MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

OLIVIER HUDRY

Nombre maximum d’ordres de Slater des tournois T vérifiant $\sigma(T) = 1$

Mathématiques et sciences humaines, tome 140 (1997), p. 51-58

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1997__140__51_0>

Math. Inf. Sci. hum., (35e année, n°140, *1997*, pp.51-58)

NOMBRE MAXIMUM D'ORDRES DE SLATER DES TOURNOIS T VÉRIFIANT $\sigma(T) = 1$

Olivier HUDRY[1]

RÉSUMÉ — *On s'intéresse ici au nombre maximum d'ordres de Slater qu'admettent les tournois T vérifiant $\sigma(T) = 1$, où $\sigma(T)$ est un paramètre calculé à partir des scores de T. On détermine ce nombre maximum d'ordres de Slater, de l'ordre de $2^{n/2}$, si n désigne le nombre de sommets. On donne de plus la forme des tournois T vérifiant $\sigma(T) = 1$ et maximisant le nombre d'ordres de Slater. En particulier, on obtient que ces tournois ne sont pas fortement connexes pour n pair.*

SUMMARY — Maximum number of Slater orders of tournaments T with $\sigma(T) = 1$.
We consider here the maximum number of Slater orders that a tournament T with $\sigma(T) = 1$ can get, where $\sigma(T)$ is a parameter defined from the scores of T. We compute this maximum number, which is about $2^{n/2}$, if n denotes the number of vertices. We depict also the tournaments T with $\sigma(T) = 1$ maximizing the number of Slater orders and we show that these tournaments are not strongly connected for n even.

1. INTRODUCTION

Un *tournoi* d'ordre n est un graphe orienté complet antisymétrique à n sommets : entre toute paire de sommets distincts x_j^n et x_k^n, il existe un et un seul des deux arcs $\left(x_j^n, x_k^n\right)$ ou $\left(x_k^n, x_j^n\right)$. Dans toute la suite, n désignera le nombre de sommets et T_n un tournoi à n sommets ; les sommets de T_n seront représentés par x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n. Si l'arc $\left(x_j^n, x_k^n\right)$ appartient à T_n, on dira que x_j^n *domine* x_k^n. Le *score* s_k d'un sommet x_k^n est le demi-degré extérieur de x_k^n, c'est-à-dire le nombre de sommets dominés par x_k^n (pour les définitions et les résultats de base sur les tournois, voir [6]). Le *vecteur-score* d'un tournoi T_n est le vecteur ordonné $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, les sommets étant numérotés de façon à avoir $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$. En particulier, le vecteur-score d'un tournoi transitif à n sommets est le vecteur $(0, 1, \ldots, n - 1)$. Un tournoi n'est pas nécessairement transitif et un tournoi transitif est en fait un ordre total ; si, dans un ordre total O, x désigne l'unique sommet de O dominé par tous les autres sommets de O, on dira que O *finit par* x. Un tournoi est transitif si et seulement s'il est sans circuit.

Le problème que l'on se propose d'étudier ici consiste à déterminer le nombre d'ordres totaux à distance minimum de certains tournois. La distance considérée correspond au nombre minimum d'arcs qu'il faut inverser dans le tournoi pour rendre celui-ci transitif, nombre dont la détermination constitue le problème de P. Slater ([7]).

---

1 ENST, 46, rue Barrault, 75634 Paris cedex 13.

DÉFINITIONS 1. Soit T un tournoi.

• On appelle *indice de Slater* et on note $i(T)$ le nombre minimum d'arcs à inverser dans T pour rendre T transitif, c'est-à-dire pour transformer T en un ordre total.

• L'ordre total obtenu en inversant ces $i(T)$ arcs est appelé *ordre de Slater* de T. On note $\mu(T)$ le nombre d'ordres de Slater de T.

L'indice de Slater $i(T)$ correspond à la mesure d'une distance entre le tournoi T et l'ensemble des tournois transitifs définis sur les sommets de T (voir [1]). Les ordres de Slater de T sont donc les ordres à distance minimum de T.

Les tournois T auxquels nous allons nous intéresser sont caractérisés par le paramètre $\sigma(T)$ défini à l'aide des scores de la façon suivante ([2] et [3]).

DÉFINITION 2. Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ le vecteur-score d'un tournoi T_n (avec $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$) ; on pose

$$\sigma(T_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|s_k - k + 1| .$$

Le paramètre $\sigma(T_n)$ évalue un éloignement entre le tournoi T_n et les tournois transitifs à n sommets (plus précisément, $\sigma(T_n)$ mesure une distance entre le vecteur-score de T_n et le vecteur-score d'un tournoi transitif à n sommets). En particulier ([2]), $\sigma(T_n)$ vaut 0 si et seulement si T_n est transitif, et peut prendre, quand T_n parcourt l'ensemble des tournois à n sommets, toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $(n^2 - 1) / 8$ si n est impair, ou entre 0 et $(n^2 - 2n) / 8$ si n est pair. Ce paramètre donne en outre un encadrement de l'indice de Slater ([2]) : pour tout tournoi T_n non transitif, $\sigma(T_n) \leq i(T_n) < n\sqrt{\sigma(T_n)}$. Enfin, il est montré dans [2] que le vecteur-score d'un tournoi T_n avec $\sigma(T_n) = 1$ est de la forme $(0, 1, \ldots, p-2, p, p, p+1, \ldots, q-3, q-2, q-2, q, q+1, \ldots, n-3, n-2, n-1)$, avec $1 \leq p < q \leq n$ (dans cette écriture, le premier « p » occupe la p^{e} position et le second « $q-2$ » la q^{e}). On constate ainsi qu'il n'y a, pour ces tournois, que deux entiers (p et $q-2$) qui représentent chacun le score de deux sommets. Dans toute la suite, on adoptera la convention suivante pour la numérotation des n sommets d'un tournoi T_n avec $\sigma(T_n) = 1$: les sommets seront numérotés selon les valeurs croissantes de leurs scores et pour deux sommets x et y de même score tels que (x, y) soit un arc de T_n, le numéro de x sera supérieur à celui de y.

Alors que la complexité de la détermination de l'indice de Slater d'un tournoi quelconque (problème de P. Slater) constitue un problème ouvert (pour une revue de résultats concernant le problème de Slater, voir par exemple [4] et [5]), il est montré dans [3] que la détermination de $i(T_n)$ et d'un ordre de Slater est linéaire en n pour les tournois T_n tels que $\sigma(T_n) = 1$. Nous nous intéressons ici au nombre $\mu(T_n)$ d'ordres de Slater qu'un tournoi T_n peut posséder. Que $\mu(T_n)$ puisse être exponentiel par rapport à n pour un tournoi quelconque, le lemme 1 ci-dessous montre que ce n'est pas étonnant. Mais ce qu'établit la partie 2, c'est que même pour des tournois relativement simples, en l'occurrence les tournois T_n tels que $\sigma(T_n) = 1$, $\mu(T_n)$ peut être exponentiel par rapport à n. Plus précisément, nous allons calculer, pour ces tournois, le nombre maximum d'ordres de Slater qu'ils peuvent avoir et exhiber les tournois pour lesquels ce nombre maximum est atteint.

2. NOMBRE MAXIMUM D'ORDRES DE SLATER DES TOURNOIS T AVEC $\sigma(T) = 1$

Avant de calculer pour tout n le maximum de $\mu(T_n)$ sur l'ensemble des tournois T_n vérifiant $\sigma(T_n) = 1$, remarquons que la valeur $\mu(T)$ pour un tournoi quelconque T s'exprime simplement à l'aide du nombre d'ordres de Slater des composantes fortement connexes de T.

LEMME 1. Soit T un tournoi quelconque et soient C_1, C_2, ..., C_k (avec $k \geq 1$) ses composantes fortement connexes. On a alors :

$$\mu(T) = \prod_{j=1}^{k} \mu(C_j).$$

Preuve. Il est facile d'établir la relation $i(T) = \sum_{j=1}^{k} i(C_j)$, qui signifie que pour rendre T transitif en inversant le moins d'arcs possible, il est nécessaire et suffisant de rendre transitive chaque composante fortement connexe C_j en inversant le moins d'arcs possible. Ceci implique qu'on ne doit pas inverser d'arcs reliant deux composantes connexes distinctes. Quitte à renuméroter les composantes fortement connexes de T, on peut supposer que celles-ci sont numérotées de telle sorte que les arcs entre deux composantes C_j et C_l sont orientés de C_j vers C_l si et seulement si $j < l$. Il en découle que tout ordre de Slater O de T est obtenu par la concaténation d'un ordre de Slater de C_1 avec un ordre de Slater de C_2, puis avec un ordre de Slater de C_3, et ainsi de suite jusqu'à un ordre de Slater de C_k, de telle sorte que dans O les sommets de C_j dominent ceux de C_l pour $j < l$. Réciproquement, il est facile de constater que toute concaténation de cette forme convient pour définir un ordre de Slater de T. D'où l'égalité précédente. ♦

REMARQUE 1. Une conséquence du lemme 1 est que $\mu(T)$ peut être exponentiel par rapport au nombre de sommets de T. Par exemple si T possède $3k$ sommets formant k composantes fortement connexes isomorphes à un circuit passant par trois sommets, on a alors $\mu(T) = 3^k$, puisqu'un circuit passant par trois sommets est un tournoi admettant 3 ordres de Slater.

Exhibons maintenant (lemme 2) un tournoi T_n^* à n sommets avec $\sigma(T_n^*) = 1$ admettant un nombre exponentiel (par rapport à n) d'ordres de Slater. Pour représenter T_n^* (figure 1) et les tournois des figures 2 et 3, certains arcs seront omis afin d'alléger les dessins : les sommets seront alignés de telle sorte que leurs numéros (attribués conformément à la convention décrite plus haut) soient croissants de gauche à droite ; seuls seront dessinés les arcs dont l'origine est située à gauche de l'extrémité selon cet alignement (les arcs manquants devront donc être considérés comme orientés de droite à gauche dans ces dessins). Plus loin, nous utiliserons aussi l'expression « ajouter un sommet à droite ou à gauche à un tournoi T » ; cela signifiera qu'on considérera le tournoi dont le dessin, compte tenu des conventions qu'on vient d'adopter, s'obtient en ajoutant un sommet à droite ou à gauche dans le dessin associé à T, mais pas d'arc ; autrement dit, on ajoute à T un sommet dominé par tous les sommets de T (sommet ajouté à gauche) ou dominant tous les sommets de T (sommet ajouté à droite). Nous utiliserons d'autre part, pour tout réel x, la notation $\lfloor x \rfloor$ pour désigner la partie entière par défaut de x.

LEMME 2. Soit T_n^* le tournoi à n sommets dont les arcs sont de la forme $\left(x_{2k-1}^n, x_{2k+1}^n\right)$ pour $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ou de la forme $\left(x_k^n, x_h^n\right)$ pour $1 \leq h < k \leq n$ avec $\{k \neq h + 2 \text{ si } h \text{ impair}\}$ (voir figure 1). Ce tournoi admet $\mu(T_n^*) = \frac{1}{3}\left((-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 2^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}\right)$ ordres de Slater.

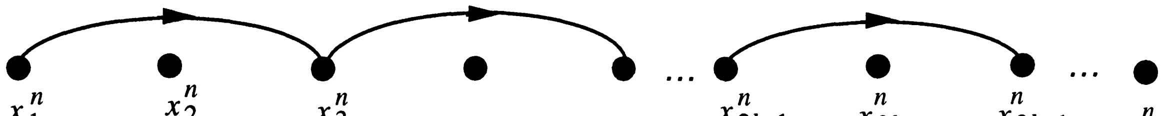

Figure 1

Preuve. On peut tout d'abord constater que le vecteur-score de T_n^* est $(1, 1, 2, 3, \ldots, n-3, n-2, n-2)$ si n est impair ou $(1, 1, 2, 3, \ldots, n-4, n-3, n-3, n-1)$ si n est pair ; d'où l'égalité $\sigma\left(T_n^*\right) = 1$. Par ailleurs, la forme de T_n^* étant fixée, $\mu\left(T_n^*\right)$ est une fonction de n seulement : posons, pour tout $n \geq 1$, $M(n) = \mu\left(T_n^*\right)$.

Le tournoi T_n^* possédant $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ circuits arc-disjoints de la forme $\left(x_{2k+1}^n, x_{2k}^n, x_{2k-1}^n\right)$ pour $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, il faut, pour rendre T_n^* transitif, détruire au moins tous ces circuits, ce qui nécessite $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ inversions : d'où $i(T_n^*) \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Comme de plus l'inversion des $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ arcs $\left(x_{2k-1}^n, x_{2k+1}^n\right)$ avec $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ suffit à rendre T_n^* transitif, on en déduit d'une part l'égalité $i(T_n^*) = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, et d'autre part qu'il est nécessaire et suffisant d'inverser exactement un arc (pas n'importe lequel) de chaque circuit $\left(x_{2k+1}^n, x_{2k}^n, x_{2k-1}^n\right)$ pour $1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Cette remarque va nous permettre de calculer $\mu\left(T_n^*\right)$, c'est-à-dire $M(n)$.

D'après ce qui précède, tout ordre de Slater de T_n^* finit par x_1^n, x_2^n ou x_3^n (puisque tout ordre total finissant par x_j^n avec $j \geq 4$ nécessite l'inversion par exemple de l'arc $\left(x_j^n, x_1^n\right)$, ce qui est incompatible avec ce qui vient d'être établi). Pour $1 \leq j \leq 3$, soit $M_j(n)$ le nombre d'ordres de Slater de T_n^* finissant par x_j^n :

$$M(n) = M_1(n) + M_2(n) + M_3(n). \tag{1}$$

Posons $T_{n-2}^* = T_n^* - \{x_1^n, x_2^n\}$. Il est facile de voir que T_{n-2}^* reste du même type que T_n^*, mais avec seulement $n-2$ sommets.

La restriction à T_{n-2}^* de tout ordre de Slater de T_n^* finissant par x_1^n définit un ordre de Slater de T_{n-2}^*, et réciproquement tout ordre de Slater de T_{n-2}^* peut être prolongé en un ordre de Slater de T_n^* finissant par x_1^n en inversant l'arc (x_1^n, x_3^n) de T_n^*. On obtient donc :

$$M_1(n) = M(n-2). \tag{2}$$

En revanche, seuls les ordres de Slater de T_{n-2}^* finissant par x_1^{n-2} (qui occupe dans T_n^* la place de x_3^n) peuvent être mis en bijection avec des ordres de Slater de T_n^* finissant par x_2^n (en inversant l'arc (x_2^n, x_1^n)) ou par x_3^n (en inversant l'arc (x_3^n, x_2^n)). En effet, tout autre ordre de Slater de T_{n-2}^*, finissant par exemple par x_2^{n-2} (qui occupe la place de x_4^n dans T_n^*) nécessite déjà l'inversion de $\lfloor (n-3)/2 \rfloor$ arcs de T_{n-2}^*, dont l'arc $(x_2^{n-2}, x_1^{n-2}) = (x_4^n, x_3^n)$; il ne reste donc qu'un seul arc à inverser pour atteindre $i(T_n^*) = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, et cet arc doit nécessairement détruire le circuit $\left(x_3^n, x_2^n, x_1^n\right)$ de façon à obtenir en outre un ordre finissant par x_2^n ou x_3^n ; imaginons que l'on inverse $\left(x_2^n, x_1^n\right)$ pour avoir un ordre finissant par x_2^n : le circuit $\left(x_1^n, x_3^n, x_4^n\right)$ subsiste et le résultat n'est pas un ordre total. Les autres cas se traitent de la même manière, ce qui permet d'obtenir les égalités :

$$M_2(n) = M_3(n) = M_1(n-2) = M(n-4). \tag{3}$$

Des relations (1), (2) et (3), on déduit l'égalité

$$M(n) = M(n-2) + 2.M(n-4)$$

dont la résolution donne, à l'aide de techniques classiques d'analyse et compte tenu des premiers termes que l'on calcule directement :

$$M(n) = \frac{1}{3}\left((-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 2^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}\right). \qquad \blacklozenge$$

REMARQUE 2. On notera que la suite $M(n)$ vérifie les relations suivantes, pour tout $p \geq 1$:

$$M(2p+2) = M(2p+1) > M(2p).$$

Ces relations proviennent du fait que, si n est pair, T_n^* n'est pas fortement connexe et s'obtient en ajoutant un sommet à droite de T_{n-1}^*.

Montrons maintenant que $M(n)$ est le maximum d'ordres de Slater que peut admettre un tournoi T_n à n sommets vérifiant $\sigma(T_n) = 1$. C'est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 3. Le nombre maximum d'ordres de Slater d'un tournoi T_n à n sommets avec $\sigma(T_n) = 1$ vaut $M(n) = \frac{1}{3}\left((-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} + 2^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor}\right)$. De plus, ce nombre n'est atteint que par les tournois T_n^* si n est impair ou par les tournois obtenus en ajoutant un sommet à gauche ou à droite au tournoi T_{n-1}^* si n est pair.

Preuve. Le lemme 2 montre que, pour tout n, $M(n)$ est atteint au moins par le tournoi T_n^* : $\mu\left(T_n^*\right) = M(n)$.

Nous allons maintenant montrer par récurrence que $M(n)$ est le maximum que l'on puisse atteindre pour les tournois T_n vérifiant $\sigma(T_n) = 1$. Il est facile de vérifier que $M(n)$ est bien le maximum pour $1 \leq n \leq 5$ et que les tournois maximisant $M(n)$ sont bien ceux annoncés. Considérons $n \geq 6$ et supposons le résultat vrai pour tout $k < n$. Soit T_n un tournoi à n sommets vérifiant $\sigma(T_n) = 1$. Ceci implique (voir plus haut) que le vecteur-score de T_n est de la forme (0, 1,..., $p-2$, p, p, $p+1$, ..., $q-3$, $q-2$, $q-2$, q, $q+1$, ..., $n-3$, $n-2$, $n-1$), avec $1 \leq p < q \leq n$ (le premier « p » occupant la p^{e} position et le second « $q-2$ » la q^{e}).

* 1$^{\text{er}}$ cas : $p > 1$ ou $q < n$.

Le tournoi T_n n'est donc pas fortement connexe. Soit T_{q-p+1} le sous-tournoi de T_n

engendré par les $q - p + 1 < n$ sommets x_p, x_{p+1}, ..., x_q. D'après le lemme 1, on a $\mu(T_n) = \mu(T_{q-p+1})$. De plus, le vecteur-score de T_{q-p+1} est $(1, 1, 2, ..., q-p-2, q-p-1, q-p-1)$, d'où $\sigma(T_{q-p+1}) = 1$, ce qui implique $\mu(T_n) \leq M(q-p+1)$ d'après l'hypothèse de récurrence. La suite $M(n)$ étant croissante (au sens large), on en déduit que le nombre d'ordres de Slater de T_n est inférieur ou égal à $M(n)$. On peut de plus remarquer qu'il y a égalité seulement si, d'une part, n est pair avec $q - p + 1 = n - 1$, ce qui implique $\{p = 1 \text{ et } q = n-1\}$ ou $\{p = 2 \text{ et } q = n\}$ et que, d'autre part, $T_{q-p+1} = T^*_{n-1}$, et donc seulement si T_n s'obtient en ajoutant un sommet à gauche ou à droite au tournoi T^*_{n-1}.

* 2nd cas : $p = 1$ et $q = n$.

Le tournoi T_n possède donc deux sommets de score 1 : x_1^n et x_2^n, liés par l'arc $\left(x_2^n, x_1^n\right)$. L'allure de T_n est illustrée par la figure 2.

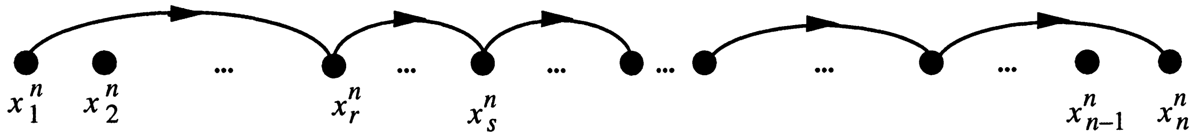

Figure 2

Soit x_r^n le sommet dominé par x_1^n (donc $r \geq 3$), et soit $T_{n-r+1} = T_n - \{x_1^n, x_2^n, ..., x_{r-1}^n\}$. Il est clair que l'on a $\sigma(T_{n-r+1}) = 1$, $i(T_n) = i(T_{n-r+1}) + 1$, et qu'il faut inverser, pour construire un ordre de Slater de T_n, exactement un arc du circuit $\left(x_1^n, x_r^n, x_{r-1}^n, \ldots, x_2^n\right)$.

• 1er sous-cas : $r > 3$.

L'arc à inverser dans le circuit $\left(x_1^n, x_r^n, x_{r-1}^n, \ldots, x_2^n\right)$ est nécessairement $\left(x_1^n, x_r^n\right)$: l'inversion de tout autre arc laisserait intact au moins le circuit $\left(x_1^n, x_r^n, x_2^n\right)$ ou le circuit $\left(x_1^n, x_r^n, x_3^n\right)$. Tout ordre de Slater de T_n correspond alors de façon bijective à un ordre de Slater de T_{n-r+1}, et on a par conséquent $\mu(T_n) = \mu(T_{n-r+1}) \leq M(n - r + 1) < M(n)$.

• 2nd sous-cas : $r = 3$.

Les ordres de Slater de $T_{n-r+1} = T_{n-2}$ finissant par $x_r^n = x_3^n$ peuvent être prolongés en un ordre de Slater de T_n par l'inversion de n'importe quel arc $\left(x_1^n, x_3^n\right)$, $\left(x_3^n, x_2^n\right)$ ou $\left(x_2^n, x_1^n\right)$; les autres ordres de Slater de T_{n-2} ne peuvent être prolongés en ordres de Slater de T_n que d'une seule manière (autrement, des circuits subsistent) : en inversant $\left(x_1^n, x_3^n\right)$. Appelons $\mu(T, x)$ le nombre d'ordres de Slater d'un tournoi T finissant par le sommet x. On obtient $\mu(T_n) = \sum_{k=4}^{n} \mu\left(T_{n-2}, x_k^n\right) + 3.\mu\left(T_{n-2}, x_3^n\right)$. Or, on a aussi $\mu(T_{n-2}) = \sum_{k=1}^{n-2} \mu\left(T_{n-2}, x_k^{n-2}\right)$ et, du fait de l'identité entre $\left\{x_k^{n-2} \text{ pour } 1 \leq k \leq n-2\right\}$ et $\left\{x_k^n \text{ pour } 3 \leq k \leq n\right\}$, on obtient $\mu(T_{n-2}) = \sum_{k=3}^{n} \mu\left(T_{n-2}, x_k^n\right)$. D'où $\mu(T_n) = \mu(T_{n-2}) + 2.\mu\left(T_{n-2}, x_3^n\right)$. De plus, en appelant x_s^n l'unique sommet dominé dans T_n par x_r^n avec $s > r = 3$ et en posant $T_{n-s+1} = T_{n-2} - \{x_3^n, ...,$

$x^n_{s-1}\}$ (on remarquera l'égalité $\sigma(T_{n-s+1}) = 1$), on peut écrire $\mu(T_{n-2}, x^n_3) \leq \mu(T_{n-s+1})$. D'où $\mu(T_n) \leq \mu(T_{n-2}) + 2.\mu(T_{n-s+1})$.

Si $s > 4$, alors $\mu(T_n) \leq M(n-2) + 2.M(n-s+1) \leq M(n-2) + 2.M(n-4) = M(n)$, et l'égalité $\mu(T_n) = M(n)$ n'est réalisée que si $\mu(T_{n-2}) = M(n-2)$ ce qui, compte tenu de la forme de T_{n-2} et de l'hypothèse de récurrence, n'est possible que si T_{n-2} est égal à T^*_{n-2}, auquel cas T_n est égal à T^*_n.

Reste donc seulement le cas $r = 3$ et $s = 4$. Si x^n_4 ne domine pas x^n_5, alors il est montré dans [3] qu'aucun ordre de Slater de T_{n-2} ne finit par x^n_3 (plus précisément, tout ordre de Slater de T_{n-2} se termine par x^n_4, ce qui du reste est facile à établir) : $\mu\left(T_{n-2}, x^n_3\right) = 0$; d'où on tire $\mu(T_n) = \mu(T_{n-2}) \leq M(n-2) < M(n)$. Si x^n_4 domine x^n_5, l'allure du tournoi est illustrée par la figure 3.

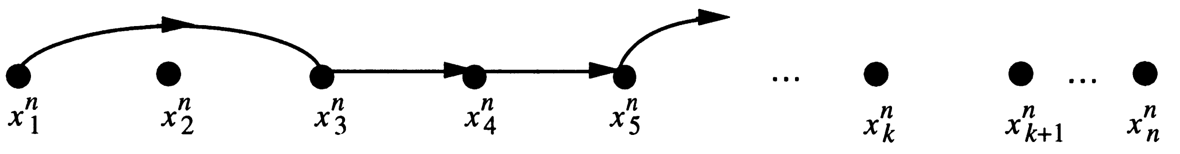

Figure 3

Soit $T_{n-4} = T_{n-2} - \{ x^n_3, x^n_4 \}$; on vérifie aisément la relation $\sigma(T_{n-4}) = 1$. Pour rendre T_n transitif, il est nécessaire et suffisant de rendre T_{n-4} transitif et de détruire les circuits $\left(x^n_1, x^n_3, x^n_2\right)$ et $\left(x^n_3, x^n_4, x^n_5\right)$ en n'inversant qu'un seul arc de chacun de ces deux circuits de manière à obtenir un ordre total (par exemple, les arcs $\left(x^n_1, x^n_3\right)$ et $\left(x^n_4, x^n_5\right)$ conviennent, ce qui montre les égalités $i(T_n) = i(T_{n-2}) + 1 = i(T_{n-4}) + 2$). Les ordres de Slater de T_{n-2} finissant par x^n_3 ne peuvent être obtenus qu'à partir des ordres de Slater de T_{n-4} finissant par x^n_5 (s'il en existe). En effet, inverser $\left(x^n_3, x^n_4\right)$ dans le circuit $\left(x^n_3, x^n_4, x^n_5\right)$, ce qui est nécessaire pour construire un ordre finissant par x^n_3, interdit d'inverser l'arc $\left(x^n_4, x^n_5\right)$; si on considère un ordre de Slater de T_{n-4} finissant par $x \neq x^n_5$, celui-ci ne peut être prolongé en un ordre de Slater de T_{n-2} à cause de l'égalité $i(T_{n-2}) = i(T_{n-4}) + 1$ et de la présence du circuit $\left(x^n_4, x^n_5, x\right)$. On obtient donc $\mu(T_{n-2}, x^n_3) \leq \mu(T_{n-4}, x^n_5) \leq \mu(T_{n-4}) \leq M(n-4)$. D'où finalement :

$$\mu(T_n) \leq \mu(T_{n-2}) + 2.\mu(T_{n-2}, x^n_3) \leq \mu(T_{n-2}) + 2.\mu(T_{n-4}, x^n_5) \leq M(n-2) + 2.M(n-4) = M(n).$$

Montrons pour finir que l'inégalité est stricte. En effet, pour qu'il y ait égalité entre $\mu\,(T_n)$ et $M(n)$, il faudrait avoir $\mu(T_{n-4}, x^n_5) = \mu(T_{n-4}) = M(n-4)$. D'après l'hypothèse de récurrence et compte tenu de la forme de T_n, T_{n-4} serait donc le tournoi T^*_{n-4}. Or, d'après l'étude développée dans le lemme 2, $\mu\left(T^*_{n-4}, x^n_5\right) < M(n-4)$, d'où $\mu(T_{n-4}, x^n_5) < M(n-4)$, contradiction avec l'égalité précédente.

Ceci achève la preuve : dans tous les cas, le nombre d'ordres de Slater de T_n ne peut excéder $M(n)$ et seuls les tournois décrits dans l'énoncé du théorème 3 ont un nombre d'ordres de Slater égal à $M(n)$. ♦

Quelques remarques en guise de conclusion.

• D'abord, il est à noter que, pour n pair, les tournois T_n avec $\sigma(T_n) = 1$ ayant le plus grand nombre d'ordres de Slater ne sont pas fortement connexes, contrairement à ce que l'on pourrait penser.

• D'autre part, en adaptant la remarque 1, il est très facile, pour toute valeur fixée de σ, de construire des tournois T vérifiant $\sigma(T) = \sigma$ et admettant un nombre d'ordres de Slater exponentiel par rapport au nombre de sommets de T. En revanche, il semble plus difficile, pour σ et n fixés, de déterminer les tournois T_n avec $\sigma(T_n) = \sigma$ qui possèdent un nombre maximum d'ordres de Slater. Le lecteur intéressé trouvera dans [8] une étude analogue à celle menée ici pour $\sigma = 2$. Mais une généralisation des méthodes utilisées ici ou dans [8] à des valeurs quelconques de σ semble assez délicate.

• Il se trouve que les tournois T_n qui maximisent le nombre d'ordres de Slater avec $\sigma(T_n) = 1$ sont aussi ceux qui maximisent l'indice de Slater sur le même ensemble de tournois ([2]) ; il n'est pas du tout évident que cette propriété soit vérifiée pour toute valeur de σ.

• De même, il se pourrait que les tournois (dont on ne connaît pas la forme) maximisant l'indice de Slater sur l'ensemble de tous les tournois à n sommets pour n fixé ne coïncident pas avec les tournois maximisant le nombre d'ordres de Slater sur le même ensemble. Mais là encore, la détermination de ces tournois ne semble pas aisée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTHÉLEMY J.-P., et MONJARDET B., "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", *Mathematical Social Sciences*, 1, (1981), 235-267.

[2] CHARON-FOURNIER, I., GERMA A., et HUDRY O., "Encadrement de l'indice de Slater d'un tournoi à l'aide de ses scores", *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 118, (1992), 53-68.

[3] CHARON-FOURNIER, I., GERMA A., et HUDRY O., "Utilisation des scores dans des méthodes exactes déterminant les ordres médians de tournois", *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* , 119, (1992), 53-74.

[4] CHARON, I., HUDRY O., et WOIRGARD F., "Ordres médians et ordres de Slater des tournois", *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 133, (1996), 23-56.

[5] LASLIER, J.-F.,*Tournament Solutions and Majority Voting*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1997.

[6] MOON, J. W., *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, 1968.

[7] SLATER, P., "Inconsistencies in a schedule of paired comparisons", *Biometrika*, 48, (1961), 303-312.

[8] WOIRGARD, F., *Recherche et dénombrement des ordres médians des tournois*, thèse de doctorat de l'ENST, Paris, (1997).