

DANIEL PARROCHIA

Trames, classifications, définitions

Mathématiques et sciences humaines, tome 116 (1991), p. 29-46

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__116__29_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRAMES, CLASSIFICATIONS, DÉFINITIONS

Daniel PARROCHIA ¹

RÉSUMÉ — *L'article part d'une analogie entre trames et partitions, définitions conceptuelles et optiques. On montre que les divisions d'un espace de concepts ressemblent souvent à celles de l'espace réel. On étudie alors quelques exemples de pavage d'un espace conceptuel (Aristote) et on compare les processus dichotomiques platoniciens (générateurs de définitions) aux filtres d'une algèbre booléenne. Par la suite, on généralise ces modèles, considérant des structures floues et des "ensembles approximatifs" (au sens de Z. Pawlak). Enfin, on essaie d'obtenir une caractérisation locale de la définition utilisant des résultats de la théorie des topoï.*

SUMMARY — *Grids, classifications, definitions. The paper begins with an analogy between grids and partitions, and between optical and conceptual definitions. We show that divisions of a space of concepts often look like divisions of the real space. We study then some examples of tiling a conceptual space (Aristote) and compare platonician dichotomic processes (which produce definitions) with filters on a boolean algebra. Then, we generalize these models, and consider fuzzy structures and filters on "rough sets" (in the sense of Z. Pawlak). Finally, we try to get a local caracterisation of definition, using some results of theory of topoï.*

INTRODUCTION

Le dictionnaire donne deux définitions du mot «définition». L'une renvoie à la logique : c'est, très grossièrement, l'énonciation des qualités essentielles d'un objet, c'est-à-dire, en réalité, des principaux traits sémantiques du mot qui le désigne ; cette énonciation est, en général, une proposition affirmative, qui doit faire connaître d'une manière précise ce que la logique classique appelait l'«extension» et la «compréhension» d'un concept, autrement dit, son domaine d'application et ses propriétés. Le second sens du mot «définition» renvoie à la technologie de l'image. «Définition» désigne en effet, en matière télévisuelle, une division de l'image à transmettre en un certain nombre de lignes, puis de points. Par extension, le mot en est venu à caractériser l'aptitude d'un système optique à reproduire les détails d'une image - aptitude relative au nombre de lignes en laquelle cette image est divisée, et au nombre de points qui figurent sur chaque ligne.

L'un des buts de cet article est de montrer que ces deux définitions ne sont pas si éloignées qu'il paraît, et qu'il s'agit bien, en matière logique, pour cerner, au moyen d'un concept, la configuration abstraite d'un objet, autrement dit pour le définir ou le délimiter, d'utiliser des procédures finalement assez comparables à celles qu'on utilise en dimension 2. Notre analyse prendra appui sur la philosophie, dans la mesure où les philosophes (en particulier Platon, Aristote ou Kant) ont, implicitement ou explicitement, utilisé pour définir des procédures dont

¹ Professeur à l'Université de Toulouse 2 Le Mirail, 5 Allée Antonio Machado, 31000, Toulouse.

nous pouvons aujourd'hui reconstituer les aspects formels. Mais nous dépasserons très vite ces balbutiements. Notre ambition est de généraliser ces procédures rigides, en particulier de les assouplir et, pour ce faire, de raisonner sur des structures floues. Mieux, nous souhaiterions faire quelques propositions en vue d'une théorie générale de la définition : la question qui nous intéressera est alors celle de la recherche d'un invariant. A quelles conditions pouvons-nous former des définitions stables? Le problème, nous le verrons, est d'envergure, et nous ne prétendons pas faire plus ici que suggérer quelques directions de recherche.

1. CONSIDÉRATIONS SUR LES TRAMES

1.1. Rappels.

Étant donné un ensemble E , nous appelons *recouvrement* de cet ensemble une famille F , de parties E_j , incluse dans $P(E)$, l'ensemble des parties de E , et telle que :

- i) chaque E_j soit non-vide ;
- ii) $\bigcup E_j = E$.

Nous appelons *partition* de E un recouvrement de E tel que tout élément de E appartient à une partie et une seule.

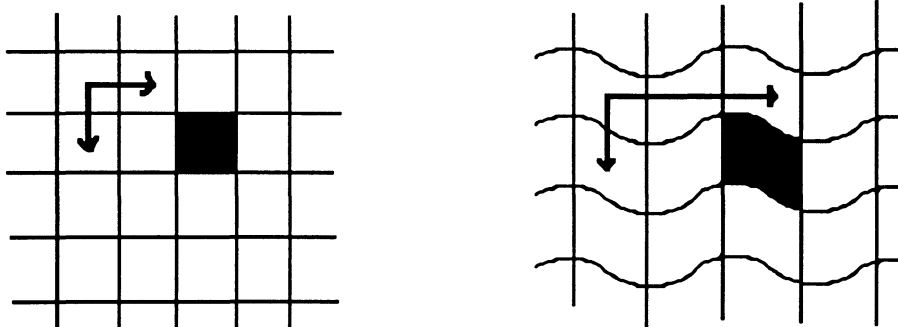
Nous appelons *pavage* de l'ensemble E une partition de E dont toute partie est finie.

Nous appelons *trame* un pavage régulier de E , c'est à dire, une partition de E en parties finies et de même cardinalité.

Exemples en dimension 2.

Une *trame plane* est un pavage du plan, dont la propriété est d'admettre deux autres automorphismes de translation non colinéaires autres que l'identité.

Rappelons qu'un automorphisme de translation équivaut à un déplacement de la trame par rapport à elle-même, de telle sorte qu'il y ait coïncidence totale, avant et après déplacement. Il est clair qu'en dimension 2, la trame est ainsi deux fois périodique ².



1.2. Trames planes.

La donnée d'une «définition» au sens optique du terme équivaut à la donnée d'une trame plane formée par la linéature et les points de la mire. Il est clair qu'une image est d'autant plus nette que la trame de l'écran sur lequel elle apparaît est serrée. On peut donner un sens mathématique à cette remarque.

² Cf. J. Zeitoun, *Trames planes*, Paris, Dunod, 1977, p.88.

Mathématiquement parlant, en effet, les trames planes qui sont des partitions du plan, sont organisées par le treillis des partitions du plan pour la relation d'inclusion. Une trame T sera dite *plus fine* qu'une trame T' si tout élément de base de T est inclus dans un seul élément de T'.

Les trames planes peuvent donc donner lieu à des études de type algébrico-topologiques (étude graphique, connexité, coloration, planarité, etc.). On peut, en outre, générer des trames complexes à partir de la définition d'une grammaire (ou ensemble de règles combinatoires réglant l'association de leurs éléments).

Les trames jouent un grand rôle en architecture et dans l'étude simplifiée des structures cristallines. Nous allons voir que le langage suppose lui aussi des architectures tramées.

2. LES PROCESSUS LOGIQUES DE DÉFINITION

Comprendre le monde, c'est l'organiser, autrement dit, effectuer des distinctions et des regroupements. Parmi les processus qui sont à l'œuvre dans ces opérations figure celui de la définition. Nous pouvons nous le représenter très généralement de la façon suivante.

Étant donné un ensemble E, qui est un ensemble de concepts rapportés à des objets quelconques, le problème de la définition d'un objet sera le processus qui permet d'assigner une place non ambiguë au concept de cet objet dans une trame ou une famille de trames associée à l'ensemble E. Cette procédure très générale a été maintes fois appliquée par des philosophes comme Platon, Aristote, Kant ou Hegel. Caractérisons-là de façon plus précise et donnons-en quelques exemples.

2.1. Un exemple simple de pavage de l'espace conceptuel chez Aristote.

Nous empruntons cet exemple à G.G. Granger. Celui-ci, étudiant la théorie aristotélicienne de la science, en vient à décrire différents «pavages lexicaux»³ du champ sémantique de la connaissance, où se superposent et s'enchevêtrent différentes trames, définissant les mêmes vocables au moyen de plusieurs systèmes d'opposition. Les trames (des partitions binaires, ici) qu'on doit présupposer pour s'expliquer la cohérence du propos aristotélicien sont les suivantes : discursif/non-discursif, prédicatif/non-prédicatif, doxique/non-doxique, symbolique/non-symbolique, contingent/nécessaire.

La superposition savante de ces trames permet alors de comprendre les déroutantes oppositions aristotéliciennes, différentes selon les textes de référence. Ainsi :

1) Le *De Anima* (III, 427 b 15) oppose l'imagination (phantasia) et la sensation (aisthesis) à la pensée judicatoire (dianoia ou hupolepsis) ; l'opposition se fonde sur le fait que l'imagination et la sensation, sont libres de toute affirmation ou négation (elle ont, contrairement à la pensée qui juge, un caractère non-doxique). Toutefois, imagination et pensée judicatoire s'opposent à la sensation selon un autre axe : l'axe logique. Contrairement à cette dernière, elles sont des connaissances prédicatives, qui s'expriment dans un discours (logos). Elles sont en outre des connaissances symboliques et discursives (elles exigent un raisonnement) - ce en quoi elles s'opposent à la doxa mais rejoignent le penser (noein), l'intelligence (phronesis), la technè et l'épistémè.

2) Les textes de *Métaphysique A* (980 b 26) et de *L'Éthique à Nicomaque* reprennent les trames précédentes en opposant cette fois-ci, grâce à elles, l'expérience (empeiria) au raisonnement (logismos), à la technique, à la mémoire (mnémè), à l'imagination (phantasia) et à la sensation. La mémoire et le penser rejoignent l'imagination dans la classe des objets symboliques, non-doxiques, tandis que le groupe phronésis-technè-dianoia s'oppose au groupe nous-épistémè-logismos en vertu du caractère de leurs objets (contingents ou nécessaires). L'empeiria occupe une place centrale et empiétante.

³ G.-G. Granger, *La théorie aristotélicienne de la science*, Paris, Aubier-Montaigne, 1976, p.11.

Intuitivement, comme le montre bien M. L. Apostel ⁶ une classification n'est autre qu'une chaîne de partitions successives, c'est à dire un ensemble de divisions ordonné par une relation de "précéder" ou, pour reprendre le langage introduit plus haut, une superposition ordonnée de trames.

Soit l'exemple du *Gorgias* (464 b sq), où il s'agit de montrer que l'ensemble des sciences se range d'abord en fonction de leur objet - le corps ou l'âme - (première trame), puis selon l'opposition du théorique et du pratique (seconde trame). Mathématiquement parlant, nous avons donc un ensemble à quatre éléments $E = \{a, b, c, d\}$, avec $a =$ gymnastique, $b =$ médecine, $c =$ législation, $d =$ justice. Sur cet ensemble E , on a défini successivement deux trames ou partitions. La première trame est la partition

$$P = \{a, b\}, \{c, d\}$$

avec $\{a, b\} =$ culture du corps et $\{c, d\} =$ politique.

La seconde trame est la partition :

$$P' = \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$$

Par définition, la relation de partitionnement pourrait être représentées chaque fois par un graphe associé. Ce graphe est une partie du produit $E \times E$, c'est à dire de l'ensemble de tous les couples d'éléments de E . Dans l'exemple, les partitions P et P' sont représentées sur chaque schéma par les groupements de points qui caractérisent l'appartenance commune des éléments à la même classe. Les éléments x et y sont dans la même classe s'il y a un point à l'intersection des lignes horizontales et verticales qui mènent à x et y . Cette représentation permet de faire apparaître clairement l'ordre existant entre les partitions de l'ensemble. Sur la figure le graphe de P' est évidemment contenu dans le graphe de P . Quand on passe du graphe de P au graphe de P' , ou de la première trame à la deuxième, c'est comme si on avait tamisé l'ensemble des parties pour n'en conserver que les éléments les plus fins. On dit d'ailleurs que la partition P' est plus fine que P , ou qu'elle est un "raffinement" de P .

On démontre que l'ensemble $P(E)$ de toutes les partitions de E , ordonné par cette relation "est plus fin que", qui est une relation d'ordre, est muni d'une structure de "treillis" : toute paire (P, P') de partitions de $P(E)$, admet en effet une même borne supérieure (plus petit majorant commun), notée $P \vee P'$ et une même borne inférieure (plus grand minorant commun), notée $P \wedge P'$. En l'occurrence, $P \vee P' = P'$ et $P \wedge P' = P$. On peut encore montrer qu'il y a isomorphisme entre les chaînes maximales de ce treillis, c'est à dire les suites ordonnées de partitions qui vont de la moins fine à la plus fine, et les classifications hiérarchiques.

Ce procédé qui permet de répartir la réalité en classes d'équivalence et de cerner progressivement l'objet qu'on veut définir est un premier moyen d'exploration, souvent utilisé par Platon. Mais il y en a un second, qui ressemble à celui-là tout en s'en distinguant, ce sont les processus de dichotomies.

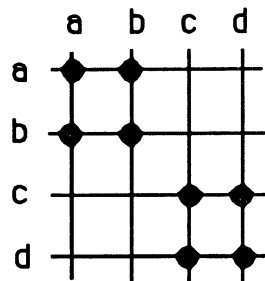
Il arrive en effet à Platon, dans les tentatives de définition qu'il propose, de ne plus viser l'exploration systématique du champ mais la délimitation précise d'un des éléments. Ce procédé reçoit une grande extension dans le *Sophiste* et le *Politique*, mais on en voit déjà la trace dans un dialogue comme le *Gorgias* (en 450 a, par exemple, ou encore vers la fin à partir de 500 a sq) quand il s'agit de définir la rhétorique. Il ne s'agit plus exactement ici d'une classification. Platon ne cherche pas à établir une hiérarchie de partitions successives explorant la totalité d'un champ sémantique. Dans une superposition de trames, il s'efforce au contraire, d'arriver à caractériser une portion limitée de l'espace conceptuel, qui correspond à ce qu'il cherche.

Comment procède-t-il ? Considérons la définition de 500 a sq. Dans l'ensemble des techniques, Platon commencera par séparer les techniques qui ont pour but le bien et celles qui visent seulement l'agréable, qu'il qualifiera de «flatteries». Puis, dans l'ensemble des flatteries, il distinguera celles qui s'exercent sur un individu et celles qui s'exercent sur la foule. Dans cette dernière classe, il opposera la flatterie musicale (qui utilise musique et/ou parole) et celle qui s'appuie sur la parole seule.

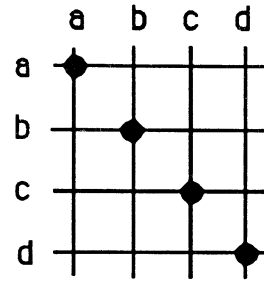
⁶ L. Apostel : "Le problème formel des classifications empiriques", *La classification dans les sciences*, Duculot, 1963, p. 159.

FIGURES

Représentation formelle d'une partition.



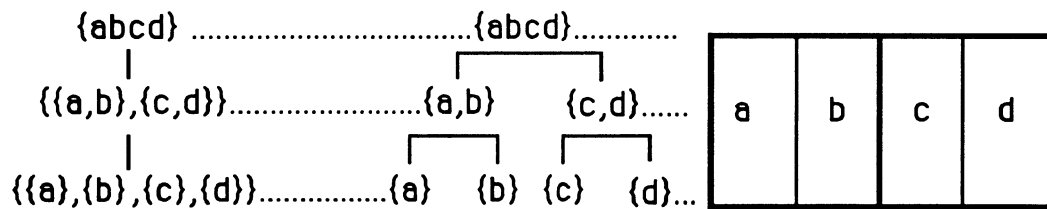
$$P = \{\{a,b\}, \{c,d\}\}$$



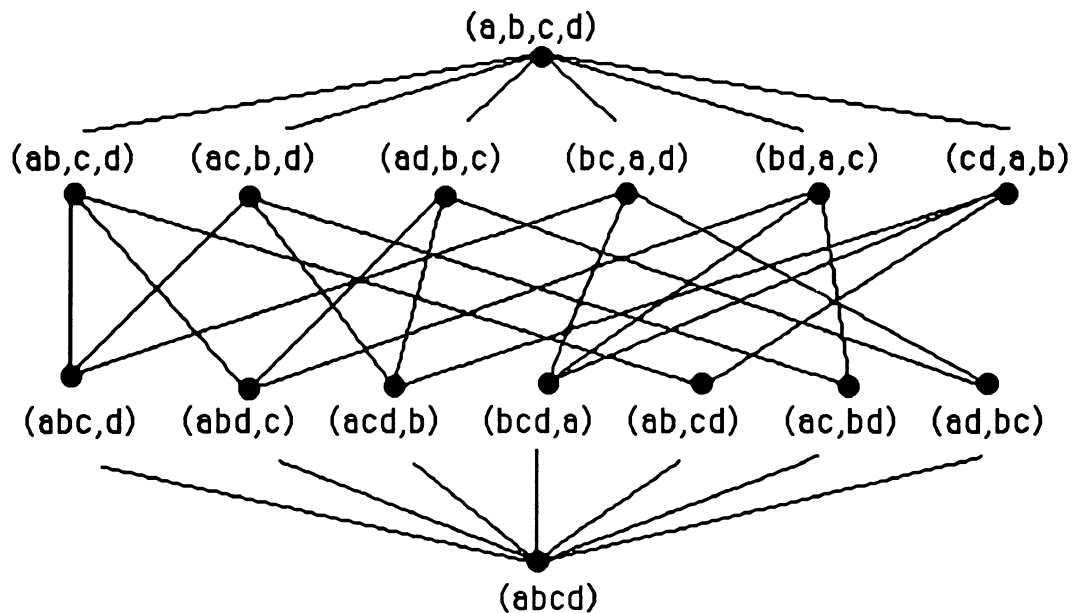
$$P' = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

P' est "plus fine" que P car le graphe de P' est contenu dans le graphe de P.

Correspondance entre chaîne ordonnée de partitions, classification et trame.



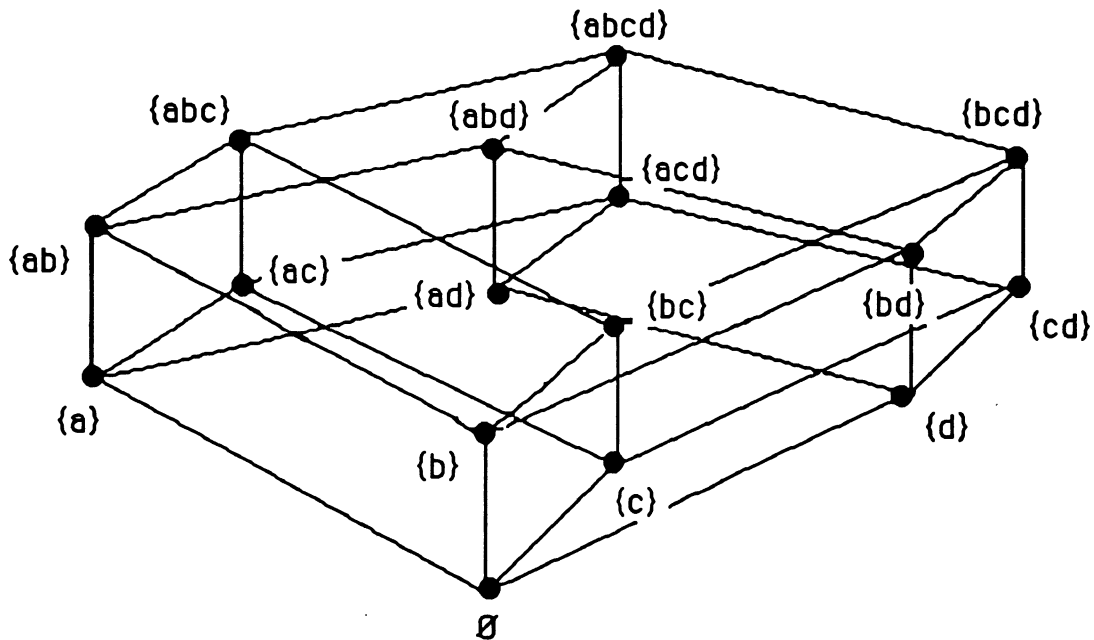
Treillis des partitions d'un ensemble à 4 éléments



Pour alléger l'écriture, on note $\{\{a,b\}, \{c,d\}\}$ comme (ab,cd).

Au terme de ce processus, on constate que ce qui apparaît comme la définition de la rhétorique, ce n'est pas seulement le dernier membre, c'est en fait l'ensemble des membres droits : la définition de la rhétorique n'est autre que ce processus de filtration qui fait passer de l'ensemble des techniques {abcd} aux techniques flattant les foules par la parole {a} par les intermédiaires {abc} et {ab}.

C'est ce qui permet à G.-G. Granger, dans la *Théorie aristotélicienne de la science* d'affirmer que la procédure platonicienne consiste à étendre sur la réalité une sorte de filet dont on resserre progressivement les mailles. La métaphore avait déjà été utilisée par des historiens de la philosophie comme A. Diès qui renvoyait à E. Goblot et à la logique classique ⁷. Le mérite de G.-G. Granger a été de proposer une interprétation de ces processus dichotomiques en termes mathématiques. C'est à dire qu'à cette image du filet - qui n'est, en fait, qu'une façon métaphorique de nommer ce que nous avons appelé une *trame*, correspond une structure topologique bien précise qui est celle du *filtre* ⁸.



On peut comprendre ce qu'est un filtre à partir de l'exemple ci-dessus. Etant donné un ensemble E à 4 éléments $\{a,b,c,d\}$, on forme l'ensemble $P(E)$ de ses parties qui a $2^4 = 16$ éléments et sur lequel l'inclusion ensembliste définit un ordre partiel, qui le munit d'une structure de treillis. Ce treillis a des propriétés particulières : il est à la fois distributif et complété, c'est-à-dire booléen. Sur ce treillis booléen, on peut définir un sous-ensemble fini de parties qu'on appelle un filtre et qui répond aux conditions suivantes. Un *filtre* F est une partie de B vérifiant :

- a) si x appartient à F et y est supérieur à x , alors y appartient à F .
- b) si x appartient à F et y appartient à F alors la borne inférieure de x et de y , notée $\min(x,y)$, appartient aussi à F .
- c) la borne supérieure de B appartient à F .
- d) si, de plus, la borne inférieure de B n'appartient pas à F , le filtre est dit "propre" ⁹.

L'ensemble des filtres étant partiellement ordonné par la relation d'inclusion, on appelle *ultrafiltre* un filtre propre maximal, autrement dit, un élément de l'ensemble des filtres propres, tel qu'il n'existe aucun filtre plus grand que lui.

⁷ A. Diès, *Sophiste*, Paris, Belles Lettres, 1969, p.384 ; cf. E. Goblot, *Traité de Logique*, Paris, 1925, § 75.

⁸ G.-G. Granger, *La théorie aristotélicienne de la science*, Paris, Aubier-Montaigne, 1979, p.241.

⁹ N. Bourbaki, *Topologie générale*, Paris, Hermann, 1, 36 ; D. Ponasse, J.-C. Carréga, *Algèbre et topologie booléennes*, Paris, Masson, 1979.

Sur un tel treillis $P(E)$, il y a quatre ultrafiltres :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \{abcd\}, \{abc\}, \{abd\}, \{acd\}, \{ab\}, \{ac\}, \{ad\}, \{a\} \} ; \\ U_2 &= \{ \{abcd\}, \{abc\}, \{abd\}, \{bcd\}, \{ab\}, \{bc\}, \{bd\}, \{b\} \} ; \\ U_3 &= \{ \{abcd\}, \{abc\}, \{acd\}, \{bcd\}, \{ac\}, \{bc\}, \{cd\}, \{c\} \} ; \\ U_4 &= \{ \{abcd\}, \{abd\}, \{acd\}, \{bcd\}, \{ad\}, \{bd\}, \{cd\}, \{d\} \} . \end{aligned}$$

La notion de *filtre* permet d'identifier rigoureusement toute définition du type "rhétorique" à un filtre sur un treillis. Nous trouverions beaucoup d'autres exemples de tels processus définitionnels chez Platon. La définition du pêcheur à la ligne dans le *Sophiste* (222a), est du même ordre. Celle du politique, dans le dialogue qui porte ce nom présente la même forme. Dans les deux cas, la différence est qu'elles mettent en jeu un plus grand nombre d'éléments que nos précédents exemples. Ce sont seulement des filtres un peu plus importants, relatifs à des treillis qui, cette fois-ci, seraient compliqués à représenter, mais dont on pourrait très facilement définir l'algèbre.

On peut faire plusieurs remarques au sujet de l'introduction de ce formalisme:

A) Il a le mérite de différencier les processus dichotomiques des processus seulement classificatoires. Les classifications explorent un champ en le répartissant en classes disjointes hiérarchisées. Ce sont des chaînes de partitions, des familles de trames de plus en plus fines. Les processus dichotomiques, eux, sont, mathématiquement, des filtres, c'est à dire, non plus des chaînes de partitions, mais des chaînes de parties d'un ensemble. Toute définition, tout filtre, est un parcours sur un treillis et naturellement, ceci permet, comme l'a bien vu M. Granger, d'identifier les processus dichotomiques à l'ensemble du procès de filtration, c'est à dire à l'ensemble des ultrafiltres du treillis.

B) La formalisation permet de retrouver le mouvement de certains dialogues. Ainsi, dans le *Sophiste*, on part de la pêche à la Ligne, mais la sophistique s'inscrit tout naturellement dans l'arborescence que cette première définition suppose. Platon produira, en effet, plusieurs définitions successives de la sophistique, à partir de l'exploration des sommets gauche de l'arborescence. Il fournira plusieurs définitions (cinq au total) avant de constater que leur intersection est vide et que ce qu'on ne peut pas attraper avec une main, il faut l'attraper avec l'autre (*Sophiste*, 225 a). Dès lors, remontant à la racine de l'arbre et explorant le membre gauche, il finira par fournir un sixième et ultime définition de la sophistique.

C) Il est possible de mettre en œuvre un algorithme susceptible de produire automatiquement les définitions comprises comme parties d'un ensemble filtré. Il suffit pour cela d'exprimer la structure hiérarchique de l'ensemble dans la logique d'une base de règles d'un système expert. Si l'on objecte que ce n'est pas le dialogue qui se trouve alors reconstitué mais son résultat, on peut montrer qu'il est aussi possible de procéder à des reconstitutions de dialogues in fieri : la construction de la définition du politique, dans le dialogue qui porte ce nom, par exemple, évoque typiquement les modernes procédures d'analyse par séparation et évaluation ¹⁰. Lorsque le processus de filtration n'est pas satisfaisant, le sommet de l'arborescence auquel on aboutit est pénalisé et on recommence la procédure à partir d'un sommet moins instable ¹¹.

Nous dirons, pour conclure cette partie, que les trames nous semblent avoir une importance considérable dans les architectures philosophiques. Trois points nous paraissent devoir être soulignés :

¹⁰ On se reportera à M. Gondran, M. Minoux, *Graphes et Algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979, p.395 sq. Les auteurs citent en exergue un texte du *Phèdre*, qu'ils attribuent, à tort, au *Phédon*.

¹¹ Nous avons longuement étudiés ces processus dans notre thèse, *Formes et systématiques philosophiques*, 3 vol. Université Lyon III, 1988.

1) Philosopher consiste, pour beaucoup, à produire ou à rectifier des découpages. Les processus platoniciens, de ce point de vue, se retrouvent dans l'histoire. Critiqués par Aristote, ils réapparaissent avec Kant, philosophe chez qui l'entreprise classificatrice prend une ampleur considérable. L'un des problèmes majeurs du kantisme, de ce point de vue, tiendra dans l'infinité potentielle des divisions empiriques possibles : on sait qu'un espace discret infini n'est pas compact, par conséquent qu'aucun filtre n'y est convergent. Ce problème, déjà susceptible d'être posé à propos de Platon (une définition peut-elle toujours aboutir?) se repose pour Kant. L'un des moyens de le résoudre est purement théorique. Il s'agit de «compactifier» l'ensemble : plusieurs procédures sont possibles, mais on peut difficilement croire que les philosophes aient pu les anticiper ¹². L'autre moyen est pratique : il faut tout simplement décider d'arrêter la division à un moment donné, où se limiter arbitrairement à la considération d'un sous-ensemble de l'ensemble des propriétés possibles. En opposant le pur à l'empirique - trame essentielle de son œuvre - c'est, finalement, la solution choisie par Kant.

2) A côté des définitions par division s'est développé, progressivement, la possibilité de former des définitions par combinatoire. Une trame est alors créée à partir de ses éléments générateurs. Le procédé était déjà connu de Platon qui, dans la *République* (369 e), engendre la société à partir d'un ensemble de trois besoins essentiels (se nourrir, se vêtir, se loger), qui supposent trois métiers fondamentaux (cultivateur, tisserand, maçon), auxquels Platon ajoute deux autres (cordonnier et médecin). Par intersection et réunion, se crée alors un ensemble d'activités secondaires. Ces formules combinatoires se retrouveront chez Spinoza, et dans un tout autre domaine : celui des passions. Sur cette question, tous les auteurs du XVII^{ème} ont leur mot à dire. Tous cherchent à réduire les dimensions de l'ensemble, à trouver quels sont les affections fondamentales. Spinoza les réduit à trois : la joie, la tristesse et le désir. Puis, sur un ensemble formé de ces trois affections, du mépris et de l'étonnement (qui ne sont pas, pour lui, à proprement parler des affections puisque c'est la constatation d'une absence qui provoque ces sentiments), ainsi que des idées des choses causes de ces affections, on reconstitue l'ensemble des affections possibles (amour, haine, ambition, ferveur, etc...). Toute définition devient alors une arête d'un hypergraphe extrêmement fécond, puisqu'il permet non seulement de retrouver des passions existantes mais, éventuellement, d'en inventer de nouvelles ¹³.

3) Il demeure que ces procédés restent, en partie, non satisfaisants. Les philosophes se sont aperçus assez tôt des problèmes soulevés par les méthodes qu'ils employaient. Aristote, déjà, menait, notamment dans les *Parties des Animaux* (642a - 643b), une guerre remarquable contre la méthode platonicienne, qui symétrise abusivement la réalité. Entre autres, il posait, à sa manière une question qu'on peut reformuler ainsi : si la dichotomie fonctionne - autrement dit, si l'espace sous-jacent est booléen, cela ne signifie-t-il pas que le cardinal de l'espace des propriétés est nécessairement une puissance de 2 ?

Kant, en ce qui le concerne, insistait sur l'aspect «extérieur» des critères de classification et de définition. Poursuivant le projet des néoplatoniciens, qui avaient voulu résoudre cette croix du classificateur (ou comment faire sortir l'espèce du genre, sans adjonction d'éléments externes ?) Hegel, dans son *Encyclopédie des sciences philosophiques*, codera l'ensemble du processus logico-réel au moyen de trois catégories fondamentales, l'universel, le particulier, le singulier (U,P,S), qui, répliquées par similitudes aux différents niveaux de l'arborescence conceptuelle de la logique, de la philosophie de la nature ou de la philosophie de l'esprit, finiront par créer la trame extrêmement complexe à laquelle donne accès la lecture linéaire du système. On peut discuter de l'algèbre à laquelle renvoie le système des oppositions conceptuelles ¹⁴, voire contester qu'en sa fluidité, son contenu conceptuel et sa volonté de

¹² Citons, par exemple, le compactifié d'Alexandroff, ou celui de Stone-Cech. Cf. D. Ponasse, J.C. Carréga, *op.cit.*, p.84 et p.152.

¹³ Nous avons produit exhaustivement la combinatoire spinoziste et décrit l'algèbre de cet hypergraphe. Cf. D. Parrochia, «Le philosophe automate», *Milieu*, 30, 1987.

¹⁴ Cf. D. Parrochia, «Formalisation booléenne et intuitionniste de la logique hégélienne», *Colloque de Lodz* (Pologne), 1989, *Folia Philosophica*, Łódź, 1990.

concrétude, le spéculatif se ramène à de pures alternances formelles : quoi de plus vide qu'une trame? Il n'en demeure pas moins que le discours conceptuel, s'il n'est pas que cela, ne se soutient que de ces armatures, que le philosophe a bien tort de mépriser.

3. PROPOSITIONS D'EXTENSION DES PROCESSUS DÉFINITIONNELS

Nous avons, jusqu'ici, considéré des trames régulières et rigides.

Pourrait-on envisager d'affaiblir les conditions réclamées précédemment pour aboutir à des extensions de possibilités de définition? Plusieurs problèmes, en effet, se rencontrent :

- Ce que nous appelons «réalité» changeant avec l'histoire, nous pouvons réclamer que les définitions que nous produisons puissent évoluer au cours du temps, et de l'adjonction ou de la suppression des propriétés que nous attribuons aux objets, selon le développement du savoir scientifique, jusqu'à rendre compte du caractère relativement flou ou incertain de ce qu'on appelle la réalité.

- A un instant donné du temps, nous pouvons aussi vouloir définir des objets totalement indéterminés ou faiblement consistants. En d'autres termes, nous pouvons souhaiter, par exemple, définir de manière correcte, quelque chose comme un «carré rond» (Meinong), un «couteau sans manche auquel il manque la lame» (Lichtenberg), ou encore un chapeau dépourvu de forme précise, telle celui d'Hamlet (Shakespeare) etc.?

- Nous pouvons enfin réclamer qu'il nous soit possible de définir l'espace qui sert à définir, autrement dit, celui où l'on trouve les outils de délimitations dont on se sert pour former les définitions : il serait bien intéressant, par exemple, pour un philosophe, de savoir répondre à la question «qu'est-ce que la philosophie ?», sans s'engager nécessairement, pour autant, dans une philosophie déterminée. La notion usuelle de définition ne permet pas cela, puisqu'on estime, en général, que toute définition de la philosophie présuppose des choix philosophiques. Pour toutes ces raisons, il nous faut faire évoluer le concept de définition, en proposer différentes extensions formelles.

3.1. Flou morphologique, flou conceptuel, flou philosophique.

Nous essayerons de présenter ici quelques applications philosophiques de la théorie des sous-ensembles flous. Deux arguments peuvent justifier cette tentative : d'une part, les philosophes ont souvent souligné le caractère essentiellement imprécis ou incertain de ce qu'ils appellent des «concepts»¹⁵ ; d'autre part, il peut être parfois utile, dans une discipline scientifique, de «fuzzifier» certaines structures de pensée, pour inventer des «positions» nouvelles, des «sites» intermédiaires, qui obligent à modifier le «pavage» habituel du champ de l'expérience, la trame, telle qu'elle a été conçue jusque là.

Notre propos, nous ne le cachons pas, rencontre cependant une limite. On peut, en effet, distinguer deux espèces de flous : le flou *conceptuel*, quand le référentiel ensembliste E est mal défini ; le flou *morphologique*, quand le référentiel ensembliste E est bien défini mais quand les sous-ensembles sont flous au sens de Zadeh (ou de Goguen)¹⁶. Or, le «flou philosophique» est, le plus souvent, un flou conceptuel. On ne doit donc pas s'attendre, dans le cadre de la représentation de Zadeh, à une authentique formalisation des processus définitionnels. En revanche, nous allons voir que d'autres caractérisations du flou sont possibles.

¹⁵ E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie*, trad. P. Ricœur, Paris, Gallimard, 1950, p.236 ; Cf. G.-G. Granger, *Pour la connaissance philosophique*, Paris, O. Jacob, 1987, p.154 sq.

¹⁶ A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, II, Paris, Masson, 1975.

Nous rapportons, dans la suite, deux manières de construire des définitions floues. Le premier formalisme que nous utilisons est la réinterprétation logico-algébrique des définitions de Zadeh, telle qu'elle a été développée par le mathématicien lyonnais D. Ponasse.

Nous introduirons ensuite une deuxième manière d'envisager le flou - celle du mathématicien polonais Zdislaw Pawlak.

3.2. Structure floue (au sens de D. Ponasse).

Une structure floue ¹⁷ est un couple (E, J) où E est un ensemble non-vidé et J un treillis distributif, avec plus petit élément 0 et plus grand élément 1, et $0 \neq 1$. E sera appelé "référentiel" et J "ensemble des valeurs d'appartenance".

On peut avoir (entre autres) :

$$\begin{aligned} J &= U = \{0, 1\}, \\ J &= \{0, 1/2, 1\}, \\ J &= [0, 1] \end{aligned}$$

3.2.1. Partie floue.

Étant donnée (E, J) une structure floue, une partie floue de E (ou partie J -floue) est une application de E dans J . On notera $\tilde{A}, \tilde{B}, \dots$ les parties floues, $\tilde{\mathcal{P}}(E)$ l'ensemble J^E des parties floues de E .

Si $\tilde{A} \subset \tilde{\mathcal{P}}(E)$ et $x \in E$, $\tilde{A}(x)$ sera le "degré d'appartenance" de x à $\tilde{A}$.

Si $\tilde{A}(x) = a \in J$, on pourra aussi écrire : $x \in_a \tilde{A}$

On a : $\tilde{\mathcal{P}}(E) \subset \tilde{\mathcal{P}}(E)$

3.2.2. Application

Soient $J = \{0, 1\}$ et $E = \{a, b\}$ (ainsi ordonné) avec $a = \text{devoirs}$ et $b = \text{droits}$.

$J^E = \{00, 10, 01, 11\}$ engendre la trame nette correspondant à la classification kantienne des êtres dans la *Métaphysique des Mœurs* :

Symboles	Significations	Dénominations
00 = $\emptyset$	ni devoirs ni droits	choses
10 = $\{a\}$	des devoirs (pas de droits)	esclaves
01 = $\{b\}$	des droits (pas de devoirs)	Dieu
11 = E	des devoirs et des droits	hommes

D'où, en vertu de la complémentation booléenne, l'idée que l'homme est une anti-chose et l'esclave un anti-Dieu.

«Fuzzifions» légèrement cet univers en compliquant un peu l'ensemble des valeurs d'appartenance :

¹⁷ Nous nous inspirons ici très largement du polycopié de D. Ponasse, *Séminaire de mathématique floue*, Université Lyon I, 1977-1978.

Soient $J = \{0, 1/2, 1\}$ et $E = \{a, b\}$

$J^E = \{00, 1/2\ 0, 0\ 1/2, 10, 01, 1/2\ 1/2, 1/2\ 1, 1\ 1/2, 11\}$ engendre cette fois-ci neuf catégories, soit, les quatre précédentes plus cinq catégories intermédiaires :

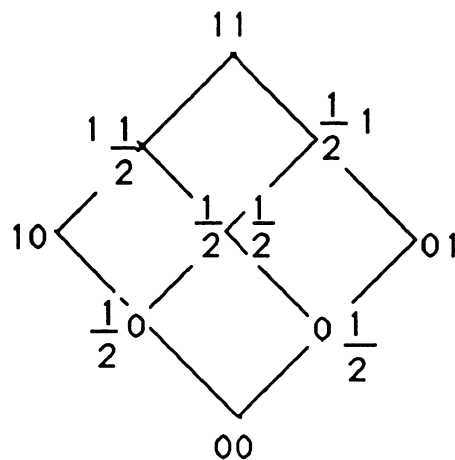
Symboles	Significations	Dénominations
1 1/2	des devoirs, quelques droits	?
1/2 1	des droits, quelques devoirs	?
1/2 1/2	quelques droits, quelques devoirs	?
1/2 0	quelques devoirs, aucun droit	?
0 1/2	quelques droits, aucun devoir	?

On peut alors facilement trouver des significations pour ces catégories intermédiaires : ange, prisonnier, fou, robot, embryon, etc...

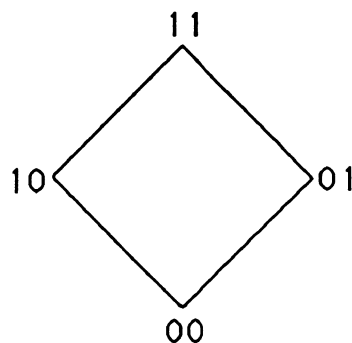
Les deux treillis correspondants ont les formes suivantes :

Le treillis $\mathcal{P}(E)$:

~



d'où on extrait très facilement le sous-treillis $\mathcal{P}(E)$:



Les complémentations sont intéressantes, et indiquent la manière dont la trame de notre univers peut se structurer. Si nous définissons un embryon comme possédant quelques droits et aucun devoir, nous voyons que l'entité qui posséderait quelques devoirs et aucun droit, serait une sorte d'anti-embryon. (Nous laissons de côté le problème de savoir si un tel être existe ou s'il peut exister.)

3.2.3. Ligne de flou. Trame floue.

Soit $A \subset (E, J)$. Pour tout a appartenant à J , on définit la "ligne de flou" de degré a de A

$$L_a(A) = \{x \in E / A(x) = a\}$$

$L_a(A)$ est, bien entendu, une partie nette de E .

Les lignes de flou partitionnent tout sous-ensemble flou en classes d'équivalence, pour lesquelles la valeur de la fonction d'appartenance des éléments à l'ensemble est la même. Nous proposons d'appeler cette partition «trame floue».

Au plan des applications, ce formalisme peut ainsi définir ce vêtement conceptuel flottant, dont l'aspect vaporeux et pourtant bien taillé, le rend prêt à épouser le mouvement de la vie. Une partie des arguments bergsoniens¹⁸ et husserliens tombent.

3.3. Une nouvelle définition du flou. Les ensembles approximatifs (rough sets) de Z. Pawlak

Avec la notion d'*ensemble approximatif*¹⁹ le mathématicien polonais Zdzislaw Pawlak a introduit, il y a une dizaine d'années, une nouvelle conception bien intéressante du flou, destinée à trouver de multiples applications, principalement dans différents domaines relevant de l'Intelligence Artificielle (raisonnement inductif, classification automatique, reconnaissance des formes, algorithmes d'apprentissage, etc.)

Cette notion d'ensemble approximatif sera pour nous l'occasion de généraliser une nouvelle fois la notion de «trame» et notre conception de la définition comme filtre.

3.3.1. Langage et notions de base

Soit U un ensemble, nommé univers et R une relation d'équivalence sur U . La paire $A = (U, R)$ sera nommée espace d'approximation. R sera nommée relation d'indiscernabilité. Si les éléments x, y appartiennent à U , et le couple (x, y) appartient à R , on dira que x et y sont indiscernables dans A . On notera X, Y, Z , en les munissant éventuellement de certains indices, les sous-ensembles de U . L'ensemble vide sera noté par 0 et l'univers U par 1 . Les classes d'équivalence de la relation R seront appelées ensembles élémentaires ou atomes de A . L'ensemble de tous les atomes de A sera noté U/R . Toute réunion finie d'ensembles de A est un *ensemble composé*. La famille $\text{Com}(A)$ de tous les ensembles composés est évidemment une algèbre de Boole, close pour l'intersection, la réunion et la complémentation.

X étant un certain sous-ensemble de U , le plus petit ensemble composé de A , contenant X sera nommé la meilleure approximation par excès de X dans A , et sera notée :

$$\overline{\text{Apr}}_A(X)$$

Le plus grand ensemble composé de A contenu dans X sera nommé la meilleure approximation par défaut de X dans A , soit :

$$\underline{\text{Apr}}_A(X)$$

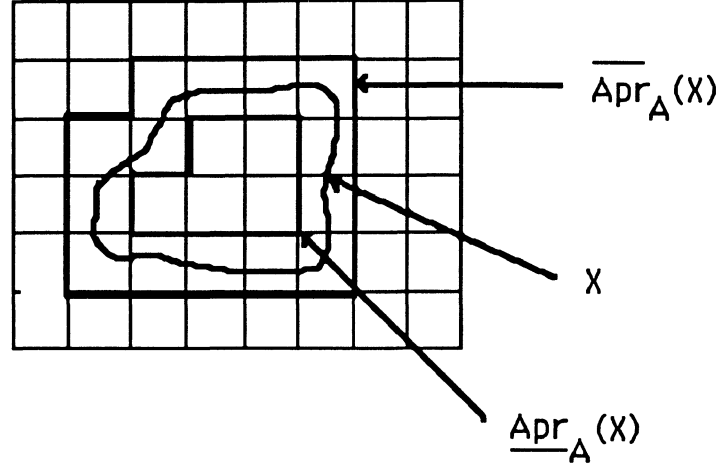
¹⁸ Cf. Bergson, *Oeuvres, L'Évolution créatrice*, P.U.F., 1970, pp.535-536. A la nécessité de «faire rentrer le réel dans les vêtements de confection que sont nos concepts», le philosophe entendait substituer «la nécessité de travailler sur mesure». Ailleurs, au début de *La Pensée et le Mouvant* (*op.cit.*, p.1254), il reprendra cette idée en affirmant que «les systèmes philosophiques ne sont pas taillés à la mesure de la réalité où nous vivons» et qu'«ils sont trop larges pour elle».

¹⁹ Cf. Z. Pawlak, «Rough Sets», *International Journal of Computer and Information Sciences*, Vol.11, n°5, 1982, pp.341-356.

On aura donc, à partir de là, une frontière de X dans A . C'est l'ensemble :

$$\text{Bnd}_A(X) = \overline{\text{Apr}_A(X)} - \underline{\text{Apr}_A(X)}$$

Les ensembles $\underline{\text{Edg}}_A(X) = X - \underline{\text{Apr}_A(X)}$ et $\overline{\text{Edg}}_A(X) = \overline{\text{Apr}_A(X)} - X$ sont les bords internes et externes de X dans A .



Naturellement, la frontière X se définit aussi comme :

$$\text{Bnd}_A(X) = \underline{\text{Edg}}_A(X) \cup \overline{\text{Edg}}_A(X)$$

La figure ci-dessus définit les approximations par excès et par défaut d'un ensemble X dans un espace de dimension 2.

3.3.2. Application au problème de la définition

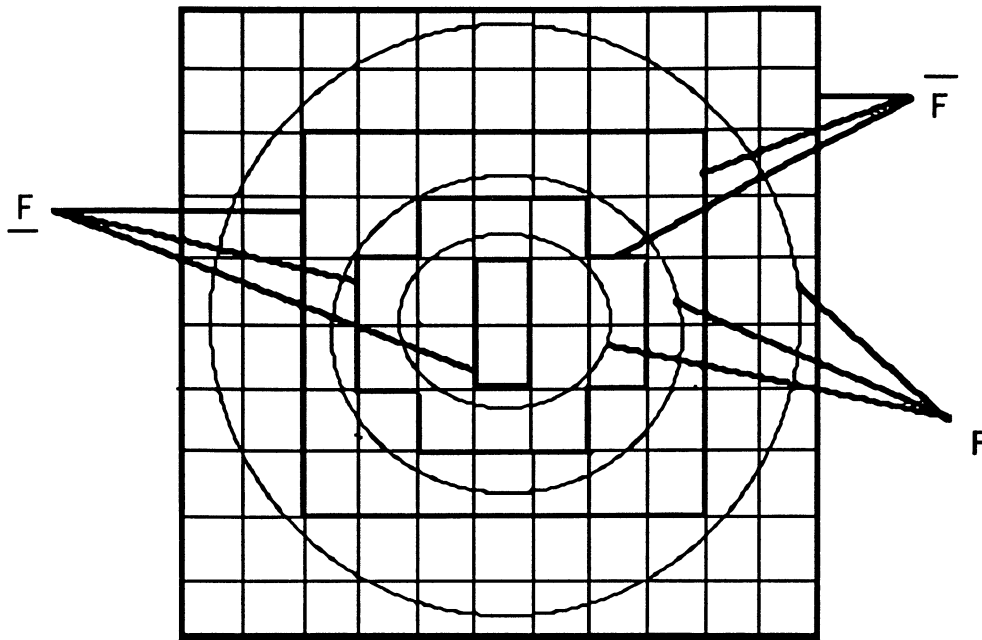
Il est facile de montrer que l'espace d'approximation $A = (U, R)$ définit de façon unique l'espace topologique T_A , où $T_A = (U, \text{Com}(A))$ et $\text{Com}(A)$ sont les familles de tous les ensembles ouverts de T_A , et où U/R est une base de T_A . De la caractérisation des approximations par excès et par défaut, il ressort que $\text{Com}(A)$ est alors l'ensemble de tous les sous-ensembles ouverts et fermés de T_A .

Ainsi les ensembles $\underline{\text{Apr}}_A(X)$ et $\overline{\text{Apr}}_A(X)$ peuvent être interprétés respectivement comme l'intérieur et la fermeture de X dans l'espace topologique T_A . Dans le cas où l'on a :

$$\overline{\text{Apr}}_A(X) = \underline{\text{Apr}}_A(X) \text{ pour tout } X \text{ inclu dans } U$$

alors, $A = (U, R)$ sera appelé un espace d'approximation discret. On retrouve alors les trames rigides précédemment décrites. Si cet espace est un espace de concepts, tout filtre est une définition au sens étudié plus haut.

En revanche, si $\overline{\text{Apr}}_A(X) = \underline{\text{Apr}}_A(X)$ pour tout X inclu dans U , il devient possible de considérer tout filtre définitionnel comme encadré par deux filtres approximatifs, l'un l'approchant par défaut, l'autre par excès. Initialement, toute définition, en tant que processus de filtration, apparaissait déjà en elle-même comme une approximation. On peut maintenant définir, dans le cas où la réalité se dérobe à ce procédé, une connaissance approchée du procédé lui-même :



Le filtre définitionnel F est alors approché de deux manières, ou, si l'on veut, à l'aide de deux vêtements «mal taillés» :

- par excès, grâce au filtre définitionnel F ;
- par défaut, grâce au filtre définitionnel $\overline{F}$.

On remarquera encore que l'intersection des deux filtres est non vide, et que l'on passe de l'un à l'autre par une sorte de glissement télescopique. Il n'y a, entre les deux, qu'un simple décalage. On peut comparer un tel phénomène à ce qu'on appelle la «mise au point» dans un système optique. En deçà et au-delà d'une bonne distance à l'objet, l'image formée est floue.

Divers types de solutions au problème de l'extension des processus définitionnels seraient envisageables. Au lieu d'algèbres booléennes ou d'algèbres floues, on pourrait envisager des généralisations à l'aide de toutes sortes de logiques non-standards. Dans tous les cas, il s'agirait toujours, en définitive, de modifier ou de compliquer une trame pour arriver à situer, grâce à elle, certains objets particuliers, ou plutôt, leurs concepts associés et les propriétés qui les définissent. On pourrait alors obtenir, toujours par des filtres, des définitions de type intuitionniste, paraconsistant, etc.. Le discours qui «délimite» peut assouplir sa propre trame de bien des manières ²⁰.

4. POUR UNE FORMALISATION LOCALE. LA NOTION DE «DÉFINITION PARTIELLE».

Une théorie mathématique générale de la définition devrait prendre en compte non seulement les définitions idéales, mais aussi les définitions réelles, c'est à dire les définitions incertaines ou provisoires, les définitions partielles ou floues, ou encore, les mauvaises définitions. De plus, elle devrait viser, comme le souhaitait déjà Platon, à constituer un modèle de définition stable, une sorte d'invariant définitionnel, et ceci quelles que soient les déformations que peuvent subir les trames.

²⁰ Sur les interprétations algébriques des logiques non-classiques, cf. H. Rasiowa, *An algebraic approach of non-classical logics*, North Holland, 1974 ; sur les logiques paraconsistantes, cf. A. Arruda, «A Survey of paraconsistent logic», in Arruda, Chuaqui, Da Costa, *Mathematical logic in latin America*, North Holland, 1980.

Faute d'être en mesure, pour l'instant, de satisfaire ces exigences et de formuler une théorie mathématique «globale» de la définition ²¹, on peut se contenter ici d'en proposer une théorie locale. Il conviendrait alors tout simplement de formaliser la notion d'«extension variable» d'un tel concept, sans préciser outre mesure cette variabilité qui dépendra des domaines d'application. La généralisation de la notion d'espace topologique qui intervient dans la théorie mathématique des «topoi» d'A. Grothendieck donne les moyens de développer une telle perspective. Nous proposerons donc, pour finir, une formalisation toposique de la notion de «définition partielle».

Parmi les exemples d'application de la théorie des topoi présentés par Makkai et Reyes dans leur livre ²², figure la notion de concept. D'après ces auteurs, un concept peut être en effet considéré comme une «extension variable» paramétrisée par ses domaines d'application. Dès lors, quand on dispose d'une notion de localisation au niveau des domaines d'application, on arrive à la notion de base de «concept à caractère local».

Comme nous avons voulu, depuis le début, échapper au caractère extrêmement rigide de la notion strictement «topologique» de définition, nous nous proposons ici de montrer comment une généralisation de l'approche topologique peut intervenir grâce à la théorie des topoi, qui revient à produire une trame encore plus lâche que celles que nous avons examinées jusque là.

4.1. Notion d'élément partiel d'un ensemble.

On sait qu'on peut définir rigoureusement, grâce à la théorie des topoi, le concept d'«élément partiel d'un ensemble X». Celui-ci peut être analysé comme suit :

Étant donné les différents domaines d'application d'une algèbre de Heyting H, complète, dont les éléments peuvent être identifiés à des «degrés d'existence», le concept d'«élément partiel» peut être identifié à un certain foncteur opp :

$$X : H^{opp} \rightarrow SET$$

(SET étant la catégorie des ensembles)

tel que, intuitivement :

$$X(h) = \{x \in X \text{ / degré d'existence de } x \text{ soit au moins } h\}$$

Inversement, le degré d'existence de x peut être défini (étant donné un X valable) comme le plus grand $h \in H$ tel que $x \in X(h)$

Comme on peut le voir tout de suite, un tel x n'existe pas toujours pour un foncteur arbitraire.

Il existe cependant, chaque fois que la condition suivante est satisfaite :

$$\text{Si } h_0 = \bigvee \{ h : x \in X(h) \} , \text{ alors, } x \in X(h_0)$$

Cette condition peut encore être exprimée sous la forme suivante :

$$\text{Si } h = \bigvee_{i \in I} h_i , \text{ alors } X(h) = \bigcap_{i \in I} X(h_i)$$

²¹ Nous nous proposons de revenir ultérieurement, dans un autre article, sur la question d'un invariant définitionnel susceptible d'être associé à des transformations de concepts et à l'acquisition ou à la perte de propriétés définissantes.

²² M. Makkai, G.E. Reyes, *First Order Categorical Logic*, Springer Verlag, 1970, p.64 sq.

En clair : si un élément, dont le degré d'existence h est le plus élevé, est un élément de base d'un ensemble $X(h)$, au sens où il est l'intersection d'une famille d'éléments $X(h_i)$ ayant un degré d'existence éventuellement plus faible, alors, cet élément appartient sûrement à $X(h)$, l'ensemble des éléments ayant un degré d'existence au moins égal à h .

Comme on peut le remarquer, cette condition suggère de considérer la famille $(h_i)_{i \in I}$ comme une localisation de h , toutes les fois que $h = \bigvee_{i \in I} h_i$

La condition exprime ainsi le caractère local du concept «élément partiel de X ».

Appliqué au problème de la définition, ce type de formalisation permettrait de proposer le concept de «définition partielle».

4.2. Notion de filtre partiel

Étant donnée l'algèbre de Heyting H complète, dont les éléments sont des degrés d'existence, on considère un foncteur $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} : H \text{ fil} \rightarrow \text{FIL}$$

(FIL étant la catégorie des ensembles filtrés)

tel que, intuitivement :

$$\mathcal{F}(h) = \{F \in \mathcal{F} / \text{le plus petit degré d'existence d'un élément de } F \text{ soit au moins } h\}.$$

Ce filtre F existe sous la condition suivante :

$$\text{Si } h = \bigvee_{i \in I} h_i, \text{ alors } \mathcal{F}(h) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}(h_i)$$

Il est clair que, sur un ensemble filtré, l'intersection de toutes les familles de filtres existant toujours (c'est la borne supérieure de l'ensemble), il suffit, pour qu'un filtre partiel existe, que cette borne supérieure possède le degré d'existence le plus élevé, c'est à dire que l'élément de degré d'existence le plus faible qu'elle contient soit un élément de degré d'existence au moins égal à h .

Avec cette condition d'existence de la notion de «filtre partiel», nous avons du même coup la condition d'existence d'une «définition partielle». L'idée est que le degré d'existence d'une définition dépend du degré d'existence de ses éléments. Les définitions sont plus ou moins bonnes, plus ou moins complètes en fonction de cette condition.

5. CONCLUSION

Définir, c'est toujours délimiter. Il faut pour cela, nous l'avons vu, une ou plusieurs trames, parfois plus ou moins enchevêtrées. Mathématiquement, une définition est toujours, nous semble-t-il, une superposition ordonnée de trames. On peut naturellement souhaiter fuzzifier un tel espace définitionnel, insérer des catégories supplémentaires au sein des existantes, couper et recouper l'espace des concepts existant. On peut chercher également à cerner la réalité au moyen de procédures d'approximations : le net se révèle alors entre deux flous. Mais la nature d'une définition dépend d'abord de celle de ses éléments. On peut donc, à tout le moins, la caractériser localement de façon rigoureuse. Mais ceci ne saurait constituer naturellement qu'un pis aller, et il resterait à construire une théorie mathématique globale de l'invariance définitionnelle.

BIBLIOGRAPHIE.

- APOSTEL, L., «Le problème formel des classifications empiriques», *La classification dans les sciences*, Bruxelles, Duculot, 1963.
- ARRUDA, A.I., CHUAQUI, R., DA COSTA, N., *Mathematical logic in latin America*, North Holland, 1980.
- BACHELARD, G., *Essai sur la connaissance approchée*, Paris, Vrin, 1973.
- BERGSON, H., *Œuvres*, Paris, P.U.F., 1970.
- BOURBAKI, N., *Topologie générale*, Paris, Hermann, 1971.
- DIÈS, A., *Sophiste*, Paris, Belles Lettres, 1969.
- GOBLOT, E., *Traité de Logique*, Paris, 1925.
- GOLDSCHMIDT, V., *Les dialogues de Platon*, Paris, P.U.F., 1963.
- GONDRAN, M., MINOUX, M., *Graphes et Algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979.
- GRANGER, G.-G., *La théorie aristotélicienne de la science*, Paris, Aubier-Montaigne, 1976.
Pour la connaissance philosophique, Paris, O. Jacob, 1987.
- HUSSERL, E., *Idées directrices pour une phénoménologie*, trad. P. Ricœur, Paris, Gallimard, 1950.
- KAUFMANN, A., *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, II, Paris, Masson, 1975.
- PARROCHIA, D., *Formes et systématiques philosophiques*, thèse dactylographiée, Université Lyon III, 1988.
- PARROCHIA, D., «Le philosophe automate», *Milieu*, 30, 1987.
- PARROCHIA, D., «Formalisation booléenne et intuitionniste de la logique hégélienne», *Folia philosophica*, Łódź, 1990.
- PAWLAK, Z., «Rough Sets», *International Journal of Computer and Information Sciences*, Vol.11, n°5, 1982.
- PONASSE, D., *Séminaire de mathématique floue (polycopié)*, Université Lyon 1, 1977-1978.
- PONASSE, D., CARRÉGA, J.-C., *Algèbre et topologie booléennes*, Paris, Masson, 1979.
- RASIOWA, H., *An algebraic approach of non classical logics*, North Holland, 1974.
- ZEITOUN, J., *Trames planes*, Paris, Dunod, 1977.