MÉMOIRES DE LA S. M. F.

H. FERRU

Caractérisation des nombres de Pisot complexes. Application géométrique

Mémoires de la S. M. F., tome 19 (1969), p. 5-20
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1969__19__5_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 19, 1969, p. 5-20.

CARACTÉRISATION DES NOMBRES DE PISOT COMPLEXES.

APPLICATION GÉOMÉTRIQUE.

par

Hélène FERRU

Dans les pages qui suivent, on se propose de relier des propriétés, rattachées à l'analyse harmonique, de sous-ensembles de $\mathbf{C}$, à des propriétés de nombres algébriques: les nombres de Pisot et de Salem.

Nous dirons qu'un sous-ensemble Λ de $\mathbf{C}$ est harmonieux si les restrictions à Λ des caractères du groupe $\mathbf{C}$, muni de la topologie discrète sont uniformément approchables, sur Λ, par des caractères du groupe $\mathbf{C}$, muni de la topologie usuelle. Les premiers caractères seront dits faibles et les seconds forts.

Soit G l'ensemble des entiers de Gauss ; un nombre $\theta \in \mathbf{C}$ est un nombre de Pisot si

i) $|\theta| > 1$

ii) il existe un polynôme de $G[x]$, irréductible sur G

$$P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_o$$

dont θ est racine

iii) les autres racines de $P(X) = 0$, dites conjuguées de θ, sont de modules inférieurs à 1.

Si l'on impose aux racines conjuguées de θ d'avoir des modules inférieurs ou égaux à 1, l'un d'entre eux au moins étant égal à 1, θ est alors appelé nombre de Salem.

Le théorème auquel on aboutira, et qui relie ces deux notions est alors le suivant :

<u>Théorème</u>. <u>L'ensemble Λ des puissances θ^k, $k > 0$, de θ, est harmonieux si et seulement si θ est un nombre de Pisot ou de Salem ou une racine pième de l'unité</u>.

Ce résultat, ainsi que les moyens employés pour l'obtenir, généralisent ceux d'Yves Meyer relatifs au cas réel. Nous l'utiliserons pour étudier un ensemble Λ formé des images d'un vecteur de $\mathbf{R}^2$ par les itérées d'une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même.

Avant de démontrer le théorème, nous allons étudier les ensembles harmonieux et en donner des caractérisations. Un caractère χ de $\mathbf{C}$, muni de la topologie usuelle, est défini par $z \in \mathbf{C}$ de la façon suivante

$$\chi(\lambda) = \exp 2i\pi \mathcal{R} \bar{z} \lambda ,$$

où $\mathcal{R}\bar{z}\lambda$ est la partie réelle du produit $\bar{z}\lambda$. Nous noterons $\tilde{\mathbf{C}}$ l'ensemble des caractères faibles de $\mathbf{C}$; par l'application injective qui, à un caractère fort associe le caractère faible correspondant, $\mathbf{C}$ s'identifie à un sous-ensemble dense de $\tilde{\mathbf{C}}$ qui est compact. Nous avons alors

<u>Proposition 1. Soit</u> Λ <u>un sous-ensemble de</u> $\mathbf{C}$, <u>et</u> ε <u>un nombre réel de</u> $]0\ ,\ 2[$; <u>les trois conditions ci-dessous sont équivalentes</u>

a) <u>A tout caractère faible</u> χ <u>de</u> $\tilde{\mathbf{C}}$, <u>on peut associer</u> $z \in \mathbf{C}$, <u>tel que, pour tout</u> $\lambda \in \Lambda$,

$$|\exp 2i\pi\, \Re \bar{z} \lambda - \chi(\lambda)| \leqslant \varepsilon.$$

b) <u>Il existe un nombre réel positif</u> T, <u>tel qu'à tout caractère faible</u> χ <u>sur</u> Λ <u>on puisse associer</u> $z \in \mathbf{C}$ <u>ayant les propriétés</u>

i) $|z| \leqslant T$

ii) $|\exp 2i\pi\, \Re \bar{z} \lambda - \chi(\lambda)| \leqslant \varepsilon \qquad (\lambda \in \Lambda)$.

c) <u>Il existe un nombre réel positif</u> T, <u>tel que tout cercle de rayon</u> T <u>contienne</u> z <u>vérifiant toutes les inégalités</u>

$$|\exp 2i\pi\, \Re \bar{z} \lambda - 1| \leqslant \varepsilon \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

La condition b) implique évidemment a); montrons que a) implique b). Soit $V(\varepsilon)$ l'ensemble des éléments χ de $\tilde{\mathbf{C}}$ tels que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on ait $|\chi(\lambda) - 1| \leqslant \varepsilon$; $V(\varepsilon)$ fermé dans $\tilde{\mathbf{C}}$, est un compact de $\tilde{\mathbf{C}}$. A tout entier positif n, associons le compact $K_n = B_n + V(\varepsilon)$, où B_n est le cercle de centre 0 et de rayon n de $\mathbf{C}$. La condition a) signifie que la réunion des K_n est $\tilde{\mathbf{C}}$ tout entier. Grâce au théorème de Baire, on peut affirmer que l'intérieur de K_n, $\overset{\circ}{K}_n$, n'est pas vide dès que n est assez grand. Considérons alors, pour une telle valeur de n, les ensembles $z + \overset{\circ}{K}_n$ où z appartient à $\mathbf{C}$; leur réunion est $\tilde{\mathbf{C}}$ puisque $\mathbf{C}$ est dense dans $\tilde{\mathbf{C}}$, et il existe ($\tilde{\mathbf{C}}$ est compact) un ensemble fini F de nombres complexes, tel que $F + \overset{\circ}{K}_n = \tilde{C}$; a fortiori $F + B_n + V(\varepsilon) = \tilde{C}$ ce qui prouve b) avec $T = n + \sup_{z\in F}|z|$.

Montrons que b) entraine c). Au caractère défini par le centre s d'un cercle de rayon T, on peut, grâce à b) associer $u\in C$ tel que $|u| \leqslant T$ et que $|\exp 2i\pi \mathcal{R}\bar{s}\lambda - \exp 2i\pi \mathcal{R}\bar{u}\lambda| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\lambda\in\Lambda$; en posant $z = s - u$, on a bien, pour tout $\lambda\in\Lambda$, $|\exp 2i\pi \mathcal{R}\bar{z}\lambda - 1| \leqslant \varepsilon$. Vérifions enfin que c) entraine b). Par un raisonnement analogue au précédent nous voyons qu'à tout nombre s, on peut, grâce à c) associer un nombre u tel que $s - u$ appartienne à $V(\varepsilon)$ et que $|u| \leqslant T$; ainsi le compact $B_T + V(\varepsilon)$ contient C, il est donc identique à $\tilde{C}$.

Remarquons que la condition c) équivaut à la suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif T, tel que tout cercle de rayon T contienne z vérifiant toutes les inégalités $\|\mathcal{R}\bar{z}\lambda\| \leqslant \varepsilon$, où $\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à Z. Par analogie avec le cas réel, nous dirons qu'un sous-ensemble A de C est relativement dense, s'il existe $T > 0$ tel que tout cercle de rayon T ait, avec A une intersection non vide. La condition c) exprime que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des z tels que $\|\mathcal{R}\bar{z}\lambda\| \leqslant \varepsilon$ est relativement dense.

Notons que l'on peut, au lieu de cercles, utiliser des carrés de côtés $2T$, d'où l'on déduit qu'il suffit, pour qu'un ensemble soit harmonieux que ses projections le soient, la réciproque étant généralement fausse ainsi que le laisse prévoir la proposition suivante.

Proposition 2. A tout ensemble harmonieux Λ, on peut associer un nombre $d > 0$, tel que la distance entre deux points distincts de Λ soit supérieure ou égale à d.

Il suffit de montrer que, si Λ est harmonieux, 0 ne peut être un point d'accumulation de Λ car, si Λ est harmonieux $\Lambda+\Lambda$ et $\Lambda-\Lambda$ le sont aussi. Supposons donc Λ harmonieux, prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et considérons le T correspondant. Dans tout cercle de rayon T, il existe un point z tel que $\|\Re \bar{z}\lambda\| \leqslant \frac{1}{4}$; d'autre part, λ étant fixé, un tel point z appartient également à l'une des bandes définies par $\Re \bar{z}\lambda = p + \eta$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $|\eta| \leqslant \frac{1}{4}$; ces bandes sont distantes de $\frac{1}{2|\lambda|}$, et l'on aboutit à une incompatibilité si l'on peut trouver $\lambda \in \Lambda$ tel que $0 < |\lambda| < \frac{1}{4T}$. (Deux bandes consécutives sont assez éloignées l'une de l'autre pour que l'on puisse placer entre elles un cercle de rayon T).

Nous allons maintenant démontrer le théorème ; la proposition directe : "si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, $\Lambda = \{\theta^k\}_{k \geqslant 0}$ est harmonieux", résultera du lemme suivant :

Lemme. Soit θ un entier algébrique, racine du polynôme irréductible sur G, $X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_0$ $(c_k \in G)$, dont les racines conjuguées sont $\theta_2, \ldots, \theta_n$; pour tout caractère faible χ défini sur $\Lambda = \{\theta^k\}_{k \geqslant 0}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres complexes $z, z_2, \ldots, z_n$ vérifiant $|z_j| \leqslant \varepsilon$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et, pour tout entier $k \geqslant 0$

$$\chi(\theta^k) = \exp 2i\pi \Re \bar{z}\, \theta^k \exp 2i\pi \Re \sum_{j=2}^{n} \bar{z}_j\, \theta_j^k .$$

Un caractère sur Λ est défini par n nombres complexes $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$, avec $0 \leqslant \alpha_k < 1$, $0 \leqslant \beta_k < 1$ de telle sorte que $\chi(\theta^k) = \exp 2i\pi\, \alpha_k$, $\chi(i\theta^k) = \exp 2i\pi\, \beta_k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$; les valeurs de χ aux autres points de Λ s'en déduisant nécessairement à partir des égalités $\theta^{n+p} + c_{n-1}\theta^{n-1+p} + \dots$ $\dots + c_o\theta^p = 0$ valables pour tout entier $p \geqslant 0$. Il suffit donc de montrer que l'on peut toujours écrire

$$\gamma_k \equiv \bar{z}\theta^k + \sum_{j=2}^{n} \bar{z}_j\, \theta_j^k \quad \text{modulo } G \quad \text{avec } |z_j| \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Soit A l'ensemble des points de $\mathbf{C}^n$ de la forme $(\bar{z}\theta^k + \sum_{j=2}^{n} \bar{z}_j\theta_j^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour lesquels $|z_j| \leqslant \varepsilon$; on doit montrer que, modulo G^n cet ensemble est $\mathbf{C}^n/G^n$ tout entier. Puisque $\theta, \theta_2, \dots \theta_n$ sont distincts, A contient un ouvert "cylindrique" de $\mathbf{C}^n$ d'axe D défini par $(\bar{z}\theta^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, $z \in \mathbf{C}$, et il suffit alors de montrer que l'image de D dans $\mathbf{C}^n/G^n$ est dense. Ce dernier point résulte de la densité, dans $\mathbf{C}^n$, du sous-groupe formé des points $(\bar{z}\theta^k + c_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, $c_k \in G$, car, si ce sous-groupe n'était pas dense, il existerait un caractère <u>continu</u> de $\mathbf{C}^n$, autre que le caractère unité, valant 1 sur le sous groupe, c'est-à-dire des nombres complexes non tous nuls, $\mu_o, \dots, \mu_{n-1}$ tels que

$$\Re \sum_{k=o}^{n-1} \bar{\mu}_k(\bar{z}\theta^k + c_k) \equiv 0 \quad \text{modulo } 1,$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$ et toute suite $(c_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ d'éléments de G. On en déduirait d'abord, en faisant $z = 0$, que μ_k appartient à G, puis, en donnant à z des valeurs réelles et imaginaires pures que $\sum_{k=o}^{n-1} \bar{\mu}_k\, \theta^k = 0$, ce qui est contraire à la définition de θ.

Si θ est un nombre de Salem ou de Pisot, on a alors pour tout $k \geqslant 0$,

$$|\chi(\theta^k) - \exp 2i\pi\,\mathcal{R}\,\bar{z}\theta^k| = |\exp 2i\pi\,\mathcal{R}\sum_{j=2}^{n}\bar{z}_j\theta_j^k - 1| \leqslant \sum_{j=2}^{n}|\bar{z}_j||\theta_j|^k \leqslant \varepsilon(n-1)$$ ce

qui permet d'affirmer que Λ est harmonieux. Si θ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, Λ est fini donc harmonieux.

Réciproquement, si Λ est harmonieux on ne peut avoir $|\theta| < 1$; si $|\theta| = 1$ Λ est nécessairement fini et θ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité ; pour achever d'établir la proposition réciproque nous supposerons $|\theta| > 1$ et distinguerons deux cas, θ transcendant et θ algébrique $(\theta \notin \mathbf{R})$. Si θ est transcendant, les restrictions à Λ des caractères faibles sont toutes les suites de nombres complexes de module 1. Nous allons montrer, en utilisant une méthode de J.-P. Méla, que chacune de ces suites n'est pas uniformément approchable par un caractère fort.

<u>Proposition</u> 4. <u>Si</u> $|\theta| > 1$, <u>il existe une suite</u> $(c_k)_{k \geqslant 0}$ <u>prenant les valeurs</u> ± 1, <u>qui n'est pas limite uniforme d'une suite</u> $\exp 2i\pi\,\mathcal{R}\,\bar{z}\theta^k$, $z \in \mathbf{C}$, $\theta \in \mathbf{C}$, $k \geqslant 0$.

Soit Δ_ε l'ensemble des nombres complexes z de module 1 et tels que $|z-1| \leqslant \varepsilon$ ou $|z+1| \leqslant \varepsilon$, et soit K_ε l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}$ tels que $\exp 2i\pi\,\mathcal{R}\,\bar{z}\theta^k$ appartienne à Δ_ε pour tout k, $k \geqslant 0$. Dès que ε est assez petit, 0 est un point isolé de K_ε. En effet, si z appartient à K_ε, on a $|\exp 4i\pi\,\mathcal{R}\,\bar{z}\theta^k - 1| \leqslant 2\varepsilon$ qui entraine $\|\mathcal{R}\,2\bar{z}\theta^k\| \leqslant \varepsilon$ $(k \geqslant 0)$. Si $|2\bar{z}| \leqslant \varepsilon$, il existe un premier entier p tel que $|2\bar{z}\theta^k| \leqslant \varepsilon$ si $k < p$ et $|2\bar{z}\theta^p| > \varepsilon$; nous allons en déduire qu'il existe un premier entier m, $m \geqslant p$, tel que $|\mathcal{R}\,2\bar{z}\theta^m| > \varepsilon$ soit, nécessairement, $|\mathcal{R}\,2\bar{z}\theta^m| \geqslant 1 - \varepsilon$. Appelons α l'argument de $2\bar{z}\theta^p$, et φ

l'argument de θ, avec $-\pi < \varphi < \pi$ et $\varphi \neq 0$; choisissons η satisfaisant à l'inégalité (*) $0 < \eta < \inf(\frac{|\varphi|}{2}, \frac{\pi - |\varphi|}{2})$, et un entier q tel que $|\theta|^q \cos(\frac{\pi}{2} - \eta) \geqslant 1$. Alors

$$|\mathcal{R} 2\bar{z}\theta^{p+q}| = |2\bar{z}\theta^{p+q}| \, |\cos(\alpha + q\varphi)| \ ;$$

si $\alpha + q\varphi$ n'appartient pas à l'un des intervalles de longueurs 2η, de centres $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$$|\mathcal{R} 2\bar{z}\theta^{p+q}| > \varepsilon |\theta|^q \cos(\frac{\pi}{2} - \eta) \geqslant \varepsilon$$

et $m \leqslant p + q$; sinon, on considère $2\bar{z}\theta^{p+q+1}$ ce qui donne, grâce à l'inégalité (*), $m \leqslant p + q + 1$. On en déduit $|2\bar{z}\theta^m| \geqslant 1 - \varepsilon$ et, comme $|2\bar{z}\theta^{p-1}| \leqslant \varepsilon$,

$$|\theta|^{m-p+1} \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} ,$$

ce qui, $m - p$ étant borné, est inexact pour ε assez petit. L'inclusion $K_\varepsilon - K_\varepsilon \subset 2K_\varepsilon$ entraine que, si ε est assez petit, tout point de K_ε est isolé. Alors K_ε est dénombrable, mais comme l'ensemble de toutes les suites de ± 1 ne l'est pas, il existe une suite $(c_k)_{k \geqslant 0}$, prenant les valeurs ± 1 et qui n'est pas, à ε près, égale à une suite $\exp 2i\pi \mathcal{R}\bar{z}\theta^k$, $z \in \mathbf{C}$.

<u>Si</u> θ <u>est algébrique</u> et Λ harmonieux, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre complexe non nul, z, tel que $\|\mathcal{R}\bar{z}\theta^k\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$.

En posant $z = x + iy$, $\theta^k = u_k + iv_k$, cette inégalité devient $\|xu_k + yv_k\| \leqslant \varepsilon$, soit $xu_k + yv_k = p_k + \varepsilon_k$, avec p_k élément de $\mathbf{Z}$ et $|\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon$. Soit $Q(X) = a_q X^q + \ldots + a_o$ un polynôme irréductible de $\mathbf{Z}[X]$ dont θ est racine ; les racines de $Q(X) = 0$ sont simples, soient $\theta, \bar{\theta}, \theta_j \ldots \ 1 \leqslant j \leqslant q - 2$. Pour tout entier k positif ou nul on a $a_q\theta^{q+k} + \dots + a_o\theta^k = 0$, d'où l'on déduit que $a_q p_{q+k} + \dots + a_o p_k = -(a_q\varepsilon_{q+k} + \dots + a_o\varepsilon_k)$. Si $\varepsilon(|a_q| + \dots + |a_o|) < 1$, l'entier du premier membre est nul et le second membre l'est aussi. On a alors $\varepsilon_k = \mu_1\theta_1^k + \dots$ $\dots + \mu_{q-2}\theta_{q-2}^k$, où μ_j, $1 < j \leqslant q-2$ est un coefficient complexe nul si $|\theta_j| > 1$ puisque la suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant o}$ est bornée. La série formelle $\sum_{k\geqslant o} p_k X^k$, soit $\sum_{k\geqslant o}(\Re\, \bar{z}\theta^k)X^k - \sum_{k\geqslant o}\varepsilon_k X^k$ représente la fraction rationnelle $\frac{1}{2}(\frac{\bar{z}}{1-\theta X} + \frac{z}{1-\bar{\theta}X}) - \sum_{j=1}^{q-2}\frac{\mu_j}{1-\theta_j X}$ qui, d'après un lemme de Fatou ([2] lemme 2, p. 64) est égale à $A(X)/B(X)$ où A et B sont deux éléments de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux, tels que $B(0) = 1$. Comme B admet $1/\theta$ et $1/\bar{\theta}$ pour racines on a nécessairement $\mu_j \neq 0$ pour tout j, ce qui montre que θ est un nombre de Pisot ou de Salem.

Application. Soient u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, $v_o \in \mathbb{R}^2$ donné et $v_k = u^k(v_o)$ où k est un entier positif ou nul. Cherchons à quelles conditions $\Lambda = \{u^k(v_o)\}_{k\geqslant o}$ est harmonieux. Nous supposerons que v_o n'est pas un vecteur propre auquel cas la réponse est immédiate (la valeur propre correspondante est un nombre de Pisot ou de Salem réel).

<u>Nous montrerons alors que Λ est harmonieux si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite</u> :

a) <u>l'endomorphisme u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des nombres de Pisot ou de Salem (réels ou complexes) ou des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.</u>

b) <u>l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable et sa valeur propre est un nombre de Pisot (réel).</u>

Nous envisagerons trois cas suivant que les valeurs propres sont imaginaires conjuguées, réelles distinctes et réelles confondues.

I. <u>Cas où les valeurs propres de</u> u <u>sont imaginaires, soient</u> θ <u>et</u> $\bar{\theta}$.

Considérons la matrice de u, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ et prenons pour vecteurs propres $e = (c\ ,\ \theta - a)$ associé à θ, et $\bar{e}$. Relativement à la base $\{e\ ,\ \bar{e}\}$, v_k a pour composantes $v\theta^k$ et $\overline{v\theta}^k$ où v est la composante de v_o sur e. Dans la base initiale, v_k a pour composantes

$$\begin{cases} X_k = \mathcal{R}\, 2\, c\, v\theta^k \\ Y_k = \mathcal{R}\, 2\, v(\theta - a)\theta^k . \end{cases}$$

L'ensemble Λ est harmonieux si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe T' tel que dans tout pavé de côté $2T'$ il existe un point $(X\ ,\ Y)$ tel que

$$\|XX_k + YY_k\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 0,$$

ce qui se traduit par

$$\|\mathcal{R}\, 2v(cX + (\theta - a)Y)\theta^k\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 0 \ ;$$

ceci équivaut à, il existe $T > 0$ tel que tout pavé de côté $2T$ contienne z tel que $\|\mathcal{R}\bar{z}\theta^k\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$ car il suffit de résoudre $\bar{z} = 2v(cX + (\theta - a)Y)$ ce qui est toujours possible puisque $c \neq 0$ et $\mathcal{J}\theta \neq 0$. Ainsi Λ est harmonieux si et seulement si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, ou une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

II. <u>Cas où les valeurs propres sont réelles distinctes, soient</u> θ_1 <u>et</u> θ_2.

Dans une base convenablement choisie, Λ est l'ensemble $\{(\theta_1^k\ ,\ \theta_2^k)\}_{k \geqslant 0}$.

Si θ_1 et θ_2 sont des nombres de Pisot ou de Salem, Λ est harmonieux.

Inversement supposons Λ harmonieux. A cause de la proposition 2 on ne peut avoir $|\theta_1| < 1$ et $|\theta_2| < 1$. En dehors du cas immédiat $|\theta_1| = 1$, il reste à envisager les cas où $|\theta_1| > 1$. Nous allons voir tout d'abord que ni θ_1 ni θ_2 ne peut être transcendant. Supposons en premier lieu que l'un des nombres θ_1 ou θ_2 soit transcendant et que $|\theta_2| < 1 < |\theta_1|$. Puisque $|\theta_1| > 1$, il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, il existe une suite $(c_k)_{k \geqslant o}$ valant ± 1 pour laquelle on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{k \geqslant m} |\exp 2i\pi x\theta_1^k - c_k| \geqslant \varepsilon_o ;$$

pour s'en assurer, il suffit de remplacer, dans la démonstration d'Y. Meyer ([1], lemme 3.4), K_ε par l'ensemble $K_{\varepsilon,m}$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\exp(2i\pi x\theta_1^k)$ appartienne à Δ_ε pour $k \geqslant m$. Une telle suite, si θ_1 ou θ_2 est transcendant, définit un caractère de Λ et, par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T(\varepsilon)$ tel qu'on puisse trouver un point (x,y) dans le cercle de centre 0 et de rayon $T(\varepsilon)$ satisfaisant à toutes les inégalités

$$|\exp 2i\pi (x\theta_1^k + y\theta_2^k) - c_k| \leqslant \varepsilon , \quad k \geqslant 0 ;$$

on en déduit , pour $k \geqslant p(\varepsilon)$ défini par $T(\varepsilon)|\theta_2|^{p(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$,

$$|\exp 2i\pi x\theta_1^k - c_k| \leqslant 2\varepsilon$$

d'où une contradiction si l'on a choisi $2\varepsilon < \varepsilon_o$, $m \geqslant p(\varepsilon)$ et la suite correspondant à m.

Supposons maintenant, que l'un des nombres θ_1 ou θ_2 soit transcendant et que $1 < |\theta_2| < |\theta_1|$ (le cas $\theta_2 = \theta_1$ se résolvant immédiatement). Donnons à Δ_ε la même signification que plus haut et soit encore K_ε, l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $\exp 2i\pi\,(x\theta_1^k + y\theta_2^k)$ appartienne à Δ_ε pour tout $k \geqslant 0$. Montrons que, pour ε assez petit, 0 est un point isolé de K_ε et par conséquent que tous les points de K_ε sont isolés. Les points de K_ε satisfont aux inégalités $\|4(x\theta_1^k + y\theta_2^k)\| \leqslant \varepsilon$, $k \geqslant 0$. S'il existe x et y non tous les deux nuls appartenant à K_ε et vérifiant $|4x| \leqslant \varepsilon/2$ et $|4y| \leqslant \varepsilon/2$ alors il existe un premier entier p tel que $|4(x\theta_1^p + y\theta_2^p)| \leqslant \varepsilon$ et $|4(x\theta_1^p + y\theta_2^p)| \geqslant 1 - \varepsilon$. Si $x = 0$, l'existence de p résulte de ce que $|\theta_2| > 1$ et l'on a alors $|\theta_2| > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ce qui est impossible si ε est assez petit. Sinon, posons $y = t(\varepsilon)x$; alors $|4x(\theta_1^k + t\theta_2^k)| = |4x\theta_1^k|\left|1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^k\right|$ tend vers l'infini avec k et $p(\varepsilon)$ existe ; si, quand ε tend vers 0, $1 + t(\varepsilon)\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p(\varepsilon)}$ ne tend pas vers zéro et ne lui est pas égal, alors on a, pour des valeurs de ε arbitrairement petites

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant |\theta_1| \left| \frac{1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p+1}}{1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p}} \right| \leqslant C|\theta_1|$$

ce qui est impossible pour ε assez petit. Si $1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p(\varepsilon)}$ est nul ou tend vers zéro, on considère de façon analogue l'inégalité

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant |\theta_1|^2 \left| \frac{1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p+1}}{1 + t\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{p-1}} \right| \leqslant K|\theta_1|^2$$

qui conduit également à une contradiction. L'ensemble K_ε étant dénombrable il existe une suite $(c_k)_{k \geq 0}$ valant ± 1 telle que pour tout (x,y)

$$\sup_{k \geq 0} |\exp 2i\pi (x\theta_1^k + y\theta_2^k) - c_k| \geq \varepsilon$$

ce qui est contradictoire avec le fait qu'une telle suite est un caractère de Λ.

<u>Supposons enfin que θ_1 et θ_2 soient algébriques avec toujours</u> $|\theta_1| > 1$.

Soit P le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont θ_1 et θ_2 sont racines et qui n'a que des racines simples,

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_o.$$

Si Λ est harmonieux, ε étant donné, on peut écrire, pour x et y convenablement choisis

$$x\theta_1^k + y\theta_2^k = p_k + \varepsilon_k$$

avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq 0$. Si ε est choisi assez petit, p_k et ε_k vérifient une équation récurrente à coefficients entiers. Nous avons alors

$$\varepsilon_k = \mu_2\theta_2^k + \mu_3\theta_3^k + \ldots + \mu_n\theta_n^k$$

où $\theta_3, \ldots, \theta_n$ sont les racines de P, autres que θ_1 et θ_2 et où $\mu_j = 0$ si $|\theta_j| > 1$. Il existe alors des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux A et B, tels que $B(0) = 1$ et que

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{x}{1 - \theta_1 X} + \frac{y - \mu_2}{1 - \theta_2 X} - \sum_{j=3}^{n} \frac{\mu_j}{1 - \theta_j X}.$$

Puisque l'on peut, grâce à la condition $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ supposer $y - \mu_2 \neq 0$ on en déduit comme précédemment que θ_1 et θ_2 sont des nombres de Pisot ou de Salem.

III. Cas où θ est la seule valeur propre. Si A est diagonalisable le résultat est immédiat. Sinon, dans une base convenablement choisie, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} \theta & \beta \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$, d'où $A^k = \begin{pmatrix} \theta^k & \beta^k \theta^{k-1} \\ 0 & \theta^k \end{pmatrix}$.

Dans une base convenablement choisie, Λ devient alors l'ensemble $\left\{(\theta^k , k\theta^{k-1})\right\}_{k \geqslant 0}$.

Si θ est un nombre de Pisot, les ensembles $\left\{\theta^k\right\}_{k \geqslant 0}$ et $\left\{k\theta^{k-1}\right\}_{k \geqslant 0}$ sont harmonieux et Λ est harmonieux.

Inversement supposons Λ harmonieux ; on ne peut avoir $|\theta| < 1$, et le cas $|\theta| = 1$ étant immédiat, il reste à envisager les cas où $|\theta| > 1$. Supposons d'abord θ transcendant, et soit K_ε l'ensemble des points (x , y) du plan, tels que $\exp 2i\pi\,(x\theta^k + yk\theta^{k-1})$ appartienne à Δ_k pour tout entier $k \geqslant 0$. Là encore, pour ε assez petit, 0 est point isolé de K_ε. Les points de K_ε satisfont à toutes les inégalités $\|4(x\theta^k + yk\theta^{k-1})\| \leqslant \varepsilon$, $k \geqslant 0$. S'il existe x et y, non tous les deux nuls, appartenant à K_ε et vérifiant $|4x| \leqslant \varepsilon/2$, $|4y| \leqslant \varepsilon/2$, alors il existe un premier entier $p(\varepsilon)$ tel que $|4(x\theta^p + yp\theta^{p-1}| \leqslant \varepsilon$ et $|4(x\theta^{p+1} + y(p+1)\theta^p)| \geqslant 1 - \varepsilon$. Si $y = 0$, p existe et l'on a alors $|\theta| \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$ ce qui est impossible si ε est assez petit ; sinon posons $x = t(\varepsilon)y$, alors $|x\theta^k + yk\theta^{k-1}| = |y\theta^{k-1}(t\theta + k)|$ tend vers l'infini avec k puisque $|\theta| > 1$ et p existe ; si, quand ε tend vers zéro $t\theta + p$ n'est pas nul, on en déduit

$$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \leqslant |\theta| \left|\frac{t\theta + p + 1}{t\theta + p}\right| = |\theta| \left|1 + \frac{1}{t\theta + p}\right| \;;$$

si $\limsup_{\varepsilon \to 0} |t\theta + p| > 0$ on a $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant k|\theta|$ pour des valeurs de ε arbitrairement petites, ce qui est impossible ; si $t\theta + p$ est nul ou tend vers zéro, on considère alors l'inégalité $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant |\theta|^2 \left|\frac{t\theta+p+1}{t\theta+p-1}\right|$ qui est impossible pour ε assez petit. L'ensemble K_ε est dénombrable et il existe une suite $(c_k)_{k \geqslant 0}$ valant ± 1, caractère faible sur Λ, qui n'est pas approchable à ε près par un caractère fort, ce qui contredit le fait que Λ est harmonieux.

Supposons enfin θ algébrique ; pour tout $\varepsilon > 0$ et (x , y) convenablement choisi on a, pour tout $k \geqslant 0$,

$$x\theta^k + yk\theta^{k-1} = p_k + \varepsilon_k \quad \text{avec} \quad p_k \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad |\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $P(X)$ le polynôme irréductible de $\mathbf{Z}[X]$ dont θ est racine, posons $Q(X) = P^2(X) = a_{2n}X^{2n} + \ldots + a_o$; θ est racine double de $Q(X) = 0$ et l'on en déduit que pour tout $k \geqslant 0$

$$a_{2n}p_{2n+k} + \ldots + a_o = -(a_{2n}\varepsilon_{2n+k} + \ldots + a_o) = 0$$

si ε est assez petit. Ainsi ε_k, solution bornée d'une équation récurrente dont l'équation caractéristique n'admet que des racines doubles, peut s'écrire

$$\varepsilon_k = \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j k\, \theta_j^{k-1} + \mu_j \theta_j^k)$$

où $\lambda_j = 0$ si $|\theta_j| \geqslant 1$ et $\mu_j = 0$ si $|\theta_j| > 1$ et où $\theta_2, \ldots \theta_n$ sont les racines de P, autres que θ. Il existe deux polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ premiers entre eux A et B, tel que $B(0) = 1$ et

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{x}{1 - \theta X} - \frac{y/\theta\, X}{(1 - \theta X)^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\mu_j}{1 - \theta_j X} - \sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j/\theta_j\, X}{(1 - \theta_j X)^2}$$

ce qui exige $\lambda_j \neq 0$ pour tout j et par conséquent $|\theta_j| < 1$ pour tout j ; θ est alors un nombre de Pisot.

[1] Y. MEYER. Nombres de Pisot et Analyse harmonique. Studia Math. vol. 34, n° 2, 1969.

[2] R. SALEM. Algebraic numbers and Fourier analysis. Heath Mathematical Monographs 1961.

Hélène FERRU
Mathématiques (425)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)