

CLAUDE LE CONTE DE POLY-BARBUT
Automorphismes du permutoèdre et votes de Condorcet

Mathématiques et sciences humaines, tome 111 (1990), p. 73-82

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1990__111__73_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AUTOMORPHISMES DU PERMUTOÈDRE ET VOTES DE CONDORCET

Claude LE CONTE de POLY - BARBUT¹

RÉSUMÉ - *Renverser des ordres totaux sur n éléments, les transformer par une même permutation, voilà des transformations qui ne changent "presque rien" à l'analyse d'un scrutin de type Condorcet. On démontre que ces transformations simples engendrent le groupe des automorphismes du permutoèdre. Ce groupe est isomorphe au produit direct du groupe à deux éléments par le groupe symétrique S_n .*

ABSTRACT - Automorphisms of Permutohedron and Condorcet's Voting.

To reverse total orders on n elements or transform them by a permutation, these are transformations that change "almost nothing" to the analysis of a Condorcet's voting procedure. We demonstrate that these transformations generate the automorphisms group of the permutohedron. This group is isomorphic to the direct product of the two elements group by the symmetric group S_n .

I. LES DONNÉES

Un scrutin de type Condorcet : p votants et n candidats c_1, \dots, c_n . Chaque votant donne un classement, qui est un ordre total sur les n candidats. Un certain nombre de procédures permettent de dégager de ces p ordres totaux O_1, \dots, O_p une (ou des) opinion(s) collective(s) sous forme d'ordre(s) total(aux) sur les candidats. Nous nous intéressons aux deux suivantes :

a) La méthode de Condorcet : étudier la relation majoritaire Θ associée au vote ; si elle est transitive les ordres totaux la contenant constituent les opinions collectives, sinon (effet Condorcet) considérer comme opinions collectives les ordres totaux recueillant le maximum de suffrages [1], [2], [3] et article de B. Monjardet dans ce même numéro [10].

b) La recherche d'ordre(s) médian(s) à distance minimum, au sens de Kendall, de l'ensemble des p ordres totaux O_1, \dots, O_p .

Pour la distance la plus usuelle entre relation et ordres totaux, les procédures a) et b) donnent les mêmes ordres médians [1]. et [10].

¹ C.N.R.S., C.A.M.S., 54 boulevard Raspail 75270 PARIS CEDEX 06.

II. UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DES ORDRES TOTAUX

Sur ces données O_1, \dots, O_p nous faisons opérer des transformations simples :

- La transformation T^* .

Chaque ordre O_i est remplacé par l'ordre inverse O_i^* . Si $O_i = c_1, c_2, \dots, c_n$, $O_i^* = c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$. L'opinion de chaque votant est transformée en l'opinion diamétralement opposée.

La relation Θ^* associée à O_1^*, \dots, O_p^* est l'inverse de la relation initiale Θ et les ordres à distance minimum de cette relation sont les inverses de ceux associés à Θ .

Les ordres médians des ordres O_1^*, \dots, O_p^* sont également les inverses de ceux associés à O_1, \dots, O_p .

- Les transformations T^σ

A chaque permutation σ des n candidats est associée la transformation T^σ des ordres totaux sur les candidats :

O_i^σ est l'ordre obtenu à partir de O_i en mettant à la place de chaque candidat c_i son image par σ qui sera notée c_i^σ . Les ordres O_1, \dots, O_p sont transformés par T^σ en $O_1^\sigma, \dots, O_p^\sigma$.

Ici encore la relation Θ^σ associée aux O_i^σ est le transformé par σ de la relation Θ : $c_i \Theta c_j \Leftrightarrow c_i^\sigma \Theta^\sigma c_j^\sigma$ et les valuations se transportent par σ . Les ordres totaux à distance minimum de Θ^σ sont les transformés par σ des ordres totaux à distance minimum de Θ .

De façon analogue les ordres médians de $O_1^\sigma, \dots, O_p^\sigma$ sont les transformés par σ des ordres médians initiaux.

Les transformations T^* et T^σ engendrent un groupe de transformations des ordres totaux qui ont les propriétés suivantes :

$$T^*T^* = \text{Id.} \quad T^*T^\sigma = T^\sigma T^*$$

$$\text{et } T^\sigma T^{\sigma'} = T^{\sigma\sigma'}$$

(les produits de transformations comme ceux de permutations se font ici de gauche à droite).

T^* engendre un groupe à deux éléments, les T^σ un groupe à $n!$ éléments isomorphe au groupe symétrique S_n et :

Le groupe engendré par T^ et les T^σ est isomorphe au produit direct du groupe à deux éléments par le groupe symétrique S_n . Il a $2n!$ éléments.*

L'objet des paragraphes suivants est de démontrer que ce groupe de transformations des ordres totaux est en fait le groupe entier des automorphismes du permutoèdre P_n et que ce sont donc les seules "bonnes" transformations des données en ce sens que ce sont les seules qui transforment de la même façon les médianes, pour tout ensemble de données O_1, \dots, O_p .

Ce résultat s'obtient en démontrant d'une part que le groupe d'automorphismes du permutoèdre P_n a bien $2n!$ éléments et d'autre part que le groupe précédent est un groupe d'automorphismes de P_n .

III. RAPPELS SUR LE PERMUTOÈDRE [8]

a) Il ne sera plus question de candidats mais de n éléments $1, 2, \dots, n$ et des $n!$ ordres totaux sur ces éléments.

Deux ordres totaux sont dits adjacents s'ils ne diffèrent que par l'échange de deux éléments consécutifs. Ainsi $4\ 1\ 3\ 2$ et $4\ 3\ 1\ 2$ sont adjacents. Le permutoèdre P_n est l'ensemble des $n!$ ordres totaux avec cette relation d'adjacence. On peut lui associer un polyèdre dans l'espace à $n-1$ dimensions [9] dont les sommets sont les $n!$ ordres totaux et dont les arêtes, relient les ordres adjacents.

Deux arêtes consécutives $(O_1\ O_2)$ et $(O_2\ O_3)$ sont sur une face carrée si les adjacences entre O_1 et O_2 d'une part, O_2 et O_3 d'autre part portent sur quatre éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ et sur une face hexagonale sinon. Deux arêtes consécutives ne peuvent alors être à la fois sur un carré et un hexagone.

Sur P_n est définie une distance d : $d(O_i, O_j)$ est la longueur des plus courts chemins allant de O_i à O_j .

IV - LES AUTOMORPHISMES DU PERMUTOÈDRE

Définition. Un automorphisme f du permutoèdre P_n (fini) est une bijection qui conserve l'adjacence :

$$O_1 \text{ adjacent à } O_2 \Leftrightarrow f(O_1) \text{ adjacent à } f(O_2).$$

Conservant l'adjacence, un automorphisme ainsi défini transforme les carrés en carrés, les hexagones en hexagones et plus généralement toute face de dimension i en face de dimension i . Tout drapeau c'est-à-dire toute succession du type :

sommet \subset arête $\subset F_2 \subset F_3 \subset \dots \subset F_{n-1}$ (où F_i est une face de dimension i) est également transformée en drapeau.

Nous vérifions que les transformations T^* et T^σ sont des automorphismes du permutoèdre :

$$- O_1 \text{ adjacent à } O_2 \Leftrightarrow O_1^* \text{ adjacent à } O_2^*.$$

$$\text{Exemple : } \begin{array}{ll} O_1 = 4\ 1\ 3\ 2 & O_2 = 4\ 3\ 1\ 2 \\ O_1^* = 2\ 3\ 1\ 4 & O_2^* = 2\ 1\ 3\ 4 \end{array}$$

Les deux éléments consécutifs échangés entre O_1^* et O_2^* sont les mêmes que ceux échangés entre O_1 et O_2 .

T^* transforme chaque sommet du permutoèdre en son point *antipodal* : c'est une symétrie par rapport au centre du polyèdre permutoèdre.

$$- O_1 \text{ adjacent à } O_2 \Leftrightarrow O_1^\sigma \text{ adjacent à } O_2^\sigma$$

$$\text{Exemple : } \begin{array}{lll} O_1 = 4\ 1\ 3\ 2 & O_2 = 4\ 3\ 1\ 2 & \sigma = (1\ 2\ 3)(4) \\ O_1^\sigma = 4\ 2\ 1\ 3 & O_2^\sigma = 4\ 1\ 2\ 3 & \end{array}$$

Lorsque l'adjacence entre O_1 et O_2 est liée à l'échange des éléments i et j , celle de O_i^σ et O_j^σ est liée à l'échange de i^σ et j^σ .

Le groupe de transformations à $2n!$ éléments engendré par T^* et les T^σ est groupe d'automorphismes de P_n .

Remarque. T^σ correspond à une translation à droite dans le groupe symétrique S_n : l'interprétation de chaque ordre comme une permutation (et réciproquement) exige qu'un ordre de référence O soit fixé (le permuttoèdre est "planté" en O [8]).

Si l'ordre fixé est $O = x_1, \dots, x_n$, à chaque ordre $O' = x'_1, \dots, x'_n$ est associée la permutation :

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x'_1, & x'_2, & \dots, & x'_n \end{array}$$

la transformation T^σ sur les ordres se traduit par la translation à droite par σ pour le groupe de permutations. Mais le choix de l'ordre de référence importe peu : pour tous les choix de l'origine O , la translation à droite par σ dans le groupe de permutations correspondent à une seule transformation pour les ordres. On peut donc parler, par extension, de translations à droite sur le permuttoèdre, en n'y attachant évidemment aucune idée géométrique (on verra que ces translations sont en fait des produits de symétries par rapport à des hyperplans). Cette remarque n'est pas valable pour les translations à gauche.

Pour dénombrer le groupe de tous les automorphismes du permuttoèdre le résultat classique [12] est utilisé : si Aut est le groupe d'automorphismes d'une structure, x un élément, Aut_x le sous-groupe de Aut qui fixe x et l'orbite de x l'ensemble des images de x par Aut ,

$$|Aut| = |Aut_x| \times |\text{orbite de } x|.$$

1) Dans le permuttoèdre (comme dans S_n) le groupe des translations à droite est un sous-groupe transitif :

pour deux ordres quelconques $O' = x'_1, \dots, x'_n$ et $O'' = x''_1, \dots, x''_n$ la translation $\sigma : x'_i \rightarrow x''_i$ transforme O' en O'' . L'orbite de tout élément de P_n est P_n entier et $|\text{orbite de } O'| = n!$

2) Notons Aut le groupe d'automorphismes du permuttoèdre. Pour tout O' et tout O'' , $Aut_{O'}$ et $Aut_{O''}$ sont isomorphes en raison de la transitivité de Aut .

Choisissons pour ordre que l'on fixe l'ordre $O = 1, 2, \dots, n$. Un élément σ de Aut_O fixe O , échange entre eux les éléments à distance 1 de O et par le jeu des adjacences échange entre eux tous les éléments à distance i de O , pour tout i . Si σ transforme un ordre O' en un ordre O'' il existe un chemin de longueur minimum de O à O' transformé par σ en un chemin de longueur minimum de O à O'' et $d(O, O') = d(O, O'')$. Construire ainsi le permuttoèdre en le plantant en O et en orientant les arêtes (O_r, O_s) de O_r vers O_s si $d(O, O_s) = d(O, O_r) + 1$ et prendre la fermeture transitive de cette relation donne la structure en treillis du permuttoèdre planté, de minimum O , de maximum O^* [8]. Les automorphismes de P_n qui fixent O sont également les automorphismes pour les arêtes orientées et donc pour l'ordre en treillis. Ils fixent également O^* .

On est donc amené à étudier les automorphismes du treillis permuttoèdre.

V. LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES DU TREILLIS PERMUTOÈDRE A DEUX ÉLÉMENTS

Lemme. Le seul automorphisme du treillis permutoèdre qui laisse fixe chaque atome est l'identité.

Les atomes sont les ordres à distance 1 de l'origine O . Le permutoèdre planté est un treillis gradué d'infimum O . Un ordre sera dit indifféremment à distance d de O ou au niveau d du treillis.

La démonstration se fait par la récurrence :

Si un automorphisme f du treillis laisse fixes tous les ordres des niveaux $\leq d$, f laisse également fixes tous les ordres du niveau $d + 1$, pour $d \geq 1$.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de récurrence, et soit O_1 un ordre quelconque du niveau $d + 1$.

Il existe au moins un chemin descendant de O_1 à O passant par tous les niveaux $< d + 1$, donc il existe, pour la relation de couverture notée \prec du treillis, deux ordres O_2, O_3 et :

$$O_3 \prec O_2 \prec O_1.$$

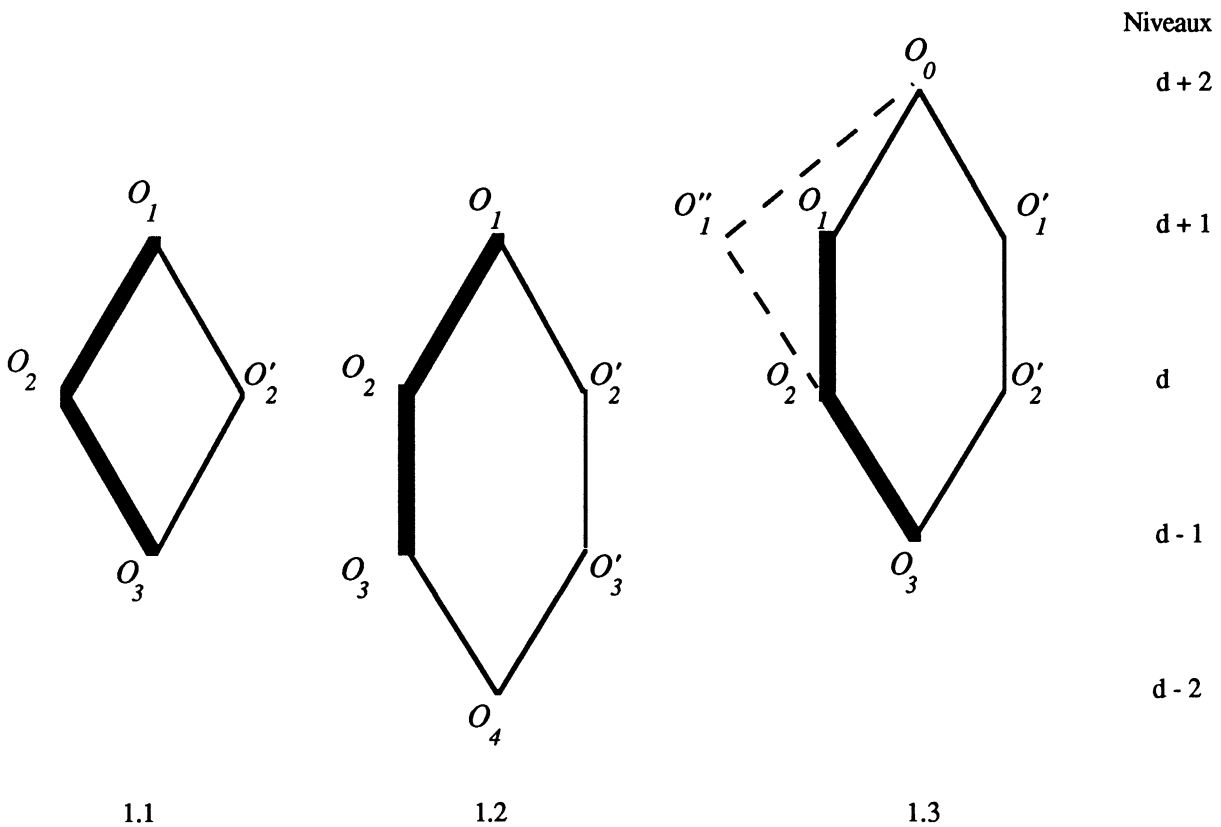


Figure 1

Si les adjacences entre O_1 et O_2 d'une part, O_2 et O_3 d'autre part portent sur quatre éléments distincts de $\{1, 2, \dots, n\}$, $O_1 O_2$ et O_3 sont sur un même carré $O_1 O_2 O_3 O'_2$ (cf. figure 1.1), sinon sur un hexagone et il y a deux cas possibles (cf. figures 1.2 et 1.3).

- Cas de la figure 1.1. :

$$f(O_1) = f(O_2 \vee O'_2) = O_2 \vee O'_2 = O_1$$

- figure 1.2. :

$$f(O_1) = f(O_2 \vee O'_2) = O_2 \vee O'_2 = O_1$$

- figure 1.3. :

O_2 et O'_2 ne peuvent avoir de supremum au niveau $d + 1$ sinon les deux arêtes consécutives $(O_2 O_3)$ et $(O_3 O'_2)$ seraient à la fois sur un carré et un hexagone. Donc $O_2 \vee O'_2 = O_0$ et :

$$f(O_0) = f(O_2 \vee O'_2) = O_2 \vee O'_2 = O_0.$$

Si $f(O_1) = O''_1 \neq O_1$, O''_1 et O_0 sont adjacents puisque l'image par f de l'arête $(O_1 O_0)$ est $(O''_1 O_0)$; O_2 et O''_1 sont également adjacents et les deux arêtes consécutives $(O_0 O_1)$ et $(O_1 O_2)$ seraient sur un carré et sur un hexagone. Donc $f(O_1) = O_1$.

Dans tous les cas $f(O_1) = O_1$; f fixe tout ordre du niveau $d + 1$ donc P_n entier et $f = \text{Id}$. \square

Un automorphisme est alors entièrement défini par son action sur les atomes : si f et f' sont deux automorphismes et $f(O_i) = f'(O_i)$ pour tous les atomes O_i

$$f^{-1}f'(O_i) = f'^{-1}f(O_i) = O_i$$

$$\text{et : } f^{-1}f' = f'^{-1}f = \text{Id} \Rightarrow f = f'.$$

Construction du seul automorphisme différent de l'identité.

Les atomes peuvent être rangés dans l'ordre :

$$2 \ 1 \ 3 \ 4 \ \dots \ n, \quad 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ \dots \ n, \ \dots, \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n \ n-1.$$

Deux atomes consécutifs pour cet ordre sont, avec l'ordre minimum $O = 1 \ 2 \ \dots \ n$ sur un hexagone et deux atomes non consécutifs sur un carré.

Tout automorphisme du permutoèdre doit respecter ces configurations et la seule façon d'agir sur les atomes est alors : d'échanger le 1er et le dernier atome, le 2ème et l'avant dernier, ..., le i ème et le $(n+1-i)$ ème. L'atome médian restant fixe s'il est unique.

Il y a bien une bijection qui prolonge cette action sur les atomes. C'est celle introduite par M.P. Schützenberger dans l'étude des tableaux de Young associés aux permutations, qui à tout ordre x_1, x_2, \dots, x_n sur $\{1, \dots, n\}$ fait correspondre l'ordre $n+1-x_n, n+1-x_{n-1}, \dots, n+1-x_1$.

Cette transformation que nous noterons m respecte les niveaux et les adjacences. C'est bien un automorphisme du treillis et $\text{Aut}_O P_n$ est le groupe à deux éléments engendré par cette involution m , donc isomorphe au groupe $\{0, 1\}$.

A chaque ordre est associée une permutation, pour l'ordre fixé $O = 1, 2, \dots, n$. L'automorphisme m coïncide alors avec l'automorphisme interne qui à toute permutation p fait correspondre $\psi p \psi$ où ψ est l'involution $(1, n) (2, n-1) \dots (i, n-i+1) \dots$, avec un point fixe si n est impair.

ψ est la permutation associée à l'ordre inverse $O^* = n, n-1, \dots, 1$ de l'ordre O .

Le groupe d'automorphismes du treillis permutoèdre est groupe d'automorphismes du groupe de permutations S_n . Il a deux éléments.

Remarque. La transformation *antipodale* de $T^* : O_i \Rightarrow O_i^*$ s'exprime dans le groupe de permutations par une translation à gauche par la même involution ψ associée à O^* . C'est un anti-automorphisme pour la structure de treillis.

Le groupe des automorphismes et anti-automorphismes est isomorphe au groupe de Klein.

VI - LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES DU PERMUTOÈDRE

Le groupe d'automorphismes du permutoèdre a donc $2n!$ éléments et coïncide avec son sous-groupe à $2n!$ éléments étudié au § III.

$$Aut = (1, *) \times S_n.$$

Un élément $(1, \sigma)$ est la translation à droite par σ , définie sur le permutoèdre et un élément $(*, \sigma)$ est produit (commutatif) de l'*antipodale* par la translation à droite σ . Ce groupe est défini sans qu'il soit nécessaire de "planter" le permutoèdre.

Si le permutoèdre est planté en un sommet O , le seul élément de Aut_O différent de l'identité est la transformation m . On démontre aisément que Aut est également produit semi-direct du groupe $(1, m)$ à deux éléments, qui fixe O , par S_n .

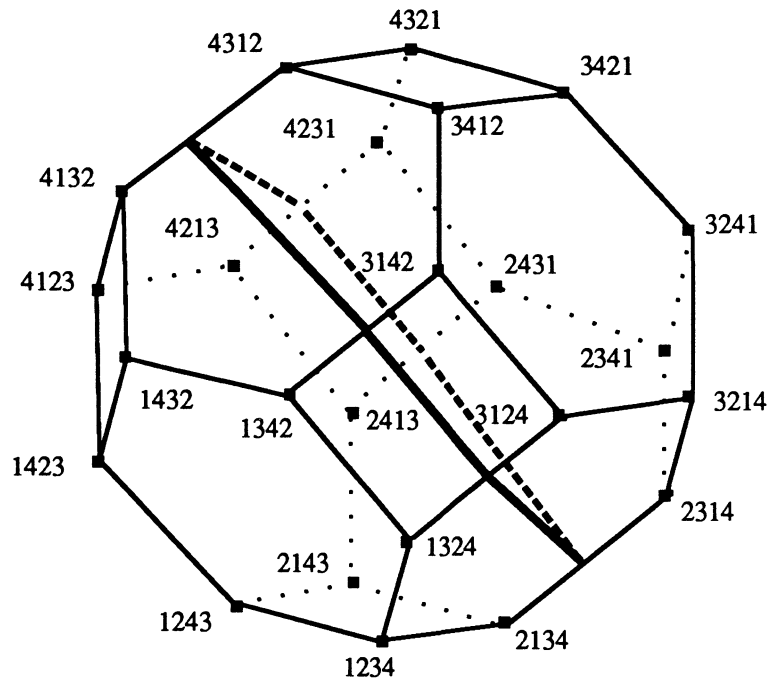
Cette construction nécessite la fixation d'une origine.

Les transformations T^* et T^σ définies au § II engendrent bien le groupe d'automorphismes du permutoèdre et tout résultat d'un vote se traduisant par des ordres totaux O_1, \dots, O_p est transformé par ces $2n!$ automorphismes en p ordres ayant même structure sur le permutoèdre et dont les médianes sont transformées de la même façon. Ce sont les seules transformations ayant ces propriétés.

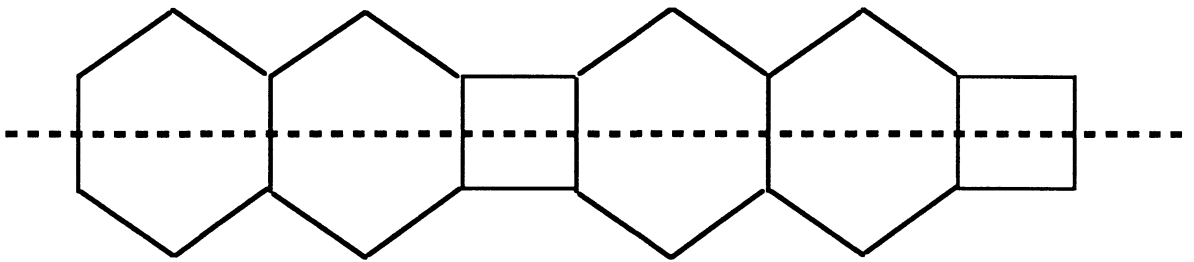
VII - LES SYMÉTRIES DANS P_4

Nous étudions sur P_4 (figure 2.1) les deux façons de construire le groupe d'automorphismes.

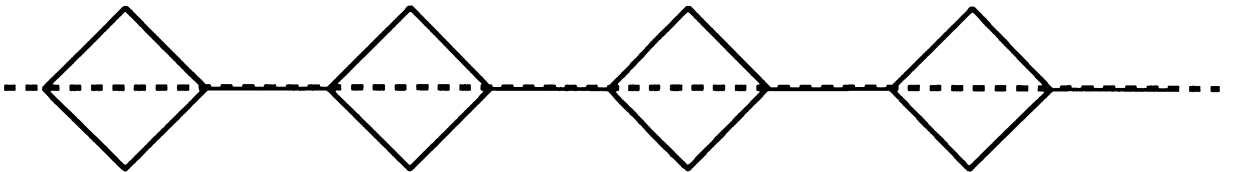
a) En ne plantant pas P_4 . $Aut = (1, *) \times S_4$ peut être engendré par l'*antipodale* qui est une symétrie par rapport au centre et, par exemple, par les translations à droite (12) , (23) et (34) . La translation à droite (ij) transforme chaque ordre en l'ordre obtenu en échangeant i et j . Les trois translations (12) , (23) et (34) sont des symétries par rapport à des plans passant par des milieux d'hexagones et de carrés consécutifs (cf. la figure "dépliée" 2.2) et :



2.1



2.2



2.3

Figure 2

Tout automorphisme est produit d'une symétrie centrale par des symétries par rapport à trois plans, ou produit de symétries par rapport à ces trois plans.

Exemple. La translation à droite par (13) est une symétrie par rapport au plan tracé en gras sur la figure 2.1, produit des deux symétries par rapport aux plans associés aux translations (12) et (23).

b) Si P_4 est planté en 1234, l'involution ψ associée à 4321 est (14) (32) et m est la symétrie par rapport au plan passant par 1234, 1324, 3142, 3412, 4321, 4231, 2413, et 2143. Ces huit points sont sur un plan représenté par des pointillés sur la figure 2.3.

Le groupe d'automorphismes est engendré par m et par les translations à droite (12), (23) et (34) déjà vues :

Tout élément du groupe d'automorphismes est produit de symétries par rapport à quatre plans.

La symétrie m a huit points fixes, déjà énumérés, associés à la même involution (14), (32). Si P_4 est planté en n'importe lequel de ces points fixes, la même symétrie m intervient. P_4 peut être partitionné en trois classes de huit sommets figurant sur un plan de même type (figure 2.3). Chaque classe correspond à un ensemble de sommets associés à la même involution sans point fixe (12) (34), (13) (24) ou (14) (23).

Ces trois plans peuvent être repérés sur la figure.2.1.

Pour P_n quelconque : il y a $r = (n-1)(n-3) \dots 1$ involutions, sans point fixe pour n pair, avec un point fixe pour n impair. A chacune de ces involutions correspond une symétrie de P_n par rapport à un hyperplan passant par $\frac{n!}{r} = n(n-2) \dots 2$ sommets placés comme sur l'axe de la figure dépliée 2.3 pour n pair, et comme sur celui de la figure 3 pour n impair. Toutes les façons de planter P_n sur les sommets d'un tel hyperplan donné déterminent la même symétrie m par rapport à cet hyperplan.

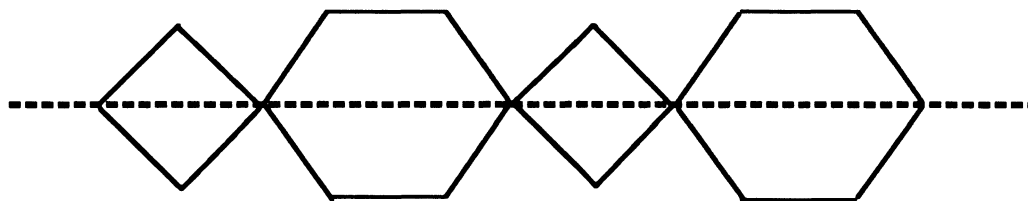


Figure 3

VIII - EXTENSION AUX ORDRES FAIBLES DE BRUHAT SUR LES GROUPES DE COXETER FINIS

Le treillis permutoèdre est un cas particulier d'ordre de Bruhat faible sur un groupe de Coxeter : le groupe symétrique S_n est groupe de Coxeter pour le système générateur $W = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ composé de transpositions $s_i = (i, i+1)$ avec les relations $(s_i s_{i+1})^3 = \text{Id}$, $(s_i s_j)^2 = \text{Id}$ pour $|i-j| > 1$.

Dans les cas finis les ordres faibles de Bruhat sont des treillis [4][5].

Les résultats démontrés ici peuvent s'étendre aux relations d'adjacence associées aux ordres faibles de Bruhat. En particulier, le groupe des translations à droite d'un groupe de Coxeter fini est groupe d'automorphismes transitif ([6], p.10) et la formule : $|Aut| = |Aut_x| |orbite\ de\ x|$ permet de dénombrer Aut dès que l'on sait dénombrer Aut_x , c'est-à-dire le groupe d'automorphismes du treillis.

Dans une prochaine publication nous étendrons les techniques utilisées pour le permutoèdre aux principales familles de groupes de Coxeter finis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT, M., "Médiane, distributivité, éloignement", 1961. Repris dans *Mathématiques, et Sciences humaines*, 70, 1980, 131-142.
- [2] BARTHÉLEMY, J.P., GUÉNOCHE, A., HUDRY, O., "Median linear orders : Heuristics and a branch and bound algorithm", *European Journal of Operational Research*, 42, 1989, 313-325.
- [3] BARTHÉLEMY, J.P., MONJARDET, B., "The median procedure in data analysis : new results and open problems", *Classification and Related Methods of Data Analysis*, H.H. Bock Editor, Elsevier Science Publisher B.V., North-Holland, 1988, 309-316.
- [4] BJÖRNER, A., "Ordering of Coxeter group", *Comtemporary Mathematics*, Vol.34, 1984, 175-195.
- [5] BJÖRNER, A., WACHS, M.L., "Generalized quotients in Coxeter groups", *Transactions of the A.M.S.*, Vol.308, 1, July 1988, 1-37.
- [6] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6, Paris, Hermann, 1968.
- [7] COXETER, H.S.M., MOSER, W.O.J., *Generators and relations for discrete groups*, Berlin, Springer Verlag, 1965.
- [8] GUILBAUD, G.TH., ROSENSTIEHL, P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars, 1971, 71-100.
- [9] KREWERAS, G., "Représentation polyédrique des préordres complets finis", *Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars, 1971, 101-114.
- [10] MONJARDET, B., "Sur diverses formes de la "Règle de Condorcet" d'agrégation des préférences", *Math., Inf. et Sci. hum.*, n°111, 1990, 61-71.
- [11] SCHÜTZENBERGER, M., "Quelques remarques sur une construction de Schensted", *Math. Scand.*, 12, 1963, 117-128.
- [12] WIELANDT, H., *Finite Permutation Groups*, New York, Academic Press, 1968.