MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHAEL LUXENBURGER

Implications partielles dans un contexte

Mathématiques et sciences humaines, tome 113 (1991), p. 35-55
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__113__35_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Inf. Sci. hum., (29e année, n°113, *1991*, p.35-55).

IMPLICATIONS PARTIELLES DANS UN CONTEXTE

MICHAEL LUXENBURGER*

RÉSUMÉ - *Nous présentons une extension de la théorie des implications entre attributs binaires aux implications partielles. A partir de données expérimentales on s'intéresse non seulement aux implications (globales), mais aussi aux "implications avec quelques contre exemples". Les implications partielles offrent une possibilité d'extraire des informations supplémentaires. Elles permettent de "modéliser" la fréquence relative d'une implication, non-valide pour toutes les données, et donnent par conséquent plus d'information que les implications (globales). On caractérise dans le cadre mathématique de la théorie des treillis ces ensembles d'implications partielles qui proviennent de données. Puis on définit la cohérence d'un ensemble d'implications, ce qui permet d'un point de vue informatique d'explorer les implications partielles. Enfin on s'intéresse à la construction d'une famille minimale, une base d'implications partielles, dont on donne une borne supérieure du nombre d'éléments.*

SUMMARY - *Partial Implications of a Context*
We introduce a generalization of the theory of implications between attributes to partial implications. In data analysis the user is not only interested in (global) implications, but also in "implications with a few exceptions". Partial implications offer a possibility to represent these additional informations. They can model the relative frequency of implications which are not valid for the whole data. As a consequence they give more information about the data than just the (global) implications. We can characterize those sets of partial implications which arise from real data. This characterization gives us a possibility of an "exploration" of partial implications by computer. In this connection we are interested in a minimal representation and are searching for bases of partial implications.

I. CONTEXTES ET TREILLIS DE CONCEPTS

Une façon courante de représenter des connaissances consiste à établir des correspondances entre objets et attributs. Cette construction peut être formalisée dans le langage ensembliste. On dit qu'un triplet (G,M,I) est un *contexte*, où G et M sont

*Forschungsgruppe Begriffsanalyse (Arbeitsgruppe Allgemeine Algebra), Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt. Une grande partie de ce travail résulte d'un séjour de l'auteur à l'E.H.E.S.S (Paris), lors duquel il a bénéficié de l'hospitalité du Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, et qui a été financé par l'Office Allemand d'Echanges Universitaires (DAAD). Il tient a remercier spécialement M.Vincent Duquenne qui l'a assisté dans la rédaction de ce travail.

des ensembles et I une relation entre G et M ($I \subseteq G \times M$); les éléments de G (resp. M) s'appellent *objets* (resp. *attributs*), et gIm sera lu "l'objet g a l'attribut m". On définit

$$A^{\uparrow} := \{m \in M / gIm \text{ pour tout } g \in A\} \quad (A \subseteq G)$$
$$B^{\downarrow} := \{g \in G / gIm \text{ pour tout } m \in B\} \quad (B \subseteq M)$$

Les opérations $.^{\uparrow}: \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(M)$ et $.^{\downarrow}: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(G)$ forment une correspondance de Galois entre G et M et les opérations $.^{\uparrow\downarrow}: \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ avec $A \longmapsto A^{\uparrow} \longmapsto A^{\uparrow\downarrow}$ et $.^{\downarrow\uparrow}: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ avec $B \longmapsto B^{\downarrow} \longmapsto B^{\downarrow\uparrow}$ sont des fermetures de $\mathcal{P}(G)$ et $\mathcal{P}(M)$ (resp.). Mais dans la suite, on utilisera le même symbole $'$ pour les opérations $^{\uparrow}$ et $^{\downarrow}$, et $''$ au lieu de $^{\uparrow\downarrow}$ et $^{\downarrow\uparrow}$.
On appelle alors une paire (A,B) *concept* (du contexte (G,M,I)), si $A'=B$ et $B'=A$ (et $A \subseteq G$, $B \subseteq M$). A (resp. B) peuvent être entendus comme l'*extension* (resp. la *compréhension*) du concept (A,B). Alors les extensions et les compréhensions sont les ensembles fermés de $\mathcal{P}(G)$ et $\mathcal{P}(M)$ (resp.).
Enfin, la hiérarchie des concepts est donnée par

$$(A_1,B_1) \leq (A_2,B_2) :\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \quad (\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2).$$

L'ordre $\leq$ constitue un treillis complet sur l'ensemble $\mathcal{L}(G,M,I)$ des concepts du contexte (G,M,I). Il est noté $\mathcal{L}(G,M,I)$ et baptisé *treillis de concepts* (aussi treillis de Galois par Barbut[2]). (CF. Birkhoff[4], Barbut et Monjardet[3], Wille[7,8] pour consulter les résultats concernant les correspondances de Galois associées à un contexte, et le treillis de concepts). Les infimums et supremums sont décrits par

$$\bigwedge_{i \in I}(A_i,B_i) = (\bigcap_{i \in I} A_i, (\bigcap_{i \in I} A_i)')$$
$$\bigvee_{i \in I}(A_i,B_i) = ((\bigcap_{i \in I} B_i)', \bigcap_{i \in I} B_i)$$

Les implications entre parties des attributs sont définies comme suit: A implique B (noté par $A \longrightarrow B$) $:\Leftrightarrow A' \subseteq B'$ ($\Leftrightarrow B'' \subseteq A$)[5,6].

Rappellons que la fonction de Möbius μ_L d'un ensemble ordonné $(L,\leq)$ est la fonction $\mu_L : L \times L \longrightarrow \mathbf{Z}$, déterminée de façon unique par $\mu_L(x,x)=1$ et $\mu_L(x,y) = -\sum_{x<z\leq y} \mu_L(z,y)$ $(x<y)$ [1]. L'ensemble des éléments sup-irréductibles (inf-irréductibles) d'un treillis $(L,\leq)$ est noté J(L) (resp. M(L)), et $l \succ m$ signifie que l est un voisin supérieur de m dans L (l couvre m).

II. IMPLICATIONS PARTIELLES

II.1. *Définition*

Souvent, les tableaux de données (c'est-à-dire ici des contextes) sont très larges et les treillis de concepts correspondants sont "trop grands", car ils gardent toute l'information contenue dans les données.

Dans ce cas -mais pas uniquement- on s'intéresse aux implications (et dépendances) partielles, qui sont des implications (et dépendances) valides dans un sous-contexte (H,M,J), où $H \subseteq G$ et $J=(H \times M) \cap I$. Si $H=G$, on obtient les implications "globales". Pour établir une notion appropriée de précision d'une implication partielle, les cardinaux des extensions des concepts sont importants. Avec la notation

$$[B] := |B'| \quad (B \subseteq M)$$

$[B]$ est le nombre d'objets $g \in G$, qui ont tous les attributs $m \in B$, et la valeur

$$P(B) := \frac{[B]}{[\emptyset]} = \frac{|B'|}{|G|}$$

donne la fréquence relative d'avoir tous les attributs $m \in B$. Avec

$$P(B_2|B_1) := \begin{cases} \dfrac{[B_1 \cup B_2]}{[B_1]} & \text{si } [B_1] \neq 0 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

on peut définir une sorte de proportion conditionnelle. On utilisera parfois la notation $[(B'.B)] := [B]$ pour $(B'.B) \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$.
Les *implications partielles* sont alors des triplets (B_1, B_2, p), où B_1, B_2 sont des parties de M et $p = P(B_2|B_1)$ est la *précision* de l'implication partielle. Une implication partielle est notée $B_1 \xrightarrow{p} B_2$.

DEFINITION. $\mathcal{I}(\mathcal{B}(\mathbb{K})) := \{A \xrightarrow{p} B / A, B \subseteq M,\ p = P(B|A)\}$ est l'ensemble des *implications partielles* de $\mathcal{B}(\mathbb{K})$.

II.2. *Propriétés des implications partielles*
On peut établir une valuation v des arêtes du treillis de concepts correspondant avec $v((B_1'.B_1).(B_2'.B_2)) := P(B_1|B_2)$ pour des compréhensions $B_1 \supset B_2$.

Dans le diagramme de Hasse, on peut écrire les précisions sur les arcs (voir les Figures 1 et 2). On a alors

PROPOSITION 1. ("transitivité" et "commutativité" des précisions dans le diagramme): Soient $M_1, M_2, M_3, M_4 \subseteq M$ des compréhensions avec $M_1 \subseteq M_2$, $M_1 \subseteq M_3$ et $M_2 \subseteq M_4$. $M_3 \subseteq M_4$. Alors $P(M_2|M_1) * P(M_4|M_2) = P(M_4|M_1) = P(M_3|M_1) * P(M_4|M_3)$.

Démonstration:
(i): $[M_1]=0$: Alors $[M_2]=[M_3]=[M_4]=0$, donc $P(M_2|M_1) * P(M_4|M_2) = 1 = P(M_4|M_1)$.
(ii): $[M_1] \neq 0$, $[M_2]=0$: Alors $[M_4]=0$, $[M_1 \cup M_4]=0$, $[M_2 \cup M_4]=0$, donc
$P(M_2|M_1) * P(M_4|M_2) = P(M_2|M_1) * 0 = 0 = P(M_4|M_1)$.
(iii): $[M_1] \neq 0 \neq [M_2]$: $P(M_2|M_1) * P(M_4|M_2) = \dfrac{[M_1 \cup M_2]}{[M_1]} * \dfrac{[M_2 \cup M_4]}{[M_2]} =$

$$\overset{M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_4}{=} \frac{[M_2]}{[M_1]} * \frac{[M_1 \cup M_4]}{[M_2]} = \frac{[M_1 \cup M_4]}{[M_1]} = P(M_4|M_1).$$

Dans un diagramme de Hasse, on n'indique que les traits reliant les éléments adjacents dans la relation d'ordre et non ceux qui s'en déduisent par transitivité. La Proposition 1 montre, que les précisions de ces dernières sont aussi "superflues".

Remarque. On n'a pas la transitivité usuelle pour les précisions des implications partielles, c'est-à-dire que:

$A \xrightarrow{p} B,\ B \xrightarrow{q} C,\ A \xrightarrow{r} C \Rightarrow p*q=r$ n'est pas toujours vrai.

Contre exemple: $H:=\{(1,i)/i=1,\dots,5\}\cup\{(2,i)/i=1,\dots 95\}$, $M:=\{a,b,c\}$, $(j,i)Ja:\Leftrightarrow j=1$, $(j,i)Jb$ pour tout $(j,i)\in H$, $(j,i)Jc:\Leftrightarrow j=2$. Alors $\{a\}\xrightarrow{1}\{b\}$, $\{b\}\xrightarrow{0,95}\{c\}$, mais $\{a\}\xrightarrow{0}\{c\}$ (voir Figure 1).

	a	b	c
(1,1),...,(1,5)	X	X	
(2.1),...,(2,95)		X	X

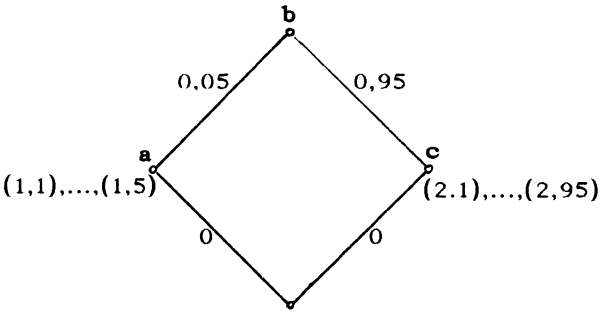


Figure 1. $\mathbb{K}=(H,M,J)$ et le diagramme de Hasse de $\underline{\mathcal{B}}(H,M,J)$ et la valuation avec les précisions des implications partielles.

Il y a aussi des exemples où $p*q>r$: soit $M:=\{a,b,c\}$, $G=\{1,\dots,14\}$, $gIa:\Leftrightarrow g\in\{1,\dots,9\}$, $gIb:\Leftrightarrow g\in\{1,4,5,\dots,12\}$, $gIc:\Leftrightarrow g\in\{1,3,11,12,13\}$. Alors $\{a\}\xrightarrow{7/9}\{b\}$, $\{b\}\xrightarrow{3/10}\{c\}$, $\{a\}\xrightarrow{2/9}\{c\}$ dans (G,M,I) (voir Figure 2).

	a	b	c
1	X	X	X
2	X		
10		X	
13			X
4.5.6,7,8.9	X	X	
3	X		X
11.12		X	X
14			

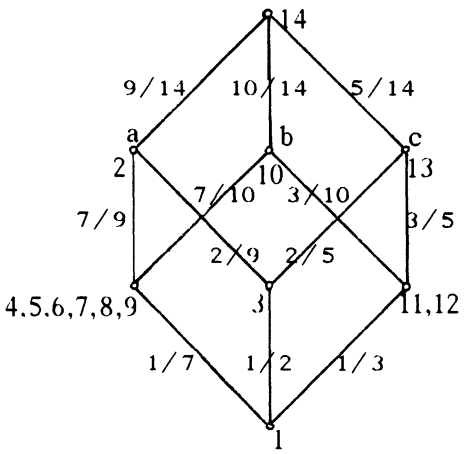


Figure 2. $\mathbb{K}=(G,M,I)$ et le diagramme de Hasse de $\underline{\mathcal{B}}(G,M,I)$ et la valuation avec les précisions des implications partielles.

Les précisions des implications partielles obéissent à d'autres "règles" que la commutativité et la transitivité (dans le diagramme):

PROPOSITION 2.

(i): Soient $A\subseteq B$ des compréhensions avec $P(B|A)=0$. Alors $B=M$.

(ii): $\sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} P(B|A)*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A))\geq 0$ pour toute compréhension A, où $\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}$ est la fonction de Möbius du treillis $\mathcal{L}(\mathbb{K})$.

(iii): Soient $A,B\subseteq M$ des compréhensions.
Alors $1-P(A|A\cap B)-P(B|A\cap B)+P(A|A\cap B)*P((A\cup B)''|A)\geq 0$.

Démonstration: (i): $P(B|A)=0$ veut dire $[B]=0$, alors $B'=\emptyset$, alors $B=B''=\emptyset'=M$.

(ii): $0\leq |A'|=\sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} [B]\ *\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A))$.

$$[A]\neq 0\Rightarrow\ 0\leq \sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} \frac{[B]}{[A]}*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A)) = \sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} P(B|A)*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A)).$$

$[A]=0\Rightarrow$ $P(B|A)=1$ pour tout $B=B''\supseteq A$. Alors $\sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} P(B|A)*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A)) =$

$$=\sum_{\{B\subseteq M/B=B''\supseteq A\}} \mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}((B',B),(A',A)) = \begin{cases} 0 & \text{si } A\subset M \\ 1 & \text{si } A=M \end{cases}.$$

(iii): soient $[A\cap B]=n_0+n_1+n_2+n_3$, $[A]=n_0+n_2$, $[B]=n_0+n_1$, $[(A\cup B)'']=n_0$ avec $n_0,n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}$. C'est-à-dire que $n_0=[(A\cup B)'']$ représente le nombre d'objets qui ont les attributs $(A\cup B)''$, $n_2=[A]-[(A\cup B)'']$, $n_1=[B]-[(A\cup B)'']$, $n_3=[A\cap B]-[A]-[B]+[(A\cup B)'']$. On a $0\leq(n_0+n_1+n_2+n_3)-(n_0+n_2)-(n_0+n_1)+n_0$.

(I): $n_0+n_1+n_2+n_3=0$ ($\Rightarrow$ $n_0=n_1=n_2=n_3=0$). Alors
$1-P(A|A\cap B)-P(B|A\cap B)+P(A|A\cap B)*P((A\cup B)''|A)=1-1-1+1*1\geq 0$ et on obtient l'affirmation.

(II): $n_0+n_1+n_2+n_3\neq 0$: on peut diviser l'inégalité par $n_0+n_1+n_2+n_3$ et on obtient

$$0\leq 1-\frac{n_0+n_1}{n_0+n_1+n_2+n_3}-\frac{n_0+n_2}{n_0+n_1+n_2+n_3}+\frac{n_0}{n_0+n_1+n_2+n_3}=$$

$$=1-P(B|A\cap B)-P(A|A\cap B)+P((A\cup B)''|A\cap B)=1-P(B|A\cap B)-P(A|A\cap B)+P(A|A\cap B)*P((A\cup B)''|A).$$

Remarque: les implications sont des implications partielles avec la précision 1: $A\longrightarrow B:\Leftrightarrow A'\subseteq B'\Leftrightarrow A'\subseteq A'\cap B'\Leftrightarrow A'\subseteq(A\cup B)'\Leftrightarrow A'=(A\cup B)'\Leftrightarrow[A]=[A\cup B]\Leftrightarrow$ $P(B|A)=1$.

Si on a $P(A|A\cap B)=1$, on obtient $1-1+P(A|A\cap B)*[P((A\cup B)''|A)-1]\geq 0$ avec la Proposition 2(iii), donc $P((A\cup B)''|A)=1$ (même si $P(A|A\cap B)=0$, puisque ça entraîne $A=M$ (2(i)) et puis $(A\cup B)''=A$). De plus, on a $A\xrightarrow{1}B$, $B\xrightarrow{1}C$ $\Rightarrow$ $A\xrightarrow{1}C$. C'est-à-dire qu'on obtient toutes les règles pour les implications globales comme un cas particulier. De plus, $P(B|A)=P(C\cup B|A)$ pour tout $C\subseteq A$, alors $A\xrightarrow{p}B$ $\Leftrightarrow$ $A\xrightarrow{p}C\cup B$ pour tout $C\subseteq A$. En particulier $A\xrightarrow{p}B$ $\Leftrightarrow$ $A\xrightarrow{p}A\cup B$, donc si on connait les implications partielles $A\xrightarrow{p}B$, où $A\subseteq B$, on connait toutes les implications partielles. C'est la raison pour laquelle on se restreint aux implications partielles $A\xrightarrow{p}B$ avec $A\subseteq B$.

II.3. *Cohérance d'un ensemble d'implications partielles*

Avant de chercher des bases d'implications partielles, on s'attaquera à une autre question: A quelles conditions est un système $\mathcal{J}\subseteq\{K\xrightarrow{p}L/K\subset L\subseteq M,\ p\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$

cohérent, c'est-à-dire qu'il existe un contexte $\mathbb{K}$ avec $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}(\mathcal{B}(\mathbb{K}))$? On dira également que ce système est réalisable.

DEFINITION.

a) Une *réalisation* d'un ensemble $\mathcal{J}\subseteq\{K\xrightarrow{p}L/K\subset L\subseteq M,\ p\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$ est un contexte $\mathbb{K}=(G,M,I)$ avec $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}(\mathcal{B}(\mathbb{K}))$ $(\Leftrightarrow(K\xrightarrow{p}L\in\mathcal{J}\Rightarrow P(L|K)=p$ dans $\mathbb{K}))$.

b) Deux réalisations (G,M,I), (H,M,J) seront dites *équivalentes*, si

$\mathcal{J}(\mathcal{B}(G,M,I))=\mathcal{J}(\mathcal{B}(H,M,J))$, c'est-à-dire si $\dfrac{|B^I|}{|B^J|}:=\dfrac{|\{g\in G/gIb \text{ pour tout } b\in B\}|}{|\{g\in H/gJb \text{ pour tout } b\in B\}|}$ est

constant pour n'importe quel $B\subseteq M$. Alors il existe $p,q\in\mathbb{N}$ tel que $p|B^I|=q|B^J|$.

Par exemple, le contexte (G,M,I) avec $M:=\{a,b,c\}$, $G:=\{(1,i)/i=1,2\}\cup\{(2,i)/i=1,\dots,38\}$, $(j,i)Ja:\Leftrightarrow j=1$, $(j,i)Jb$ pour tout $(j,i)\in G$, $(j,i)Jc:\Leftrightarrow j=2$ est équivalente à celui de la Figure 1.

Le Théorème suivant va caractériser les ensembles cohérants d'implications qui proviennent de données, c'est-à-dire ceux qui sont une partie des implications partielles d'un contexte pertinent.

THEOREME 3. Un ensemble $\mathcal{J}\subseteq\{K\xrightarrow{p}L\ /K\subset L\subseteq M,\ p\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$ est réalisable si et seulement si on peut résoudre le système de conditions suivant pour les variables p_L^K, où $p_L^K\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $K\subset L\subseteq M$:

(i) $\displaystyle\sum_{\{N\subseteq M/N\supseteq O\}} p_N^O*(-1)^{|N\setminus O|}\geq 0$ pour tout $O\subseteq M$.

(ii) $p_L^K=0 \Rightarrow p_N^L=1$ pour tout $K\subseteq L\subseteq N\subseteq M$

(iii) $p_L^O=p_K^O*p_L^K$ pour tout $O\subseteq K\subseteq L\subseteq M$

(iv) $p_L^K=p$ si $K\xrightarrow{p}L\in\mathcal{J}$

On utilise la notation p_L^K et non pas $p(L|K)$, afin qu'on ne puisse pas confondre les variables p_L^K et les fréquences relatives $P(L|K)$.
Les conditions (i)-(iii) sont des conditions forcées par les Propositions 1 et 2. Le Théorème montre que ce sont les conditions caractéristiques des implications partielles.

Démonstration: soit $\mathbb{K}$ une réalisation de $\mathcal{J}$. On montrera que cette réalisation remplit les conditions (i)-(iv). Définissons $p_L^K:=P(L|K)$. Alors on a (iv).
(iii) est une conséquence de la Proposition 1 et de $p_L^K=p_{L''}^{K''}$.
Soit $p_L^K=p_{L''}^{K''}=0$, alors $L''=M$ à cause de la Proposition 2(i). Puis $p_N^L=p_{N''}^{L''}=P(N''|L'')=P(M|M)=1$, alors (ii).

$$n(N):=\begin{cases}0 & \text{si } N\neq N''\\ |\{g\in G/\{g\}'=N\}| & \text{si } N=N''\end{cases},\quad [N]:=\sum_{M\supseteq K\supseteq N} n(K)$$

$$0\leq n(O)=\sum_{M\supseteq N\supseteq O}[N]\,\mu_{\mathcal{B}(M,M,\neq)}((M\setminus N,N),(M\setminus O,O))=\sum_{M\supseteq N\supseteq O}[N](-1)^{|N\setminus O|}.$$

On obtient l'affirmation (i) avec une démonstration pour chaque cas ([O]=0, [O]≠0) comme dans la preuve de la Proposition 2 . Ceci achève une direction de la démonstration. Soit $\{p_L^K / K \subset L \subseteq M\}$ une solution du système de conditions. On va construire un contexte $\mathbb{K}$ avec $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$.

$$q_L^{\emptyset} := \begin{cases} 1, \text{ si } p_L^{\emptyset}=0 \\ \min\{p \in \mathbb{N} / \ p * p_L^{\emptyset} \in \mathbb{N}\} \quad \text{si } p_L^{\emptyset} \neq 0 \end{cases} \quad (L \subseteq M) \ . \ z := \text{P.P.C.M.}\{q_L^{\emptyset} / L \subseteq M\}.$$

$n(L) := z * p_L^{\emptyset} \in \mathbb{N}$ $(L \subseteq M)$ sera le nombre d'objets du contexte $\mathbb{K}$ qui auront les attributs L (et peut-être d'autres attributs en plus), et

$$k(L) := \sum_{M \supseteq K \supseteq L} n(K) \mu_{(M,M,\neq)}((M \setminus K, K),(M \setminus L, L)) = \sum_{M \supseteq K \supseteq L} n(K)(-1)^{|L \setminus K|} \quad (L \subseteq M)$$ sera le nombre d'objets qui auront exactement les attributs L (et pas d'autres attributs). Alors on a $k(L) \geq 0$ à cause de la condition (i) et $k(L) \in \mathbb{N}$, car $n(K) \in \mathbb{N}$.

$G_N := \{N_1, \ldots, N_{k(N)}\}$, $G := \bigcup_{N \subseteq M} G_N$, $N_j I m :\Leftrightarrow m \in N$ pour $N_j \in G$, $m \in M$ (voir l'exemple à la fin de la démonstration et Figure 3).

Il reste à montrer: $K \xrightarrow{p} L \in \mathcal{J} \Rightarrow p = P(L|K)$ dans (G,M,I).

Soit $K \xrightarrow{p} L \in \mathcal{J}$. Si $n(K) \neq 0 (\Rightarrow p_K^{\emptyset} \neq 0)$, $P(L|K) = \frac{n(L)}{n(K)} = \frac{z * p_L^{\emptyset}}{z * p_K^{\emptyset}} \overset{(iii)}{=} p_L^K \overset{(iv)}{=} p$.

Si $n(K)=0$, on a $P(L|K)=1$ et $p_K^{\emptyset}=0$, puis $p_L^K \overset{(ii)}{=} 1 = p$.

Ceci achève la démonstration.

Exemple: Considérons les attributs $M=\{a,b,c\}$ et $\mathcal{J}=\{\emptyset \xrightarrow{2/3} \{a\}, \emptyset \xrightarrow{2/3} \{b\}, \{a,b\} \xrightarrow{1/3} \{a,b,c\}, \{b\} \xrightarrow{2/3} \{b,c\}\}$. Une solution du système de conditions est obtenue par une modification de la méthode du simplexe.

K \ L: p_L^K	$\emptyset$	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
$\emptyset$	1	2/3	2/3	4/9	1/3	1/9	4/9	1/9
{a}	-	1	1/2	1/6	1/2	1/6	1/6	1/6
{b}	-	1/2	1	2/3	1/2	1/6	2/3	1/6
{c}	-	1/4	1	1	1/4	1/4	1	1/4
{a,b}	-	-	-	-	1	1/3	1/3	1/3
{a,c}	-	-	-	-	1	1	1	1
{b,c}	-	-	-	-	1/4	1/4	1	1/4
{a,b,c}	-	-	-	-	-	-	-	1

et on obtient

L	$\emptyset$	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
$q_L^{\emptyset}$	1	3	3	9	3	9	9	9
n(L)	9	6	6	4	3	1	4	1
k(L)	0	3	0	0	2	0	3	1

$\Rightarrow z=9$

Donc $G=\{\{a\}_1,\{a\}_2,\{a\}_3,\{a,b\}_1,\{a,b\}_2,\{b,c\}_1,\{b,c\}_2,\{b,c\}_3,\{a,b,c\}_1\}$. On a alors construit une réalisation de $\mathfrak{J}$ (voir Figure 3).

	a	b	c
$\{a\}_1,\{a\}_2,\{a\}_3$	X		
$\{a,b\}_1,\{a,b\}_2$	X	X	
$\{b,c\}_1,\{b,c\}_2,\{b,c\}_3$		X	X
$\{a,b,c\}_1$	X	X	X

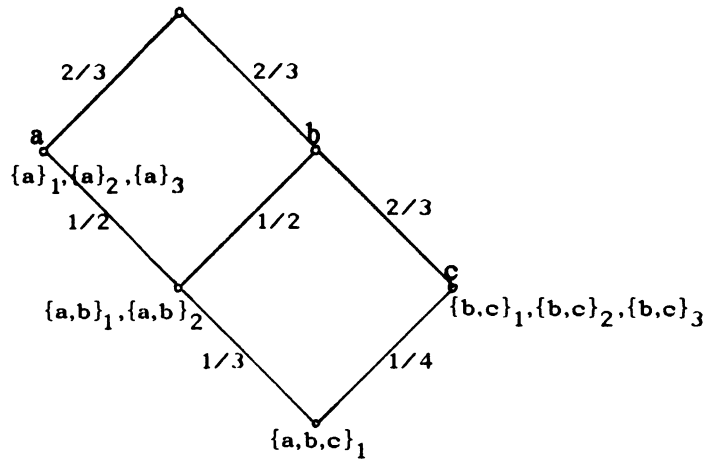


Figure 3. Une réalisation (G,M,I) de
$\mathfrak{J}=\{\emptyset \xrightarrow{2/3} \{a\}, \emptyset \xrightarrow{2/3} \{b\}, \{a,b\} \xrightarrow{1/3} \{a,b,c\}, \{b\} \xrightarrow{2/3} \{b,c\}\}$ et un diagramme de Hasse de $\mathcal{L}(G,M,I)$ et la valuation avec $\mathfrak{J}(\mathcal{L}(G,M,I))\supseteq\mathfrak{J}$.

Le Théorème 3 donne une possibilité "d'explorer" de façon conversationnelle les implications partielles d'un ensemble M d'attributs. L'ordinateur demande la fréquence relative d'une implication partielle et l'expert la donne (s'il peut) ou la laisse de côté et donne la réponse plus tard (si c'est encore nécessaire). L'ordinateur peut déterminer d'autres précisions avec le système de conditions du Théorème 3 et pose seulement les questions non superflues.
Il suffit de munir l'ensemble Imp des implications partielles d'un ordre total (par exemple l'ordre lexicographique sur les prémisses et les conclusions).
Une ébauche d'un algorithme serait alors:

(I) $\mathfrak{J}\Leftarrow\emptyset$

(II) calculer la limite inférieure l_i et la limite supérieure l^s de la précision p de la première implication partielle $P \xrightarrow{p} C \in \mathrm{Imp}\setminus\mathfrak{J}$.

(III) demander la précision $p\in[l_i,l^s]$ de l'implication partielle $P \xrightarrow{p} C$.

(IV) $\mathfrak{J}\Leftarrow\mathfrak{J}\cup\{$implications partielles qu'on peut déduire de $\mathfrak{J}$ avec les conditions (i)-(iii) du Théorème 3$\}$.

(V) Si Imp=$\mathfrak{J}$, fin: $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des implications partielles de l'ensemble M d'attributs; sinon, continuer en (II).

Malheureusement il est très couteux (en temps) de calculer les implications partielles qu'on peut déduire de $\mathfrak{J}$.

III. BASES D'IMPLICATIONS PARTIELLES

Dans la suite on essaie de trouver un système minimal de générateurs des implications partielles d'un contexte à partir duquel on peut calculer toutes les autres implications partielles d'une manière rapide et simple. Dans [5], l'auteur a résolu ce problème

pour les implications (globales). C'est la raison pour laquelle on se restreint aux implications partielles propres, qui ont une précision $p<1$. Si on a une base des implications globales et une base d'implications partielles propres, on a aussi une base pour toutes les implications partielles (c'est l'union de les deux bases).
Par définition de $[B]$ et à cause de $B'=B'''$ on a $[B'']=[B]$ et $B_1 \xrightarrow{p} B_2 \Leftrightarrow B_1'' \xrightarrow{p} B_2''$.
Ceci entraîne que les précisions des implications partielles propres avec une "prémisse" ou une "conclusion" qui ne sont pas des compréhensions, sont "superflues".
Donc on va se restreindre aux implications partielles propres $A \xrightarrow{p} B$ où A et B sont des compréhensions et $A \subset B$.

III.1. *Définitions*
$\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K})) := \{K \xrightarrow{p} L / K \subset L$ sont des compréhensions de $\mathcal{L}(\mathbb{K})\}$ s'appellera l'ensemble des *implications partielles propres.*

Evidemment, on a $A \xrightarrow{p} B \in \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K})) \Rightarrow p<1$, car $[B]<[A]$. Par contre, si $P(B|A)<1$ on a $A'' \xrightarrow{p} (A \cup B)'' \in \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$.

On dit qu'on peut *conclure* une implication partielle $K \xrightarrow{p} L$ de $\mathcal{J}$ (noté $\mathcal{J} \vdash K \xrightarrow{p} L$), si on ne peut résoudre le système de conditions du Théorème 3 que pour la valeur $p_L^K = p$.

Un ensemble $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$ d'implications partielles propres est un *système de générateurs* de $\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$, si $\mathcal{J} \vdash \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$.
Un système de générateurs $\mathcal{J}$ est une *base*, si $\mathcal{J}$ est minimal avec cette propriété.

COROLLAIRE 4. $\mathcal{J} \vdash K \xrightarrow{p} L \Leftrightarrow$ chaque réalisation de $\mathcal{J}$ est une réalisation de $\mathcal{J} \cup \{K \xrightarrow{p} L\} \Leftrightarrow: \mathcal{J} \models K \xrightarrow{p} L$.
La démonstration résulte du Théorème 3 .

C'est-à-dire que chaque modèle (i.e. contexte) de $\mathcal{J}$ est aussi un modèle de $\mathcal{J} \cup \{K \xrightarrow{p} L\}$.

Dans la suite on introduit le graphe $Gr(\mathcal{J})$ pour $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$, qui est défini comme suit:

DEFINITION . Pour $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$, $Gr(\mathcal{J}) := (X,U)$, où $X := \{N \subseteq M / N$ compréhension de $\mathcal{L}(\mathbb{K})\}$, $U := \{(K,L) \in X \times X / K \xrightarrow{p} L \in \mathcal{J}$ ou $L \xrightarrow{p} K \in \mathcal{J}$ pour un $p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$.

Alors $Gr(\mathcal{J})$ est isomorphe à un sous-graphe du graphe de comparabilité de $\mathcal{L}(\mathbb{K})$.

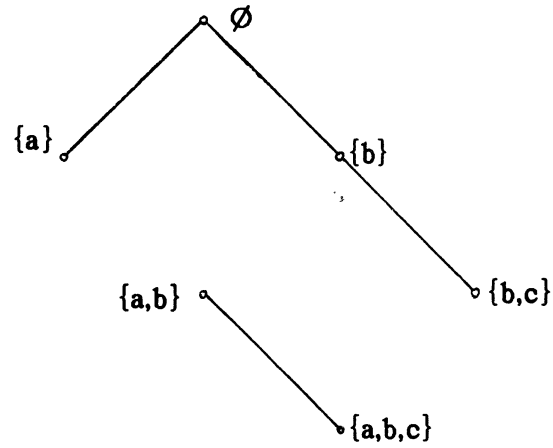


Figure 4. $Gr(\{\emptyset \xrightarrow{2/3} \{a\}, \emptyset \xrightarrow{2/3} \{b\}, \{a,b\} \xrightarrow{1/3} \{a,b,c\}, \{b\} \xrightarrow{2/3} \{b,c\}\})$ (voir aussi Figure 3).

PROPOSITION 5. Soit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K}))$. S'il y a un cycle dans $Gr(\mathcal{J})$, il existe une implication partielle $i \in \mathcal{J}$ avec $\mathcal{J} \setminus \{i\} \models i$.

Démonstration: soit $\{M_0, \ldots, M_k\}$ un cycle dans $Gr(\mathcal{J})$ $(k \geq 2)$. C'est-à-dire que $M_0, \ldots, M_k$ sont des compréhensions de $\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K})$ avec $M_i \xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}} M_{i\oplus 1} \in \mathcal{J}$ ou $M_{i\oplus 1} \xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}} M_i \in \mathcal{J}$ pour $i=0,\ldots,k$ $(a \oplus b := a+b \bmod (k+1))$.

(i): $p^i_{i\oplus 1} = 0$ pour un $i \in \{0,\ldots,k\}$. Soit $M_i \xrightarrow{0} M_{i\oplus 1} \in \mathcal{J}$ (sans perte de généralité), alors $M_{i\oplus 1} = M$ à cause de la Proposition 2(i). Puis $M_{i\oplus 2} \xrightarrow{0} M_{i\oplus 1} \in \mathcal{J}$ ($M_{i\oplus 1} = M$ ne peut pas être une prémisse), et alors $\mathcal{J} \setminus \{M_{i\oplus 2} \xrightarrow{0} M_{i\oplus 1}\} \models \{M_{i\oplus 2} \xrightarrow{0} M_{i\oplus 1}\}$.

(ii): $p^i_{i\oplus 1} \neq 0$ pour tout $i \in \{0,\ldots,k\}$. Soit $M_0 \xrightarrow{p^0_k} M_k \in \mathcal{J}$ (sans perte de généralité) et

$$p_i := \begin{cases} p^i_{i\oplus 1} & \text{si } M_i \xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}} M_{i\oplus 1} \in \mathcal{J} \\ 1/p^i_{i\oplus 1} & \text{si } M_{i\oplus 1} \xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}} M_i \in \mathcal{J} \end{cases} \qquad i \in \{0,\ldots,k-1\}. \text{ Alors}$$

$\mathcal{J} \setminus \{M_0 \xrightarrow{p^0_k} M_k\} \models \{M_0 \xrightarrow{p^0_k} M_k\}$, parce que $\frac{[M_{i+1}]}{[M_i]} \neq 0$ pour tout $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ et $\frac{[M_k]}{[M_0]} = \frac{[M_1]}{[M_0]} * \ldots * \frac{[M_k]}{[M_{k-1}]} = \prod_{i=0}^{k-1} p_i$ est constant pour chaque réalisation de $\mathcal{J} \setminus \{M_0 \xrightarrow{p^0_k} M_k\}$.

III.2. *Propriétés des bases d'implications partielles*

COROLLAIRE 6. Soit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K}))$ une base de $\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K}))$. Alors $|\mathcal{J}| \leq |\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K})| - 1$.

Démonstration: si $|\mathcal{J}| \geq |\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K})|$, il y a un cycle dans $Gr(\mathcal{J})$. A cause de la Proposition 5, il existe une implication partielle $i \in \mathcal{J}$ avec $\mathcal{J} \setminus \{i\} \models i$, donc $\mathcal{J}$ n'est pas minimal.

PROPOSITION 7. $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K}))$ est un ensemble générateur, si
(i) $Gr(\mathcal{J})$ contient un arbre maximal
(ii) M est la conclusion d'une seule implication partielle appartenant à $\mathcal{J}$.

Démonstration: si $Gr(\mathcal{J})$ contient un arbre maximal, il y a pour chaque $K\subset L\subseteq M$ un "chemin" $K=M_0,M_1,\dots,M_n=L$ avec $M_i\xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}}M_{i\oplus 1}\in\mathcal{J}$ ou $M_{i+1}\xrightarrow{p^i_{i\oplus 1}}M_i\in\mathcal{J}$ $(i=0,\dots,n-1)$.
Puisque M est la prémisse d'une seule implication partielle appartenant à $\mathcal{J}$, on a $M_i\neq M$ pour $i=0,\dots,n-1$. Alors au plus $p^{n-1}_n=0$. Si $p^{n-1}_n=0$ on a $P(L|K)=0$, et si $p^{n-1}_n\neq 0$, on a $P(L|K)=\prod_{i=0}^{n-1} p_i$ avec p_i comme dans le cas II de la preuve de la Proposition 5. C'est-à-dire qu'on peut calculer $P(L|K)$. La deuxième partie est nécessaire: un ensemble $\mathcal{J}$ tel que $Gr(\mathcal{J})$ soit connexe n'est pas nécessairement un ensemble générateur:
Soit $\mathbb{K}:=(\{a,b\},\{a,b\},\neq)$ et $\mathcal{J}=\{\emptyset\xrightarrow{1/2}\{a\},\{a\}\xrightarrow{0}\{a,b\},\{b\}\xrightarrow{0}\{a,b\}\}$. Alors $Gr(\mathcal{J})$ est un arbre maximal, mais $\mathcal{J}$ n'est pas un ensemble générateur, puisqu'on ne peut pas conclure la précision p de l'implication partielle $\emptyset\xrightarrow{p}\{b\}$ (voir Figure 5).

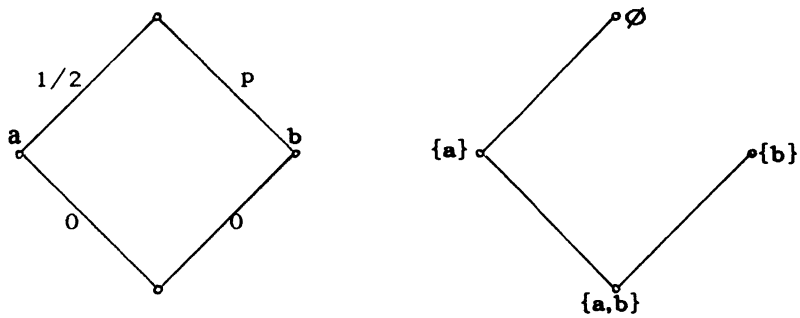


Figure 5. $\underline{\mathcal{L}}(\{a,b\},\{a,b\},\neq)$ et la valuation avec $\mathcal{J}=\{\emptyset\xrightarrow{1/2}\{a\},\{a\}\xrightarrow{0}\{a,b\},\{b\}\xrightarrow{0}\{a,b\}\}$ et $Gr(\mathcal{J})$.

Ils existent des bases $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K}))$ avec $|\mathcal{J}|<|\underline{\mathcal{L}}(\mathbb{K})|-1$:
soit $G=\{1,\dots,4\}$, $M=\{a,b,c\}$, $gIa:\Leftrightarrow g\in\{1,\dots,3\}$, $gIb:\Leftrightarrow g\in\{2,3,4\}$, $gIc:\Leftrightarrow\{3,4\}$ et $\mathcal{J}=\{\emptyset\xrightarrow{3/4}\{a\},\emptyset\xrightarrow{3/4}\{b\},\{a,b\}\xrightarrow{1/2}\{a,b,c\},\{b\}\xrightarrow{2/3}\{b,c\}\}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{L}}(G,M,I))$.
A cause de la Proposition 2(iii) (ou à cause de la condition (i) du Théorème 3 avec $O=\emptyset$ et $O=\{a\}$), on a

$0\leq 1-p^{\emptyset}_{\{a\}}-p^{\emptyset}_{\{b\}}+p^{\emptyset}_{\{b\}}*p^{\{b\}}_{\{a,b\}}=1-3/4-3/4+3/4*p^{\{b\}}_{\{a,b\}}=1/4*(3*p^{\{b\}}_{\{a,b\}}-2)$, donc $p^{\{b\}}_{\{a,b\}}\geq 2/3$,

et $0\leq 1-p^{\{b\}}_{\{a,b\}}-p^{\{b\}}_{\{b,c\}}+p^{\{b\}}_{\{a,b\}}*p^{\{a,b\}}_{\{a,b,c\}}=1-p^{\{b\}}_{\{a,b\}}-2/3+p^{\{b\}}_{\{a,b\}}*1/2=1/3-1/2*p^{\{b\}}_{\{a,b\}}$, donc $p^{\{b\}}_{\{a,b\}}\leq 2/3$.

Une réalisation est donc possible seulement pour $p^{\{b\}}_{\{a,b\}}=2/3$.

Alors $\mathcal{J}\vdash\{b\}\xrightarrow{2/3}\{a,b\}$, et $\mathcal{J}\cup\{\{b\}\xrightarrow{2/3}\{a,b\}\}$ est un système de générateurs, car $Gr(\mathcal{J}\cup\{\{b\}\xrightarrow{2/3}\{a,b\}\})$ est un arbre maximal (voir Figure 6).

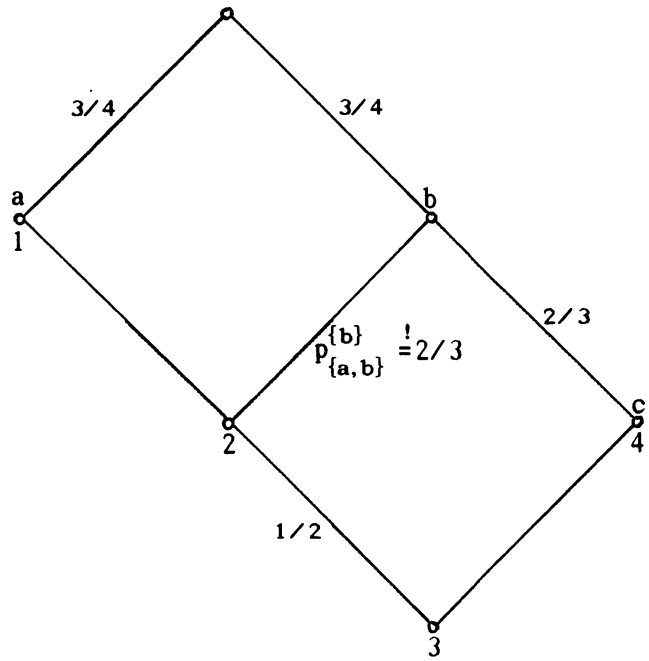


Figure 6. $\mathcal{L}(\{1,\dots,4\},\{a,b,c\},I)$ et la valuation avec
$\mathfrak{J}=\{\emptyset \xrightarrow{3/4} \{a\}, \emptyset \xrightarrow{3/4} \{b\}, \{a,b\} \xrightarrow{1/2} \{a,b,c\}, \{b\} \xrightarrow{2/3} \{b,c\}\}$.

Donc, on peut "calculer" quelques précisions de plus, dans certains cas. Mais la Proposition suivante montrera que la borne $|\mathcal{L}(\mathbb{K})|-1$ est "précise".

PROPOSITION 8. Soit L un treillis fini quelconque. Alors il y a un contexte $\mathbb{K}$ avec $L \cong \mathcal{L}(\mathbb{K})$ tel que toutes les bases $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$ des implications partielles propres ont pour cardinal $|L|-1$.

Démonstration: pour $k \in L$ définissons $n(k) := 2|L|^{2h(k)}$, où $h(k)$ est la hauteur de k dans L (c'est-à-dire le nombre des éléments d'une chaîne maximale entre k et 0_L). On pose $G_k := \{k_1,\dots,k_{n(k)}\}$, $G := \bigcup_{k \in L} G_k$, $M := L$, $k_j I_1 m :\Leftrightarrow k \le m$. Alors $L \cong \mathcal{L}(\mathbb{K}_1)$ avec $\mathbb{K}_1 := (G,M,I_1)$.

Supposons qu'il existe une base $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}_1))$ avec $|\mathfrak{J}| \le |L|-2$. Alors il y a au moins 2 composantes connexes Z_1, Z_2 dans $Gr(\mathfrak{J})$. On choisit sans perte de généralité Z_1, Z_2 tels qu'existent $M_1 \in Z_1$, $M_2 \in Z_2$ avec $M_1 \subseteq M_2$. Dans la suite on va construire une deuxième réalisation $\mathbb{K}_2$ de $\mathfrak{J}$ qui n'est pas équivalente à $\mathbb{K}_1$.

Définissons $$m(k) := \begin{cases} 2n(k) + \sum_{r<k} (2n(r) - m(r)) & \text{si } k \in Z_1 \\ n(k) + \sum_{r<k} (n(r) - m(r)) & \text{si } k \notin Z_1 \end{cases}$$

Alors $1/2 * n(k) \le m(k) \le 3n(k)$: Démonstration par récurrence:
$h(k_i)=0$: $m(k) \in \{n(k), 2n(k)\}$.
$h(k_i)=h+1$: $1/2 * n(k_i) \le n(k_i)(1-\frac{1}{2|L|}) \le (2|L|)^{2(h+1)}(1-\frac{2|L|}{(2|L|)^2}) = n(k_i) - 2|L|(2|L|)^{2h} \le$

$$\le n(k_i) - |L| \max\{n(k)/k<k_i\}(3-1) \le n(k_i) - \sum_{r<k_i} 2n(r) = n(k_i) + \sum_{r<k_i} -2n(r) \le$$

$$\overset{(*)}{\leq} n(k_i)+\sum_{r<k_i}(n(r)-m(r)) \leq m(k_i) \overset{(*)}{\leq} 2n(k_i)+\sum_{r<k_i}(2n(r)-\frac{n(r)}{2}) \leq 2n(k_i)+3/2*|L|\max\{n(k)/k<k_i\} \leq$$

((*): hypothèse de récurrence)

$$\leq 2(2|L|)^{2(h+1)}+3/2*|L|(2|L|)^{2h} \leq (2|L|)^{2(h+1)}(2+3/2\frac{|L|}{(2|L|)^2}) = n(k_i)(2+\frac{3}{8|L|}) \leq 3n(k_i).$$

Donc, $m(k)>0$ pour tout $k\in L$ (car $n(k)>0$). De plus $m(k)\in\mathbb{N}$.
$H_k := \{1_1,\dots,1_{m(k)}\}$, $H := \bigcup_{k\in L} H_k$, $M := L$ $k\, {}_jI_2\, m :\Longleftrightarrow k\leq m$. Alors $L \cong \mathfrak{B}(H,M,I_2)$.

Alors, il y a deux réalisations (G,M,I_1), (H,M,I_2) non-équivalentes de $\mathfrak{J}$, c'est-à-dire $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{J}^{<1}(G,M,I_1), \mathfrak{J}^{<1}(H,M,I_2)$, mais $\mathfrak{J}^{<1}(G,M,I_1)\neq\mathfrak{J}^{<1}(H,M,I_2)$, puisque $M_1 \xrightarrow{p} M_2$ dans (G,M,I_1) mais $M_1 \xrightarrow{p/2} M_2$ dans (H,M,I_2) pour $M_1\subset Z_1$, $M_2\in Z_2$ avec $M_1\subseteq M_2$ et $p\neq 0$ (voir l'exemple suivant).

Soit $L=(\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\},\supseteq)$ (voir la Figure 7) et $\mathfrak{J}=\{\emptyset \xrightarrow{P(\{a\}|\emptyset)} \{a\}, \emptyset \xrightarrow{P(\{b\}|\emptyset)} \{b\}, \{a,b\} \xrightarrow{P(\{b,c\}|\{b\})} \{a,b,c\}, \{b\} \xrightarrow{P(\{a,b,c\}|\{a,b\})} \{b,c\}\} \subseteq \mathfrak{J}^{<1}(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1))$ avec $\mathbb{K}_1$ construit comme dans la démonstration de la Proposition 8. Les valeurs $n(l)$ sont ajoutées au diagramme de la Figure 7. Alors $P(\{a\}|\emptyset)=(12^4+12^2+1)/(12^6+2*12^4+2*12^2+1)$, $P(\{b\}|\emptyset)=(12^4+2*12^2+1)/(12^6+2*12^4+2*12^2+1)$, $P(\{b,c\}|\{b\})=(12^2+1)/(12^4+2*12^2+1)$, $P(\{a,b,c\}|\{a,b\})=1/(12^2+1)$, $Z_1=\{\{a,b\},\{a,b,c\}\}$, $Z_2=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$, et $M_1:=\{b\}\subset\{a,b\}=:M_2$. Avec les valeurs $m(l)$ (qui sont ajoutées au diagramme de la Figure 7) on peut construire le deuxième contexte $\mathbb{K}_2$. Alors on a

$$(\sum_{k\leq\{a,b\}} n(k))/(\sum_{k\leq\{b\}} n(k)) = (12^2+1)/(12^4+2*12^2+1) = 2*(12^2+1)/(2*12^4+4*12^2+2) =$$

$$2*(\sum_{k\leq\{a,b\}} m(k))/(\sum_{k\leq\{b\}} m(k)).$$

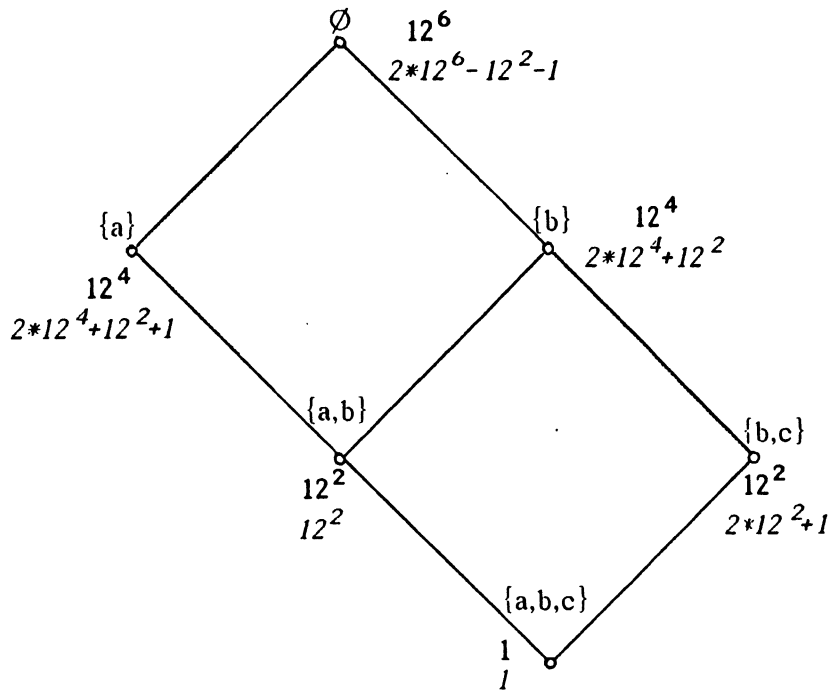


Figure 7. $L=(\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\},\supseteq)$ et les valeurs $n(l)$ et $m(l)$ de la démonstration de la Proposition 8.

IV. CHARACTERISATION DES TREILLIS L DONT TOUTES LES BASES ONT POUR CARDINAL $|L|-1$

Dans la suite, on va caractériser les treillis finis L dont toutes les bases d'implications partielles propres de chaque contexte $\mathbb{K}$ tel que $\mathcal{L}(\mathbb{K})\cong L$ ont pour cardinal $|L|-1$.

THEOREME 9. Soit L un treillis fini avec $|L|-|J(L)|\leq 2$. Alors $|\mathcal{J}|=|L|-1$ pour toutes les bases $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$ des implications partielles propres de chaque contexte $\mathbb{K}$ tel que $\mathcal{L}(\mathbb{K})\cong L$.

Démonstration: supposons qu'il existe un contexte $\mathbb{K}$ avec $\mathcal{L}(\mathbb{K})\cong L$ et une base $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$ avec $|\mathcal{J}|\leq|L|-2$. Alors il y a au moins deux composantes connexes Y,Z dans $Gr(\mathcal{J})$. On va construire une deuxième réalisation de $\mathcal{J}$.
Soit $0_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}$ le nul du treillis $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ et $1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}$ l'universel. Pour $k\in J(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$, k_* signifie le voisin inférieur (déterminé uniquement) de k.
(I): $|\mathcal{L}(\mathbb{K})\setminus J(\mathcal{L}(\mathbb{K}))|=2$. Soit $\mathcal{L}(\mathbb{K})\setminus J(\mathcal{L}(\mathbb{K}))=\{0_{\mathcal{L}(\mathbb{K})},v\}$ et soit $v\in Z$ (sans perte de généralité) . Définissons (voir l'exemple à la fin de la démonstration)

$$s:=\sum_{\{k<v/k\in Z\}}[k]*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(k,v),\qquad f:=\begin{cases}(2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]+1)/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}] & s\geq 0\\ (2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]-1)/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}] & s<0\end{cases},$$

(pour $k=(A_k,B_k)\in\mathcal{L}(\mathbb{K})$, on utilise de nouveau la notation $[k]=[(A_k,B_k)]:=|B_k'|$ comme dans le paragraphe II.1)

$$[k]^{\sim}:=\begin{cases}f*[k] & k\in Z\\ [k] & k\in Z\end{cases},\qquad \tilde{n}(k):=\begin{cases}[k]^{\sim} & \text{si } k=0_L\\ [k]^{\sim}-[k_*]^{\sim} & \text{si } k\in J(L)\\ \sum_{\{r\leq v\}}[r]^{\sim}*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v) & \text{si } k=v\end{cases}$$

Alors: $n(k)>0$ pour $k\in J((\mathcal{L}(\mathbb{K}))$:

$$[k]^{\sim}-[k_*]^{\sim}\geq\begin{cases}[k]-[k_*]-[k_*]/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}] & s\geq 0\\ [k]-[k]/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]-[k_*] & s<0\end{cases}\geq[k]-[k_*]-\frac{1}{2}>0\ (\text{car } [k]-[k_*]\geq 1).$$

$\tilde{n}(k)\geq 0$ pour $k=0_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}$: $[0]^{\sim}\geq(2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]-1)/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]*[0]\geq 0$.

$n(k)\geq 0$ pour $k=v$: $\tilde{n}(v)=[v]^{\sim}+\sum_{\{r<v\}}[r]^{\sim}*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)=$

$$=[v]^{\sim}+\sum_{\{r<v/r\in Z\}}[r]^{\sim}*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)+\sum_{\{r<v/r\in Z\}}[r]^{\sim}*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)$$
$$=[v]+\sum_{\{r<v/r\in Z\}}[r]*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)+f*\sum_{\{r<v/r\in Z\}}[r]*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)$$
$$=[v]+\sum_{\{r<v\}}[r]*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)+(f-1)*\sum_{\{r<v/r\in Z\}}[r]*\mu_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}(r,v)=n(v)+(f-1)*s\geq n(v)\geq 0.$$

$\hat{n}(k):=2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]*\tilde{n}(k)$, alors $\hat{n}(k)\in\mathbb{N}$ pour chaque $k\in L$.

$H:=\bigcup_{k\in\mathcal{L}(\mathbb{K})}\{1_1,\dots,1_{\hat{n}(k)}\}$, $1_r=(A,B)_r Jm:\Longleftrightarrow m\in B$.

Alors, on a trouvé une deuxième réalisation (H.M.J) de $\mathcal{J}$, qui est non-équivalente à $\mathbb{K}$, ce qui est contradictoire.

(II): $|\mathcal{L}(\mathbb{K})\setminus J(\mathcal{L}(\mathbb{K}))|=1$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(\mathbb{K})\setminus J(\mathcal{L}(\mathbb{K}))=\{0_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}\}$. Alors $\mathcal{L}(\mathbb{K})$ est une chaîne et on peut continuer avec $f:=(2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]+1)/2[1_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}]$ comme dans le cas (I).

Exemple: soit $L=(\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\supseteq)$, $\mathbb{K}_1$ le contexte

	a	b	c	d
$\{a,b,c\}_1$	X	X	X	
$\{a,b\}_1$	X	X		
$\{a,c\}_1,\{a,c\}_2$	X		X	
$\emptyset_1$				

et $\mathfrak{J}=\{\emptyset\xrightarrow{4/5}\{a\},\{a\}\xrightarrow{1/2}\{a,b\},\{a,c\}\xrightarrow{1/3}\{a,b,c\},\{a,b,c\}\xrightarrow{0}\{a,b,c,d\}\}$. Une construction obtenue comme dans la preuve du Théorème 9 avec $Z=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$ fournit $s=-3+1<0$, alors $f=(2*5-1)/(2*5)=9/10$ et

	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$
$[1]^{\sim}$	5	4	2	27/10	9/10	0
$\tilde{n}(1)$	1	2/10	11/10	18/10	9/10	0
$\hat{n}(1)$	10	2	11	18	9	0

Une deuxième réalisation de $\mathfrak{J}$ est alors le contexte $\mathbb{K}_2$

	a	b	c	d
$\{a,b,c\}_1,\ldots,\{a,b,c\}_9$	X	X	X	
$\{a,b\}_1,\ldots,\{a,b\}_{11}$	X	X		
$\{a,c\}_1,\ldots,\{a,c\}_{18}$	X		X	
$\emptyset_1,\ldots,\emptyset_{10}$				
$\{a\}_1,\{a\}_2$	X			

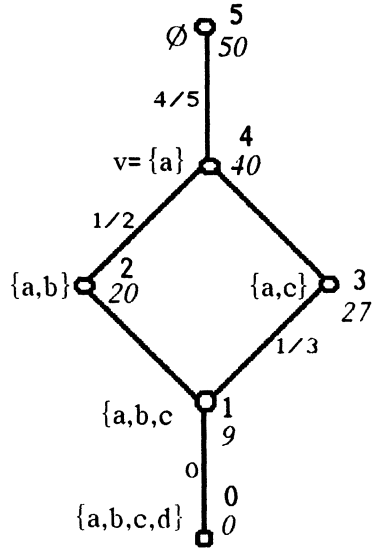


Figure 8. $L=(\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},\supseteq)$, $\mathfrak{J}=\{\emptyset\xrightarrow{4/5}\{a\},\{a\}\xrightarrow{1/2}\{a,b\},\{a,c\}\xrightarrow{1/3}\{a,b,c\},\{a,b,c\}\xrightarrow{0}\{a,b,c,d\}\}$ et les valeurs $[1]$ et $\sum_{k\le l}\hat{n}(k)$.

PROPOSITION 10. Soit L un treillis fini tel qu'existent $v,w\in L\setminus J(L)$ avec $v>w>0_L$. Alors, on peut construire un contexte $\mathbb{K}$ avec $\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})\cong L$ tel qu'il existe une base $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})$ d'implications partielles propres avec $|\mathcal{J}|<|L|-1$.

Démonstration: soit L un treillis fini et $v,w\in L\setminus J(L)$ avec $v>w>0_L$. Alors il existe $v_1,v_2,w_1,w_2\in L$ avec $w>w_1,w_2$, $v>v_1,v_2$ et $v_2\geq w$. $V:=\{k<v/\mu_L(k,v)\neq 0\}$, $W:=\{k<w/\mu_L(k,w)\neq 0\}$ (voir les Figures 9 et 10).

Cas 1: il existe $k<w$ avec $\mu(k,v)>0$ (évidemment $\mu(k,w)=-1$). Soit (sans perte de généralité) $\mu(w_1,v)>0$.

$\mathbb{K}:=(J(L)\cup\{0\},M(L),\leq_L\cap(J(L)\cup\{0\}\times M(L)))$. Donc $\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})\cong L$. Dans la suite on construira un système de générateurs $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K}))$ avec $|\mathcal{J}|=|L|-2$.

$\underline{\mathcal{J}}:=\{w\xrightarrow{p_k^w=P(k|w)}k/k\in W\setminus\{w_1\}\}$, $\bar{\mathcal{J}}:=\{v\xrightarrow{p_k^v=P(k|v)}k/k\in(V\setminus W)\cup\{w\}\}$.

$\mathcal{J}:=\underline{\mathcal{J}}\cup\bar{\mathcal{J}}\cup\{1_L\xrightarrow{p_k^{1_L}=P(k|1_L)}k/k\in V\cup W\cup\{w,w_1,1_L\}\}$. Alors $|\mathcal{J}|=|L|-2$.

On montrera qu'on peut calculer la précision $p_{w_1}^w$ (voir Figure 9). L'inversion de Möbius fournit $0=\sum_{k\leq w}\mu_L(k,w)[k]$ car $w\in J(L)$ ($[k]=|\{r\in J(L)\cup\{0\}/r\leq_L k\}|$; voir paragraphe II.1), et la division par $[w]>0$ fournit $P(w_1|w)=\sum_{w_1\neq k\leq w}\mu_L(k,w)*P(k|w)$ parce que $\mu_L(w_1,w)=-1$ ($w_1<w$).

D'après le Théorème 3(i) on a

(I): $0\leq\sum_{k\leq w}\mu_L(k,w)*p_k^w$, donc $p_{w_1}^w\leq\sum_{w_1\neq k\leq w}\mu_L(k,w)*p_k^w=\sum_{w_1\neq k\leq w}\mu_L(k,w)*P(k|w)=P(w_1|w)$, alors

(+) $p_{w_1}^w\leq P(w_1|w)$.

(II): $0\leq\sum_{k\leq v}\mu_L(k,v)*p_k^v=\sum_{k\in V\setminus W}\mu_L(k,v)*p_k^v+\sum_{k\in W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_k^v+\mu_L(w_1,v)*p_{w_1}^v=$

$=\sum_{k\in V\setminus W}\mu_L(k,v)*p_k^v+\sum_{k\in W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_w^v*p_k^w+\mu_L(w_1,v)*p_w^v*p_{w_1}^w$ et alors

$(\mu_L(w_1,v)>0)$ $p_{w_1}^w\geq\dfrac{-1}{\mu_L(w_1,v)*p_w^v}\left[\sum_{k\in V\setminus W}\mu_L(k,v)*p_k^v+\sum_{k\in W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_w^v*p_k^w\right]$

$=\dfrac{-1}{\mu_L(w_1,v)*P(w|v)}\left[\sum_{k\in V\setminus W}\mu_L(k,v)*P(k|v)+\sum_{k\in W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*P(w|v)*P(k|w)\right]=P(w_1|w)$

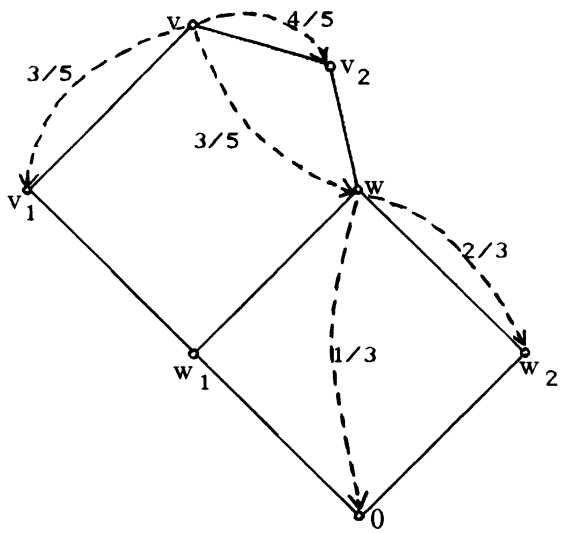
et donc $p_{w_1}^w=P(w_1|w)$, c'est-à-dire $\mathcal{J}\vdash\{w\xrightarrow{P(w_1|w)}w_1\}$ et alors $\mathcal{J}\vdash\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K}))$.

Exemple: avec le treillis de la Figure 9 on a $V:=\{v,v_1,v_2,w_1\}$, $W=\{w,w_1,w_2,0\}$,

$\mathcal{J}=\{v\xrightarrow{3/5}v_1,\ v\xrightarrow{4/5}v_2,\ v\xrightarrow{3/5}w,\ w\xrightarrow{2/3}w_2,\ w\xrightarrow{1/3}0\}$, alors

$0\leq 1-p_{v_1}^v-p_{v_2}^v+p_w^v*p_{w_1}^w=1-3/5-4/5+3/5*p_{w_1}^w$, donc $p_{w_1}^w\geq 2/3$, et

$0\leq 1-p_{w_1}^w-p_{w_2}^w+p^w=1-p_{w_1}^w-2/3+1/3$, donc $p_{w_1}^w\leq 2/3$.



	v_1	v_2	w	w_2
0	X	X	X	X
w_1	X	X	X	
w_2		X	X	X
v_1	X			
v_2		X		

Figure 9. Un exemple pour le cas I de la démonstration de la Proposition 10, $\mathbb{K}=(J(L)\cup\{0\},M(L),\leq_L\cap(J(L)\cup\{0\}\times M(L)))$.

Cas 2: $\forall k<w$: $\mu(k,v)\leq 0$. Soit (sans perte de généralité) w minimal avec $0<w$ et $w\in J(L)$.

$$n(k):=\begin{cases}(2|L|)^{|(k]|} & \text{si } k<w\\ 2|L|*|\sum_{r<w}(2|L|)^{|(r]|}|-|\{r\in J(L)/r<v,r_2\not\leq w\}| & \text{si } k=v_2 \text{ et } v_2\neq w\\ 0 & \text{si } k\in J(L) \text{ ou } k=w\\ 1 & \text{si } k\in J(L)\setminus(w]\setminus\{v_2\}\end{cases}$$

$\mathbb{K}:=(\bigcup_{k\in L}\{k_1,\dots,k_{n(k)}\},L,I)$ avec $k_i I m:\Longleftrightarrow k\leq m$.

$\underline{\mathfrak{J}}:=\{w\xrightarrow{p_k^w=P(k|w)}k/k\in W\setminus\{w_1\}\}$, $\bar{\mathfrak{J}}:=\{v\xrightarrow{p_k^v=P(k|v)}k/k\in(V\setminus W)\setminus\{w,v_2\}\}$.

$$\tilde{\mathfrak{J}}:=\begin{cases}\underline{\mathfrak{J}}\cup\bar{\mathfrak{J}}\cup\{v\xrightarrow{p_{w_1}^v=P(w_1|v)}w_1,\ v_2\xrightarrow{p_w^{v_2}=P(w|v_2)}w\} & \text{si } w\neq v_2\\ \underline{\mathfrak{J}}\cup\bar{\mathfrak{J}}\cup\{v\xrightarrow{p_{w_1}^v=P(w_1|v)}w_1\} & \text{si } w=v_2\end{cases}$$

Donc, dans $Gr(\underline{\mathfrak{J}}\cup\bar{\mathfrak{J}})$, v et w ne sont pas dans la même composante connexe. Elargissons $\tilde{\mathfrak{J}}$ à un système minimal $\mathfrak{J}$. (par exemple on prend

$\mathfrak{J}:=\underline{\mathfrak{J}}\cup\bar{\mathfrak{J}}\cup\{1_L\xrightarrow{p_k^{1_L}=P(k|1_L)}k/k\in V\cup W\cup\{w\}\cup\{1_L\}\}$) . Alors $|\mathfrak{J}|=|L|-2$.

On montrera qu'on peut calculer $p_{v_2}^v$ et $p_{w_1}^w$ (voir Figure 10).

Dans la suite on va démontrer ce résultat seulement pour le cas $v_2\neq w$. On obtient la preuve pour le cas $v_2=w$ en supprimant $p_w^{v_2}$, $P(w|v_2)$ et le produit qui contient $\mu(w,v)$.

On a $P(w_1|w)*P(w|v_2)*P(v_2|v)\overset{Prop.1}{=}P(w_1|v)\overset{v\longrightarrow w\in\mathfrak{J}}{=}p_{w_1}^v\overset{Th.3(iii)}{=}p_{v_2}^v*p_w^{v_2}*p_{w_1}^w=$

$\overset{v_2\longrightarrow w\in\mathfrak{J}}{=}P(w|v_2)*\ p_{v_2}^v*p_{w_1}^w$, donc

$$(o)\quad p_{v_2}^v*p_{w_1}^w=P(w_1|w)*P(v_2|v)\qquad \text{car } P(w|v_2)\neq 0.$$

Comme dans le cas 1 on obtient

$$(+)\quad p_{w_1}^w\leq P(w_1|w).$$

D'après le Théorème 3(i) on a

$$0\le \sum_{k\le v}\mu_L(k,v)*p_k^v=\sum_{k\in V\setminus W\setminus\{v_2,w\}}\mu_L(k,v)*p_k^v+\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_k^v+\mu_L(w_1,v)*p_{w_1}^v+$$
$$+\mu_L(v_2,v)*p_{v_2}^v+\mu_L(w,v)*p_w^v=$$
$$=\sum_{k\in V\setminus W\setminus\{v_2,w\}}\mu_L(k,v)*p_k^v+\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_{v_2}^v*p_w^{v_2}*p_k^w+\mu_L(w_1,v)*p_{w_1}^v+$$
$$+\mu_L(v_2,v)*p_{v_2}^v+\mu_L(w,v)*p_{v_2}^v*p_w^{v_2}=$$
$$=p_{v_2}^v[-1+\mu_L(w,v)*p_w^{v_2}+p_w^{v_2}*\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*p_k^w]+\sum_{k\in V\setminus W\setminus\{v_2,w\}}\mu_L(k,v)*p_k^v+$$
$$+\mu_L(w_1,v)*p_{w_1}^v=$$
$$=p_{v_2}^v[-1+\mu_L(w,v)*P(w|v_2)+P(w|v_2)*\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*P(k|w)]+\mu_L(w_1,v)*P(w_1|v)$$
$$+\sum_{k\in V\setminus W\setminus\{v_2,w\}}\mu_L(k,v)*P(k|v)=$$

et à cause de (*) (voir ci-dessous) on a

$$p_{v_2}^v\overset{(*)}{\le}[1-\mu_L(w,v)*P(w|v_2)-P(w|v_2)*\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*P(k|w)]^{-1}*$$
$$*[\sum_{k\in V\setminus W\setminus\{v_2,w\}}\mu_L(k,v)*P(k|v)+\mu_L(w_1,v)*P(w_1|v)]=P(v_2|v)$$ et alors

(++) $p_{v_2}^v\le P(v_2|v)$.

(*) à cause de $-1+\mu_L(w,v)*P(w|v_2)+P(w|v_2)*\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*P(k|w)\le$

$$\le -1+\sum_{k\in V\cap W\setminus\{w_1\}}\mu_L(k,v)*\left(\frac{1}{2|L|}\right)^{|(w]\setminus(k]|-1}+\mu_L(w,v)*\frac{1}{2|L|}$$

$$\le -1+|L|*|L|*\left(\frac{1}{2|L|}\right)^2+\frac{1}{2}\le -\frac{1}{4}<0$$ ($\mu_L(k,v)\le 0$ pour $k<w$, $|\mu_L(k,v)|\le|L|$ et $|(w]\setminus(k]|\ge 3$ pour $k<w$, $k\not< w$).

A cause de (o),(+),(++) on obtient $p_{v_2}^v=P(v_2|v)$ et $p_{w_1}^w=P(w_1|w)$ et alors

$\mathcal{J}\vdash\{v\xrightarrow{p_{v_2}^v=P(v_2|v)}v_2,\ w\xrightarrow{p_{w_1}^w=P(w_1|w)}w_1\}$. Mais

$\mathcal{J}\cup\{v\xrightarrow{p_{v_2}^v=P(v_2|v)}v_2,\ w\xrightarrow{p_{w_1}^w=P(w_1|w)}w_1\}$ est un système de générateurs de $\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$, donc $\mathcal{J}\vdash\mathcal{J}^{<1}(\mathcal{L}(\mathbb{K}))$. Ceci achève la démonstration.

Exemple: soit L le treillis de la Figure 10. $V=\{v,v_1,v_2,u\}$, $W=\{w,w_1,w_2,0\}$,

$\mathcal{J}=\{v\xrightarrow{(2*16^2+3)/(17*(2*16^2+1)+1)}v_1,\ v\xrightarrow{(2*16^2+2)/(17*(2*16^2+1)+1)}u,$

$v\xrightarrow{(16^2+1)/(17*(2*16^2+1)+1)}w_1,\ v_2\xrightarrow{(2*16^2+1)/(17*(2*16^2+1))}w,$

$w\xrightarrow{(16^2+1)/(2*16^2+1)}w_2,\ w\xrightarrow{1/(2*16^2+1)}0\}$.

$0\le 1-p_{v_1}^v-p_{v_2}^v+p_u^v=1-((2*16^2+3)/(17*(2*16^2+1)+1)-p_{v_2}^v+((2*16^2+2)/(17*(2*16^2+1)+1)$,

alors $p_{v_2}^v\le(17*(2*16^2+1))/(17*(2*16^2+1)+1)$, et

$0\le 1-p_{w_1}^w-p_{w_2}^w+p_0^w=1-p_{w_1}^w-(16^2+1)/(2*16^2+1)+1/(2*16^2+1)$, alors $p_{w_1}^w\le(16^2+1)/(2*16^2+1)$.

De plus, $(16^2+1)/(17*(2*16^2+1)+1)=p_{w_1}^v=p_{v_2}^v*p_w^{v_2}*p_{w_1}^w=p_{v_2}^v*p_{w_1}^w*(2*16^2+1)/(17*(2*16^2+1))$,

donc $p_{v_2}^v=(17*(2*16^2+1))/(17*(2*16^2+1)+1)$, et $p_{w_1}^w=(16^2+1)/(2*16^2+1)$.

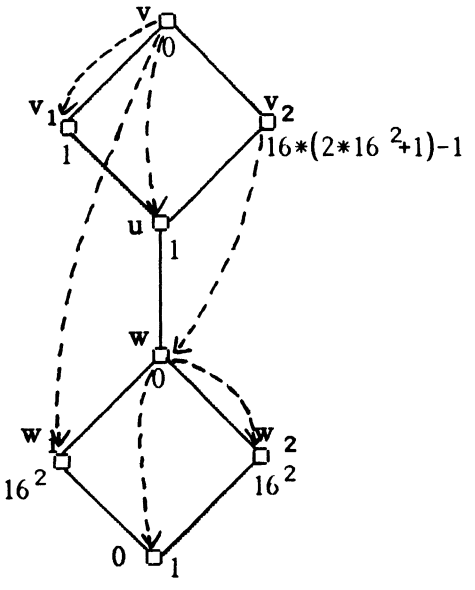


Figure 10. Un exemple pour le cas II de la démonstration de la Proposition 10 et les valeurs n(l).

Avec la Proposition 9 et la Proposition 10 on peut vérifier le

COROLLAIRE 11. Soit L un treillis fini. $|L\setminus J(L)|\leq 2 \Longleftrightarrow |\mathfrak{J}|=|L|-1$ pour toutes les bases $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{J}^{<1}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ des implications partielles propres de chaque contexte $\mathbb{K}$ avec $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})\cong L$.

V. CONCLUSIONS

On a donné une limite supérieure pour le cardinal $|\mathfrak{J}|$ d'une base $\mathfrak{J}$ des implications partielles propres d'un contexte $\mathbb{K}$ et construit une classe de treillis, où cette limite est atteinte, mais nous ne savons pas donner explicitement une base des implications partielles propres dans tous les cas. C'est-à-dire que le problème de trouver une base "canonique" reste ouvert. La solution de ce problème n'est pas facile, parce qu'on ne peut pas encore donner une limite inférieure pour le cardinal d'une base (voir ci-dessous) et de plus, il peut exister deux bases differentes $\mathfrak{J},\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{J}^{<1}(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}))$ avec $|\mathfrak{J}|\neq|\mathfrak{I}|$ (par exemple, $\mathfrak{I}=\{\emptyset\xrightarrow{3/4}\{b\},\{a\}\xrightarrow{2/3}\{a,b\},\{b\}\xrightarrow{2/3}\{a,b\},\ \{b\}\xrightarrow{2/3}\{b,c\},\ \{b,c\}\xrightarrow{1/2}\{a,b,c\}\}$ est une deuxième base d'implications partielles propres du contexte $\mathbb{K}$ de la Figure 6 avec $|\mathfrak{I}|=5$, par contre la base $\mathfrak{J}$ de la Figure 6 a cardinal $|\mathfrak{J}|=4$). C'est la raison pour laquelle on doit construire les ensembles $\mathfrak{J}$ dans la démonstration de la Proposition 9 d'une façon dispendieuse.

Une limite inférieure pour le cardinal d'une base est donnée par $1/2*(J(L)\cap M(L))$, parce que chaque élément doublement irréductible doit être la prémisse ou la conclusion d'une implication partielle propre d'une base $\mathfrak{J}$:

Si $(\{h\}'',\{n\}'')\in J(\underline{\mathfrak{B}}(G_1,M_1,I_1)\cap M(\underline{\mathfrak{B}}(G_1,M_1,I_1)$ n'était ni prémisse ni conclusion d'une implication partielle propre appartenant à $\mathfrak{J}$, on trouverait une deuxième réalisation $\mathbb{K}_2$ non équivalente $(G_2:=G_1\cup\{\bar{g}/g\in G_1\},\ M_2:=M_1,\ I_2:=I_1\cup\{(\bar{g},m)/gI_1m\}\setminus\{(\bar{h},n)\}$ et alors $[l]_{\mathbb{K}_2}=2[l]_{\mathbb{K}_1}$ pour $l\neq(\{h\}'',\{n\}'')$ et $[l]_{\mathbb{K}_2}=2[l]_{\mathbb{K}_1}-1$ pour $l=(\{h\}'',\{n\}'')$).

Mais cette limite inexacte n'est pas très intéressante, puisqu'ils existent des treillis L, où $J(L)\cap M(L)=\emptyset$.
Mais on assume, que $|\mathcal{J}|\geq 2/3(|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1)$ pour chaque base $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K}))$. Par contre, pour chaque $n\in\mathbb{N}$ on peut construire un contexte $\mathbb{K}$ et une base $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{J}^{<1}(\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K}))$, où $|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1-|\mathcal{J}|=n$. Bien sûr, $|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|$ va grandir avec n, mais le quotient $|\mathcal{J}|/(|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1)$ reste supérieur à 2/3.
Pour réprésenter les implications partielles propres d'un contexte $\mathbb{K}$, on utilisera dans la pratique des systèmes de générateurs et pas forcement des bases $\mathcal{J}$, où $|\mathcal{J}|<|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1$: premièrement, les bases sont difficile à déterminer, et si on a une base $\mathcal{J}$, où $|\mathcal{J}|<|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1$, les précisions des autres implications partielles propres sont "difficile" à calculer avec la condition (i) du Théorème 3 (c'est trop couteux, en temps de calcul); deuxièmement, on gagnera pas beaucoup de memoire (si l'assumption sur la limite inférieure n'est pas "trop mauvaise").
Un système de générateurs canonique est donné par $\mathcal{J}=\{\emptyset\xrightarrow{p}N/\emptyset\neq N$ et N est une compréhension de $\mathbb{K}\}$ (évidemment $|\mathcal{J}|=|\underline{\mathcal{B}}(\mathbb{K})|-1$). Pour des compréhensions $K\subset L\subseteq M$, on a alors $P(L|K)=P(L|\emptyset)/P(K|\emptyset)$, donc on peut calculer toutes les précisions très rapidement.

Pour "simplifier" un treillis de concepts (et pour "filtrer" les informations et implications partielles "significatives"), on a la possibilité de demander une implication globale supplémentaire. Dans ce but on peut supprimer les objets qui contredisent la nouvelle implication globale, ou on peut modifier la relation d'incidence.
Du point de vue mathématique, c'est la factorisation du treillis de concepts avec une inf-congruence pertinente.

Exemple: regardez le contexte Figure 11. Si on demande l'implication $\{a,c\}\longrightarrow\{b\}$ et on supprime l'objet 2 ou si on modifie la relation d'incidence ($\tilde{I}:=I\cup(2,b)$), on obtient l'implication globale $\{c\}\longrightarrow\{b\}$ en plus.

	a	b	c
1	X	X	
2	X		X
3		X	X
4	X		

Figure 11

Quelles implications partielles va-t-on exiger, lesquelles sont significatives pour les données? Avant tout, une implication partielle significative devrait avoir une précision qui est "grande", par exemple plus grande qu'un seuil donné par l'expert. Mais cette condition n'est pas satisfaisante:
(I): la précision $p=P(L|K)$ d'une implication partielle $K\xrightarrow{p}L$ pourrait être grande "par hasard": si les ensembles d'attributs K,L sont indépendants (du point de vue statistique), la grande fréquence rélative $P(L|K)$ n'est pas spécifique pour les données.
(II): si on demande l'implication partielle $K\longrightarrow L$ en plus (avec $P(L|K)$ grand), on pourrait forcer une implication partielle $K\cup N\longrightarrow L\cup N$ (pour un $N\subseteq M$), où $P(L\cup N|K\cup N)$ est petit (voir les Figures 11 et 12).

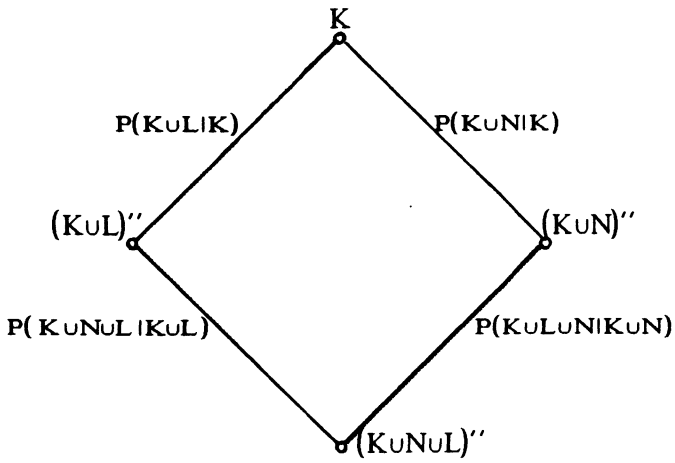


Figure 12

Puisque $1-P(K\cup L|K)-P(K\cup N|K)+P(K\cup N|K)*P(K\cup N\cup L|K\cup N)\geq 0$, on a
$P(K\cup N|K)\leq \frac{1-P(K\cup L|K)}{1-P(K\cup N\cup L|K\cup N)}$ et $P(K\cup N\cup L|K\cup L)\leq \frac{P(K\cup L\cup N|K\cup N)}{P(K\cup L|K)} * \frac{1-P(K\cup L|K)}{1-P(K\cup N\cup L|K\cup N)}$.
Par exemple, si on suppose $P(K\cup L|K)=0.95$ et $P(K\cup L\cup N|K\cup N)=0.25$, on obtient $P(K\cup N|K)\leq\frac{1}{15}$ et $P(K\cup L\cup N|K\cup L)\leq\frac{1}{57}$ et alors $[K\cup N]\leq\frac{1}{15}[K]$ et $[K\cup N\cup L]\leq\frac{1}{57}[K\cup L]$, c'est-à-dire l'implication forcée $K\cup N \longrightarrow K\cup N\cup L$ a une prémisse, qui a évidemment moins d'objets que la prémisse de l'implication $K \longrightarrow K\cup L$ demandée. Dans la pratique, c'est l'expert qui devrait décider s'il accepte l'implication partielle forcée $K\cup N \longrightarrow K\cup N\cup L$ ou non.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AIGNER M., *Combinatorial theory*, New York, Springer, 1979

[2] BARBUT M., "Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique", Appendice de l'*Analyse hiérarchique* par M.Matalon, Paris, Gauthier-Villars, (1965), 125-146.

[3] BARBUT M. et MONJARDET B., *L'ordre et la classification, algèbre et combinatoire*, tome II, Paris, Hachette, 1970.

[4] BIRKHOFF G., *Lattice theory*, Providence R.I., Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol.25, 3.ed., 1967.

[5] DUQUENNE V. , "Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices", *Beiträge zur Begriffsanalyse*, (ed. B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff, Mannheim, BI-Wiss.—Verl., (1987), 213-239.

[6] GANTER B. et WILLE R., "Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen". *Die Klassifikation und ihr Umfeld*,(ed. P.O.Degens, H.J.Hermes, O.Opitz), tome 17 , Frankfurt, INDEKS-Verlag, (1986), 171-185.

[7] WILLE R., "Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts", *orderes sets (ed. Ivan Rival)*, Boston, Reidel, Dordrecht, (1982), 445-470.

[8] WILLE R., "Sur la fusion des contextes individuels", *Mat. Sci. Hum* 85 (1984), 57-71.