cette terminologie ne sera justifiée que si les éléments analytiques vérifient le principe du prolongement analytique. Nous appellerons donc ensemble analytique un ensemble A pour lequel tout élément analytique sur A vérifie le principe du prolongement analytique.

M. Krasner a défini une classe d'ensembles qu'il appelle quasi-connexes et qui sont analytiques. Cela lui permet d'édifier dans K une théorie des fonctions analytiques [3].

Nous allons caractériser tous les ensembles analytiques, ce qui permettra de développer une théorie plus complète de fonctions analytiques.

N.B. - Pendant le colloque nous avions donné une condition suffisante pour qu'un ensemble soit analytique et nous avions conjecturé que cette condition était nécessaire car nous avions montré que c'était le cas moyennant quelques restrictions. Depuis A. Escassut a prouvé que ces restrictions sont inutile et que notre conjecture est donc exacte (voir § 6) [1].

2. - Notations

Rappelons que d'après M. Krasner [2], la droite semi-réelle est formée de la droite réelle à laquelle on a ajouté pour chaque réel s le semi-réel s^- caractérisé par la condition : pour tout t réel inférieur à s on a $t < s^- < s$. On posera $|r^-| = |r|$.

La valeur absolue sur K sera aussi notée $|\ |$.

L'image de K dans $\mathbb{R}$ par l'application $x \to |x|$ est appelée le groupe des valeurs.

Pour r semi-réel on appellera disque de centre a et de rayon r, et on notera $D(a,r)$, l'ensemble formé des x tels que $|x-a| \leq r$.

Pour r réel, le cercle $C(a,r)$ de centre a et de rayon r est formé des x tels que $|x-a| = r$. Si $b \in C(a,r)$, $D(b,r^-)$ est contenu dans $C(a,r)$ et est appelé disque intérieur du cercle $C(a,r)$.

3. - Polygone de valuation

Soit $P(x)$ un polynôme. On pose pour r appartenant au groupe des valeurs

$$|P|_y(r) = \sup_{|x-y|=r} |P(x)|$$

$|P|_y(r)$ est une fonction continue monomiale par morceaux qui se prolonge à $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Pour une fraction rationnelle $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ on pose

$$|R|_y(r) = \frac{|P|_y(r)}{|Q|_y(r)} .$$

Le polygone de valuation de R relatif au point y est le graphe de l'application $\operatorname{Log} r \to \operatorname{Log} |R|_y(r)$.

La pente du polygone à gauche (resp. à droite) du point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ représente la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de R dans le disque $D(y,r^-)$ (resp. $D(y,r)$). Le changement de pente au point d'abscisse $\operatorname{Log} r$ représente donc la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de R situés dans le cercle $C(y,r)$.

Soit A un sous-ensemble ouvert de K. Nous appellerons projection de A relativement à y et nous noterons $\operatorname{Pr}_y(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de l'image de A dans l'application $x \to |x-y|$.

Soit f un élément analytique sur A, et soit R_n une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A convergeant vers f uniformément sur A. On pose pour $r \in \operatorname{Pr}_y(A)$.

$$|f|_y(r) = \lim_{n\to\infty} |R_n|_y(r) .$$

Cette définition ne dépend pas de la suite R_n choisie.

La fonction de valuation $|f|_y(r)$ possède la propriété suivante : Soient y et z deux points de K, posons $|y-z| = r$, alors $|f|_y(r) = |f|_z(r)$ lorsque les deux termes de l'égalité sont définis.

4. - Condition nécessaire et suffisante d'analyticité.

Pour des raisons de simplicité dans l'exposition nous caractériserons les ensembles non-analytiques au lieu des ensembles analytiques.

Soit A un sous-ensemble ouvert de K. Notons $\widehat{A}$ le plus petit disque contenant A. Soit R, semi-réel, le rayon de ce disque. Un disque D contenu dans $\complement A \cap \widehat{A}$ est appelé un trou de A si tout disque Δ contenant D et contenu dans $\complement A \cap \widehat{A}$ coïncide avec D.

Etant donné un point x_o de A on dira que la suite de trous disjoints $D_{nj} = D(a_{nj}, \rho_{nj})$, $n \in N$, $1 \le j \le J_n$, est convenable si l'on a :

$$|a_{nj} - x_o| = r_n \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le J_n ,$$
$$|a_{nj} - a_{nk}| < r_n \quad \text{pour} \quad j \ne k$$
$$|a_{nj} - a_{mk}| = \sup (r_n, r_m) \quad \text{pour} \quad n \ne m$$

et si de plus la suite (r_n) forme une suite monotone convergeant vers une limite r vérifiant $r \le R$.

THEOREME. - Pour que l'ensemble ouvert A ne soit pas analytique il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :

$$(\ast)\begin{cases} \text{Il existe } x_o \in A \text{, une suite convenable de disques } (D_{nj}) \text{ et une suite} \\ \text{d'entiers } \ge 0 \ (p_{nj}) \text{ tels que la suite} \\ \left(\sum_{m=1}^{n-1} p_m \left|\mathrm{Log}\, \frac{r_n}{r_m}\right|\right) - \sup_{1 \le j \le J_n} \left(p_{nj}\, \mathrm{Log}\, \frac{r_n}{\rho_{nj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{J_n} p_{nk}\, \mathrm{Log}\, \frac{r_n}{|a_{nk} - a_{nj}|}\right) \\ \left(\text{où } p_m = \sum_{j=1}^{J_m} p_{mj}\right) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } n \to \infty . \end{cases}$$

5. - Démonstration de la condition nécessaire de non-analyticité.

Supposons que A ne soit pas analytique.

On vérifie d'abord que si la projection de A relative à un point x_o de A n'est pas l'intervalle $[0,R]$, la condition $(\ast)$ est vérifiée. Nous supposerons donc désormais que la projection de A relative à tout point x_o de A est l'intervalle $[0,R]$.

Puisque A n'est pas analytique, il existe un élément analytique f sur A, nul sur un disque contenu dans A et non identiquement nul dans A. On montre alors qu'il existe un point x_o de A tel que la fonction de valuation $|f|_{x_o}$ de f relative au point x_o s'annule en un point s de l'intervalle $[0,R]$ mais ne soit pas identiquement nulle dans cet intervalle. Pour que cela se produise il faut que le polygone de valuation de f ait des changements de pente en des points $\operatorname{Log} r_1,\dots,\operatorname{Log} r_n,\dots$ formant une suite strictement monotone convergeant vers la limite $\operatorname{Log} r$, où $r \in [0,R]$ et $|f|(r) = 0$.

Pour simplifier nous supposerons que $x_o = 0$ et que la suite r_n est croissante. On écrira $|f|$ au lieu de $|f|_{x_o}$.

Si $p_2,\dots,p_n,\dots$ sont les changements de pente du polygone aux points d'abscisses $\operatorname{Log} r_2,\dots, \operatorname{Log} r_n, \dots$ et p_1 la pente du polygone à droite du point d'abscisse $\operatorname{Log} r_1$ ($p_1,\dots,p_n$ sont des entiers $\gtrless 0$), on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} |f|(r_n) &= \operatorname{Log}|f|(r_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\sum_{k=1}^{i} p_k\Big)(\operatorname{Log} r_{i+1} - \operatorname{Log} r_i) = \\ &= \operatorname{Log}|f|(r_1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k\, (\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r_k) .\end{aligned}$$

Si nous nous restreignons à la sous-suite des sommets pour lesquels le changement de pente est négatif (on notera encore la sous-suite des rayons correspondant $r_1 \dots r_n \dots$ avec les changements de pente $<0: -p_1,\dots,-p_n \dots$), nous obtenons

$$\operatorname{Log}|f|(r_n) \geq \operatorname{Log}|f|(r_1) - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\, (\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r_k) .$$

On étudie alors comment f se comporte dans le cercle $C(0,r_n)$ et pour cela on approxime f par une fraction rationnelle Q telle que l'on ait

$$\sup_{x\in A} |f(x) - Q(x)| < \frac{1}{2}\, |f|(r_n) .$$

Au voisinage du point d'abscisse $\operatorname{Log} r_n$ les polygones de f et de Q coïncident ce qui prouve que Q a p_n pôles de plus que de zéros dans le cercle $C(0,r_n)$. Comme Q a un nombre fini de pôles, il existe un nombre fini I_n de disques intérieurs du cercle $C(0,r_n)$ où Q a plus de pôles que de zéros. Soient Δ_n^i ces disques et p_n^i la différence entre le nombre de pôles et de zéros de Q dans Δ_n^i. On a $\sum_{i=1}^{I_n} p_n^i \geq p_n$. On vérifie alors que ces disques Δ_n^i et ces nombres p_n^i ne dépendent pas de la fraction approximante Q.

On renumérote alors la suite (r_n) en comptant I_n fois chaque valeur r_n et en lui associant successivement chacun des p_n^i . On obtient ainsi une suite croissante (et non strictement croissante) de nombres que nous noterons encore r_n auxquels sont associés des nombres entiers > 0 p_n . Ce sont les suites qui interviennent dans l'énoncé de la condition $(*)$. On a alors

$$(1) \qquad \mathrm{Log}|f|(r_n) \geq \mathrm{Log}|f|(r_1) - \sum_{m=1}^{n-1} p_m(\mathrm{Log}\, r_n - \mathrm{Log}\, r_m) .$$

Soit donc Δ_n le disque ouvert de rayon r_n^- contenu dans le cercle $C(0,r_n)$ où Q a p_n pôles de plus que de zéros ainsi que nous l'avons défini précédemment. On montre alors qu'on peut trouver J_n trous de A contenus dans Δ_n , à savoir les trous $D_{nj} = D(a_{nj},\rho_{nj})$ $1 \leq j \leq J_n$, auxquels sont associés des entiers > 0 p_{nj} vérifiant $\sum_{j=1}^{J_n} p_{nj} = p_n$, de telle sorte que le polygone de Q relatif au point a_{nj} se trouve, dans l'intervalle $[\rho_{nj},r_n] = \mathrm{Pr}_{a_{nj}}(A \cap \Delta_n)$, situé au-dessus du polygone relatif au même point a_{nj} de la fraction rationnelle Q' qui a p_{nj} pôles dans D_{nj} , qui n'a pas de zéros dans Δ_n , et qui vérifie

$$|Q'|\,(r_n) = |Q|(r_n) = |f|(r_n) .$$

Puisque, sauf pour un nombre fini de valeurs de s , $|Q|_{a_{nj}}(s) = |Q(x)|$ sur le cercle $C(a_{nj},s)$, on a donc

$$\sup_{x \in A \cap \Delta_n} \mathrm{Log}|Q(x)| \geq \mathrm{Log}|Q|_{a_{nj}}(\rho_{nj}) \geq \mathrm{Log}|f|(r_n) + p_{nj}(\mathrm{Log}\,\rho_{nj} - \mathrm{Log}\, r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(\mathrm{Log}|a_{nk}-a_{nj}| - \mathrm{Log}\, r_n) .$$

Ceci étant vrai pour tout j , on a

$$\begin{aligned}\sup_{x \in A \cap \Delta_n} \mathrm{Log}|Q(x)| &\geq \mathrm{Log}|f|(r_n) \\ &+ \sup_{1 \leq j \leq J_n}\Big[p_{nj}(\mathrm{Log}\,\rho_{nj} - \mathrm{Log}\, r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(\mathrm{Log}|a_{nk}-a_{nj}| - \mathrm{Log}\, r_n)\Big] \\ &\geq \mathrm{Log}|f|(r_n) .\end{aligned}$$

Comme pour $|Q(x)| \geq \frac{1}{2}|f|(r_n)$ on a $|Q(x)| = |f(x)|$, on obtient finalement en tenant compte de (1) :

$$\sup_{x\in A\cap\Delta_n} \operatorname{Log}|f(x)| \geq \operatorname{Log}|f|(r_1) - \sum_{m=1}^{n-1} p_n(\operatorname{Log} r_n - \operatorname{Log} r_m)$$
$$+ \sup_{1\leq j\leq J_n} [p_{nj}(\operatorname{Log} \rho_{nj} - \operatorname{Log} r_n) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J_n} p_{nk}(\operatorname{Log}|a_{nk}-a_{nj}| - \operatorname{Log} r_n)] .$$

On prouve alors que $\sup_{x\in A\cap\Delta_n} |f(x)|$ doit tendre vers 0 quand $n\to\infty$, ce qui associé à l'inégalité ci-dessus prouve que la condition $(*)$ est réalisée.

6. - Démonstration de la condition suffisante de non-alatycité.

(Cette construction est une adaptation de la méthode employée par A. Escassut dans un contexte un peu différent).

Soit A vérifiant la condition $(*)$ et supposons pour simplifier que la suite r_n soit croissante et que $x_o = 0$.

On peut d'abord trouver une suite strictement croissante d'entiers $n(k)$ telle que

$$n(0) = 1 \ , \quad \operatorname{Log} r - \operatorname{Log} r_{n(k)} < \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad s(k) = \sum_{n=n(k)+1}^{n(k+1)} p_n \geq k \ .$$

Posons

$$Q_k(x) = \prod_{n=n(k)+1}^{n(k+1)} \prod_{j=1}^{J_n} (x-a_{nj})^{p_{nj}} = \sum_{i=0}^{s(k)} \alpha_{ki}\, x^i$$
$$R_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}\, x^i$$
$$f_k(x) = \frac{R_k(x)}{Q_k(x)} \quad .$$

On prouve alors que le produit $\prod_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformément sur A vers un élément analytique f vérifiant $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $|x| \geq r$; f ne satisfait donc pas au principe du prolongement analytique dans A , A n'est donc pas analytique.

7. - Exemples :

1) Soit A un ouvert tel que $\complement A$ soit la réunion de la suite de disques disjoints $D(a_n, \rho_n)$ où $|a_n|$ est une suite monotone convergeant vers une limite r et où l'on a $\rho_n \leq |a_n|$ pour tout n .

Si à partir d'un certain rang M on a $|a_n| = r$ pour $n > M$, A est quasi-connexe et donc analytique. Supposons donc que l'on a pour tout n, $|a_n| \neq r$. Si alors pour une infinité de n $|a_n| = \rho_n$, A n'est pas analytique. Nous supposerons donc que pour $n \geq N$ on a $\rho_n < |a_n|$.

Ceci étant, A est analytique si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.

i) La série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}|a_n|}{\mathrm{Log}|a_n| - \mathrm{Log}\, \rho_n}$ converge.

ii) On a $\mathrm{Log}\, \rho_n \leq \mathrm{Log}\, |a_n| - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} |\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}|a_k|| + c$ où c est une constante vérifiant $c < \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}\, |a_k||$.

Supposons que l'on a de plus $|a_n - a_m| = \sup(|a_n|, |a_m|)$ pour $m \neq n$. Alors A n'est pas analytique si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

i) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}\, |a_n|$ converge et la série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}|a_n|}{\mathrm{Log}|a_n| - \mathrm{Log}\, \rho_n}$ diverge.

ii) $\mathrm{Log}|a_n| - \mathrm{Log}\, \rho_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |\mathrm{Log}|a_n| - \mathrm{Log}|a_k||$ tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$.

On voit donc en particulier que si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}\, |a_n||$ converge et si pour $n \geq N$ on a $\rho_n \leq c < r$ l'ensemble A est analytique ; par contre si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Log}\, r - \mathrm{Log}|a_n||$ diverge et si pour $n \geq N$ on a $\rho_n \geq c > 0$ l'ensemble A n'est pas analytique.

Donnons enfin un exemple plus sophistiqué. Supposons que le complémentaire de l'ouvert A soit la réunion de la famille de disques disjoints $D(a_n, \rho_n)$; si $\rho_n < 1$ pour $n \geq N$ (N arbitraire) et si la série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{-1}{\mathrm{Log}\, \rho_n}$ converge, A est analytique.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ESCASSUT. - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner. Thèse, Bordeaux, 1970 (polycopié).

[2] M. KRASNER. - C.R.A.S. t. 219, p. 433-435 (1944).

[3] M. KRASNER. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valué complets. Colloque CNRS, Clermont-Ferrand, 1964.

[4] E. MOTZKIN et P. ROBBA. - Ensembles satisfaisant au principe du prolongement analytique en analyse p-adique. C.R.A.S. t. 269, p. 126-129 (1969).

-:-:-:-

138, route Nationale
Paris 13e (France)