MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

STÉPHANE CALLENS

Ensemble, mesure et probabilité selon Émile Borel

Mathématiques et sciences humaines, tome 110 (1990), p. 27-45
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1990__110__27_0>

Math. Inf. Sci. hum. (28e année, n°110, *1990*, p.27-45)

ENSEMBLE, MESURE ET PROBABILITE SELON EMILE BOREL

Stéphane CALLENS

RÉSUMÉ - *Pourquoi Emile Borel s'est-il subitement consacré à la théorie des probabilités vers 1905 ? Trois réponses semblent valables ; aussi, est-il proposé un fil conducteur unique, les usages des fractions continues dans les écrits de Borel. Ce qui fait l'unité de la démarche de Borel s'éclaire alors. Cavaillès avait souligné l'importance de la création cantorienne. Après Cantor, il resterait néanmoins à fabriquer les outils utiles pour le mathématicien. Là, réside l'oeuvre de Borel. Par l'intermédiaire de Borel, la création cantorienne réanime indirectement la notion de probabilité. Cependant, c'est surtout le cheminement de Borel, bien qu'il soit amené à s'écarter progressivement de Cantor, qui a été particulièrement fertile en nouvelles notions pour la théorie des probabilités.*
I. Trois biographies imaginaires - II. Un récit des commencements : ensemble, mesure, probabilité - II.1. Borel et la création cantorienne - II.2. Fractions continues et probabilité : un exemple générateur des conceptions contemporaines en théorie des probabilités - II.3. La raréfaction.

SUMMARY - Set, measure and probability according to Borel.
Why Emile Borel dedicated himself to the theory of probability, suddenly about 1905 ? Three replies seem valid ; so, it is proposed a single clue, the uses of the continued fractions in the Borel's writings. The unity of the Borel's approach appears thereby. Cavaillès has stressed the importance of the Cantor's creation. After Cantor, nevertheless it remained to produce useful tools for the mathematicians. The Borel's work stays there. By the Borel's intercession, the Cantor's creation indirectly vivifies the notion of probability. However, Borel's itinerary was the most fruitful in new notions for the theory of probability, though he departs from Cantor progressively.
I. Three imagined biographies - II. A story of beginning : set, measure, probability - II.1. Borel and the Cantor's creation - II.2. Continued fractions and probability : an instance generative of contemporaries notions in the theory of probability - II.3. The rarefaction.

Borel a opéré le rapprochement entre la notion de probabilité et celle de mesure d'ensemble. Ce geste est décisif dans l'histoire du corpus statistico-probabilitaire, aussi bien pour ce corpus mathématique en lui-même - Borel amène une rénovation complète - que pour la marche à suivre dans les applications.

Le XIXème siècle couplait avant tout la notion de probabilité avec celle de la mesure d'une grandeur physique, comme la position d'un corps céleste ou la taille des hommes. Or, chacun sait qu'aujourd'hui cette exploitation des mesures de grandeurs physiques n'a plus la place primordiale qui lui était accordée au dix-neuvième siècle dans la mise en oeuvre d'applications.

Cette transformation radicale peut être racontée de diverses manières. L'extrême diversité des écrits de Borel sur les probabilités permet d'imaginer comment divers biographes ayant chacun leur domaine de prédilection pourraient raconter cette inflexion à la fois unique (quelques articles déterminants d'un seul auteur) et plurielle (portant sur des domaines très divers: mathématiques, physique mathématique, sciences sociales et politiques). Pour éviter cette pluralité des récits, notre propos sera plus limité: tenir une chronique à travers les premiers articles de Borel sur les probabilités en suivant un fil conducteur, qui est le recours aux développements des nombres en fraction continue. Cette chronique partielle nous amènera à établir une relation entre les débats sur la théorie des ensembles et la rénovation du calcul des probabilités opéré par Borel et ses successeurs.

I - TROIS BIOGRAPHIES IMAGINAIRES.

Émile Borel a laissé un ensemble considérable de travaux et de réflexions sur les probabilités. Pourtant, il ne s'y est intéressé qu'après de très nombreux travaux sur la théorie des fonctions[1].

Ses premiers travaux sur les probabilités dénotent une pluralité d'approche. Les trois articles les plus importants dans cette période de 1905-1909 où Borel aborde le calcul des probabilités traitent de questions absolument distinctes l'une de l'autre: quoi de commun entre une réflexion sur les principes de la théorie cinétique des gaz, une sur la valeur pratique du calcul des probabilités et une sur les probabilités dénombrables ?[2]

Dans la dizaine d'ouvrages que Borel a consacré à partir de 1909 aux probabilités, il est possible de détailler trois itinéraires de Borel qui, ensemble, par leurs entrelacs s'additionnent pour constituer un imposant corpus.

Pour dégager la notion de probabilité de Borel, les opinions formulées dans des dialogues avec des personnalités marquantes du début de ce siècle peuvent également servir de base de départ. L'originalité des conceptions sur la notion de probabilité de Borel est mise en relief par des prises de position devant des interlocuteurs très divers : mathématicien, économiste, philosophe.

Borel marque ses distances par rapport aux trois ensembles de travaux sur la notion de probabilité de l'entre-deux-guerres. En effet, il formule des réserves à l'encontre du courant axiomatique. Puis il fournit une étude très détaillée de la notion de probabilité chez Keynes, et se reconnaît peu, semble-t-il, dans la notion de probabilité telle que la développe Reichenbach.

Trois types de réflexion peuvent encore une fois être distingués, celle interne aux mathématiques du probable, celle plutôt liée à une "mathématique sociale" comprise dans un sens assez large, et celle liée à des travaux de physique mathématique.

Ce rapide inventaire permet de s'apercevoir que les documents existent pour concevoir trois biographies de Borel distinctes, selon que l'accent sera mis sur l'aspect "mathématique du probable", l'aspect "sciences sociales" ou l'aspect "physique mathématique".

Notre première biographie pourrait s'appuyer sur le témoignage de Borel en personne. A la fin de sa vie, Borel déclare, dans *L'imaginaire et le réel en mathématique et en physique*, que ses travaux ont porté principalement sur les fonctions de variable complexe. Cette première biographie serait un peu équivalente dans son intrigue à celle que Poincaré trouvait dans la vie de

[1] Le premier article de Borel sur les probabilités porte le numéro 93 dans la liste de ses travaux par année de publication. Émile Borel, Remarques sur certaines questions de probabilités, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t.33, p.123-8.

[2] Émile Borel, Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. *Annales de l'École Normale*, 3ème série, tome 23, p. 9-32; La valeur pratique du calcul des probabilités, *Revue du Mois*, t. 1, p. 424-437; Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. 27, p. 247-270.

Weierstrass. Poincaré résumait la vie de Weierstrass par la poursuite d'une théorie des fonctions elliptiques ; de même, l'itinéraire intellectuel de Borel prend sa source dans une réflexion sur l'extension qu'il pense possible de la théorie des fonctions analytiques de Weierstrass. Borel poursuit pendant un quart de siècle, de 1892 à 1917, les *Fonctions monogènes uniformes de variables complexes* dont il cherche à montrer l'existence, niée par Weierstrass; ce qu'il finit par faire effectivement dans un ou rage paru en 1917, alors que dans sa thèse, en 1894, il avait réfuté l'opinion de Weierstrass sans construire effectivement une telle fonction. Pour rendre cette construction possible, il a besoin de théoriser les manipulations mathématiques qu'il fait sur les domaines où la condition de monogénéité est vérifiée. En particulier, il a dû préciser dès sa thèse, ce qu'il entendait par mesure d'ensemble.

Dans ce premier itinéraire Borel s'approche uniquement de façon formelle de la notion de probabilité, qui est aussi une mesure d'ensemble. Probabilité et mesure sont toutes deux des fonctions additives d'ensemble, et c'est sous le signe d'un tel rapprochement que Borel écrit son premier article sur les probabilités en 1905 [3].

Voilà la trame d'une première biographie qui pourrait être amplement développée. Mais le témoignage de Fréchet permet déjà d'en imaginer une autre : Fréchet établit une corrélation entre la dérive de Borel de l'analyse mathématique pure vers le calcul des probabilités et sa participation de plus en plus active à la vie publique.

Notre premier biographe était versé dans l'histoire de l'analyse mathématique; notre second biographe sera donc un historien spécialiste des débats législatifs et de la vie publique. Il ne manquerait pas de noter, à la suite de Fréchet, que Borel commence à s'intéresser aux probabilités au moment où il crée une revue, la *Revue du mois*, première fédération d'une république des professeurs dont émaneront Painlevé et le Cartel des Gauches.

Admettons donc que je sois cet historien spécialiste des constitutions et de la politique de l'entre-deux-guerres et que je veuille raconter pourquoi Borel s'est autant intéressé aux probabilités.

Borel serait pour moi, un bon représentant des courants rationalisateurs de l'entre-deux-guerres ; quelqu'un qui a développé une mathématique sociale dont le programme est, selon les termes même de Borel, de "rechercher des modes d'organisation suffisamment simples pour améliorer des institutions politiques, économiques et intellectuelles du pays, en faisant appel à une consultation des compétences et de la représentation professionnelle". Ce programme s'inscrit dans une stratégie défensive du fonctionnement parlementaire et démocratique devant les tendances dictatoriales de l'Europe d'alors. Je citerai les débats sur l'organisation institutionnelle de la statistique, sur les sondages, sur la théorie des jeux, et les débats psychologiques et logiques sur la notion de probabilité. Je noterai comment Borel se démarque de la conception subjective et logiciste de la probabilité par Keynes, par exemple, tout en acquiesçant à sa conception de la probabilité" qui n'existe pas abstraitement mais relativement à un certain corps de connaissances" [4].

Force est de constater que nous n'avons pas pour autant avec ces deux biographies épuiser toutes les ressources du corpus borélien. Nous avons quasiment ignoré la filiation spirituelle entre Poincaré et Borel et pour ne s'en tenir qu'au premier article paru dans chacun des domaines, nous avons totalement passé sous silence celui sur les principes de la théorie cinétique des gaz.

---

[3] Émile Borel, Remarques sur certaines questions de probabilité, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 33, p. 123-128.

[4] Émile Borel, *Probabilité et Certitude*, chapitre 1, Paris, 1950.

On est conduit à imaginer un troisième biographe féru des implications philosophiques des débats physico-mathématiques. Dès sa thèse, Borel critique le matériel mathématique mis en oeuvre en physique ; il poursuit par d'importantes contributions aux débats sur les mécaniques statistiques ; enfin, il est le maître d'œuvre d'un *Traité du calcul des probabilités*, entreprise qui a pour précédent celle de Laplace et qui s'accompagne également d'un essai philosophique. L'ouvrage sur *le Hasard* que Borel fait paraître en 1914 pourrait être largement commenté par ce troisième biographe : alors que Bertand mettait l'accent sur les régularités issues d'actions non coordonnées, sur les *Lois du hasard*, Borel insiste sur la notion d'entropie d'un système et sur une "loi unique du hasard" qui dit que les miracles bien que possibles sont à négliger en pratique, ce qu'il illustre par le mythe des singes dactylographes, pillant un stock de machines à écrire et reproduisant tous les volumes de la Bibliothèque Nationale.

Probablement, le colloque de nos trois biographes pourrait se poursuivre très longtemps. Souvent les ouvrages de Borel présentent un aspect composite, puisant des thèmes dans les trois domaines : pour prendre l'exemple de son ouvrage intitulé *Probabilité et certitude* dans le premier chapitre, il parle de la définition de la probabilité selon Keynes, dans le second des sondages de l'opinion publique, dans le troisième et le cinquième de questions mathématiques, tandis que le quatrième est consacré à la théorie cinétique des gaz et le sixième à l'expansion de l'Univers... Ce grand brassage suggère que la réflexion sur un thème peut se nourrir d'une réflexion sur une question d'un domaine très différent pour peu qu'on consacre la notion de probabilité dans un rôle fédérateur. Ce jeu de va-et-vient est en quelque sorte constitutif de ses ouvrages.

Les trois thèses brièvement esquissées ici me paraissent tout-à-fait défendables : Borel s'est intéressé au calcul des probabilités, il a développé une philosophie civique à partir de la "valeur pratique" du calcul des probabilités ; enfin, l'interrogation sur les grandes théories de physique statistique ne l'a jamais quitté. Bien plus, négliger un de ces aspects fait tout de suite apparaître un manque que ressentira plus fortement le mathématicien si l'on néglige l'aspect mathématique, l'historien si l'on néglige tous ses écrits sur la philosophie pratique qu'il tire du calcul des probabilités ; enfin, l'historien des sciences, si l'on néglige les contributions de physique mathématique.

Comment concilier ces points de vue ? Comment centrer l'exposé de l'ensemble des opinions de Borel sur ce qui confère leur indéniable unité ?

Nous nous proposons maintenant de revenir sur quelques-uns des premiers textes de Borel en essayant de retrouver la trace du cheminement qui l'a amené aux probabilités. Un exposé de Cantor était fondé sur l'expression d'un nombre dans son développement en fraction continue. En notant les références de Borel à cette théorie des fractions continues arithmétiques, il nous semble apparaître un double mouvement chez Borel de détachement progressif des théories cantoriennes et d'intrusion de plus en plus franches dans le domaine du calcul des probabilités. Le cheminement de Borel nous semble donc résumé par le titre de cet exposé : ensemble, mesure, probabilité.

II - UN RÉCIT DES COMMENCEMENTS : ENSEMBLE, MESURE, PROBABILITÉ.

Les derniers ouvrages de Borel relèvent d'une thésaurisation progressive, dont on peut assez aisément distinguer les grandes étapes. Jusqu'en 1905, date du célèbre débat sur la théorie des ensembles, la totalité de ses articles portent sur la théorie des fonctions. En 1906, paraît l'article sur la *théorie cinétique des gaz* et une exposition sommaire de sa conception du calcul des probabilités, démarquée de celle de Bertrand. L'actualité scientifique est alors dominée par les nouvelles théories physiques. Celle d'une mathématique sociale est plus tardive; la citation programmatique faite précédemment de Borel date de 1920, dans le *Journal de la Société de*

Statistique de Paris. Trois grands moment ponctuent les travaux de Borel: le débat sur les ensembles en 1905, l'énoncé des nouvelles théories physiques et chimiques avant 1920, enfin l'actualité européenne après la première guerre mondiale.

Mais nous laisserons ici de côté ces questions liées à la physique mathématique, ou à une philosophie civique, pour nous consacrer au centre premier des réflexions de Borel - centre unique même dans ses écrits jusqu'en 1905 - c'est-à-dire l'analyse mathématique.

Un instrument des débats lors de la création de la théorie des ensembles est la théorie des fractions continues arithmétiques. Il apparaît comme un leitmotiv dans les ouvrages de Borel, et j'ai pris comme fil conducteur toutes les mentions faites de cet instrument. Il n'y a pas chez Borel de construction formelle de l'ensemble des nombres réels à partir des nombres entiers : par contre le "meilleur" moyen de s'approcher d'un nombre irrationnel à partir des nombres rationnels est donné par les fractions continues.

Tout réel positif r peut se développer en fraction continue ; un algorithme simple fournit les quotients incomplets a_n successifs

$$a_0 = \mathrm{Ent}(r)\,,\ a_1 = \mathrm{Ent}\frac{(\ 1\ )}{(r - a_0)}\ ,\ a_2 = \mathrm{Ent}\frac{(\ 1\ )}{(\frac{1}{r - a_1} - a_1)}\ ,\ a_3 =$$

avec $$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots\cdots}}\ ,$$

les a_n sont des entiers quelconques à la différence de la représentation en développement décimal. On écrit, par exemple :

$$\pi = 3{,}14159... = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + ...}}}}$$

Les fractions obtenues quand on s'arrête à un ordre donné s'appellent les réduites (par exemple 22/7 est la réduite d'ordre 1 pour π).

On démontre que l'approximation par une réduite est meilleure que l'approximation par d'autres fractions plus simples qu'elle.

En suivant ce fil conducteur, on peut répartir les usages qui sont faits de l'instrument en trois périodes :
1) *Borel et la création cantorienne*,
2) *les probabilités dénombrables*,
3) *la théorie de la raréfaction et la classification des ensembles de mesure nulle*.

Dans chacune de ces périodes, les fractions continues interviennent de façon différente :

1) De la thèse (en 1894) aux premiers écrits sur les probabilités (après 1905), deux considérations essentielles apparaissent dès la thèse de 1894, celle de mesure d'ensemble, et la propriété fondamentale des espaces que Fréchet va appeler en 1906 compacts. Les fractions continues y sont un instrument exploratoire du continu, un moyen de mettre un peu d'ordre, de ranger les approximations successives d'un nombre.

2) L'article de Palerme sur les probabilités dénombrables paru en 1909, présente des nouvelles conceptions en s'appuyant sur de nouveaux exemples, dont celui des probabilités des quotients incomplets des fractions continues.

3) Enfin Borel fait plusieurs présentations de sa classification des ensembles de mesure nulle. L'une d'entre elles figure dans *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions* qui paraît en 1922 et qui est le douzième ouvrage de Borel, les premiers exposés datant de 1912[5]. Les fractions continues interviennent pour générer des ensembles de mesure nulle d'une grande diversité.

1 - *Borel et la création cantorienne.*

Borel n'est pas l'introducteur des travaux de Cantor en France. Ceux-ci sont présentés par Hermite et utilisés par Weierstrass et Poincaré. Fréchet le nomme l'initiateur, celui qui est à la source de nouveaux commencements. L'ouvrage *Leçons sur la théorie des fonctions*, paru en 1898, est en cela exemplaire, puisqu'il inaugure une série de séminaire, qui constitue déjà en soi un mode de travail tout-à-fait nouveau, avec pour principaux intervenants Borel, Drach, Baire, Lebesgue. Dans ces *Leçons sur la théorie des fonctions*, il s'agit, pour Borel, de consituer des Eléments d'analyse : intégrer les derniers travaux dans une vue synthétique, en présentant le plus simplement possible les notions premières. Les trois premiers chapitres portent sur les ensembles
et l'approximation des commensurables, les trois autres sur la notion de fonction de variable complexe et le prolongement analytique.

Contentons-nous de suivre notre fil conducteur, c'est-à-dire, l'emploi de fractions continues : elles interviennent dans les trois premiers chapitres de ces *Leçons sur la théorie des fonctions*.

Dans le chapitre 1, il définit la puissance d'un ensemble, à la suite de Cantor : deux ensembles sont dit avoir même puissance lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance telle qu'à tout élément de chacun d'eux, corresponde un élément et un seul de l'autre (p.5). Il présente des exemples d'ensembles dénombrables et de ceux qui ont la puissance du continu. Il reprend la démonstration de Cantor qui permet l'affirmation que l'ensemble des points intérieurs au carré a même puissance que l'ensemble des points compris entre 0 et 1.

L'ensemble des points à coordonnées incommensurables compris entre 0 et 1 a même puissance que l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1. On peut, à tout système de deux nombres incommensurables x, y compris entre 0 et 1 faire correspondre un nombre incommensurable z compris entre 0 et 1, de manière qu'à tout couple x, y corresponde un seul nombre z et, à tout nombre z, un seul couple x, y. Il est très aisé d'établir cette correspondance, (et c'est comme cela qu'elle était établie dans l'article de Cantor écrit en 1877 et publié en français dans les *Acta mathematica* de 1883) en réduisant en fraction continue illimitée un nombre z compris entre 0 et 1, $z = (a_1, a_2, a_n, ...)$ et d'en extraire 2 suites a_i, a_j d'après une loi déterminée pour avoir deux nombres $x = (a_i)$, $y = (a_j)$.

La démonstration est valable pour n quelconque de dimensions. Borel remarque que cela met à mal un présupposé des traités de logique selon lequel "le tout es plus grand que la partie". Mais le projet de Borel dans ces *leçons* consiste à rédiger des éléments valables dans divers domaines mathématiques. L'important n'est donc pas la cohésion logique de théorie des ensembles même si elle appelle une nouvelle logique en subvertissant les logiques traditionnelles, mais "l'utilité

[5] Au moment où il en "termine" avec Weierstrass. Il a alors mis au point sa démonstration sur l'existence de fonctions monogènes non analytiques, ce qui sape un des piliers de l'édifice Weierstrassien puisque cela conduit à l'incomplétude nécessaire du projet d'arithmétisation de l'analyse qui faisait découler la fonction analytique des séries.

pratique" qu'il définit comme le lien avec d'autres parties des mathématiques. Rédiger des Éléments et non rechercher des fondements dans une démarche logique ; telle est son optique. Pourquoi la hiérarchie des puissances d'ensemble selon Cantor est-elle digne de figurer dans ces éléments ? parce qu'elle intervient dans de "nombreux travaux originaux" dans lesquels on s'autorise à négliger un ensemble dénombrable devant un ensemble ayant la puissance du continu. Chez Borel, il y a toujours cette démarche de repli vers la constitution du tronc commun des différentes études, démarche visible dans tous les titres de ses ouvrages intitulés: "*Leçons de ..., Introduction à ...., Élements de ...*".

L'économie générale du chapitre 2 repose sur la démonstration de la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques, cela amène à se poser la question de savoir si et comment on peut définir une infinité non dénombrable de nombres transcendants. Liouville avait proposé un procédé qui amène effectivement à un ensemble de nombres de Liouville qui a la puissance du continu. Les fractions continues permettent à Borel d'affirmer qu'on peut trouver une infinité de nombres transcendants se comportant au point de vue de l'approximation comme les nombres algébriques.

Le recours à la théorie des fractions continues lui permet simplement d'affirmer l'existance de réels, dans un intervalle, par exemple, que l'ensemble triadique de Cantor contient des nombres incommensurables (p. 39). Borel n'a pas besoin d'une axiomatique de l'ensemble des réels, les fractions continues lui permettent en quelque sorte cette économie.

Dans le mémoire sur la *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* de 1903, il déclare que dans ses travaux et dans ceux de Lebesgue sur l'intégrale, encore inédits au moment où il écrit, "notre méthode" commune aux deux mathématiciens est différente : "on construit le continu au moyen de petits intervalles entourant des points isolés, au lieu d'arriver à ces points par la subdivision indéfinie de l'étendue donnée d'avance ; la construction est faite, si l'on peut ainsi dire, du dedans et non plus du dehors"[6]. Non pas une théorie de continu, mais diverses approches exploratoires qui conduiront aux résultats connus en théorie de la mesure de l'intégration et pour la définition de la compacité.

Pour ce qui est des fractions continues, le principal résultat contenu dans ce mémoire et qu'$1/\sqrt{5}$ est le plus petit nombre limitant supérieurement l'écart d'un couple de réduites consécutives ou du couple suivant. Ce qui peut se dire autrement : sur trois réduites consécutives l'une au moins vérifie l'inégalité :

$$\left| r - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{Q_n^2}$$

Il étudie également l'éloignement des nombres irrationnels et rationnels. Les fractions continues permettent de définir aisément des classes étendues de nombres irrationnels relativement éloignés ou rapprochés des nombres rationnels. Les divers développements qu'il a donné à ces calculs se trouvent également dans les *Leçons sur la théorie de la croissance*, et les *Éléments de la théorie des ensembles*.

Dans le texte *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, Borel donne quelques explications sur la formation de son programme de recherche de cette époque auquel il associe la théorie des fractions continues numériques [7].

---

6 Émile Borel, *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, reproduit dans les *Œuvres*, t. 3, p. 1445

7 L'encart n° 1 reproduit les quatre premiers paragraphes de l'introduction à cet article de Borel.

Le point de départ en est Weierstrass et son affirmation que "toutes les mathématiques peuvent se déduire de la seule notion du nombre entier". Henri Poincaré résumait ainsi l'oeuvre mathématique de Karl Weierstrass :
"Tout dérive donc du nombre entier (...) le continu lui-même se ramène à cette origine et toutes les égalités qui font l'objet de l'Analyse et où figurent des grandeurs continues ne sont plus que des symboles, remplaçant une multitude infinie d'inégalités entre nombres entiers"[8] .

A partir de là, deux points de vue, deux approches ont été empruntées. L'une fondée sur la définition logique des nombres, l'autre ne "se préoccupe que des valeurs numériques, de la grandeur des nombres". Dans celle-ci : "la théorie des fractions continues numériques joue ici un rôle capital. Elle fournit les nombres rationnels les plus approchés d'un nombre quelconque" (paragraphe 2). Mais surtout la théorie des fractions continues permet de concilier les deux approches : il interprète comme tel le théorème de Lagrange qui dit que tout nombre positif racine d'une équation du second degré à coefficients entiers admet un développement en fraction continue périodique. Le théorème de Lagrange met en relation la complexité du procédé d'obtention d'un nombre algébrique et une particularité de l'approximation de ce même nombre par un développement en fraction continue.

Encart n° 1 : CONTRIBUTION A L'ANALYSE ARITHMETIQUE DU CONTINU

par M. Emile BOREL

Introduction

1. Toutes les Mathématiques peuvent se déduire de la seule notion du nombre entier ; c'est là un fait aujourd'hui universellement admis. Voici ce que l'on entend généralement par là : les notions fondamentales où intervient l'idée de limite (nombres incommensurables, dérivées, intégrales définies, intégrales d'équations différentielles, etc.) sont définies successivement à partir du nombre entier ; ces notions une fois acquises, on peut les utiliser sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir dans toutes circonstance leur définition au moyen des nombres entiers. Telle est, dans ses grandes lignes, la méthode de Weierstrass.

On peut se placer à un point de vue strictement arithmétique, comme l'a fait Kronecker en Algèbre, et comme M. Jules Drach a récemment tenté de le faire en Analyse[1]. Ce nouveau point de vue peut êtrre caractérisé par le fait que l'on ne fait jamais intervenir dans chaque question qu'*un nombre limité de nombres entiers* au moyen desquels tous les éléments de la question sont explicitement définis. On arrive ainsi à définir les nombres algébriques et certains nombres transcendants uniquement au moyen des relations par lesquelles il sont reliés aux entiers, les signes opératoires étant définis uniquement par leurs propriétés fondamentales. Dans cette construction, l'idée de grandeur n'intervient en rien. On ignore d'ailleurs complètement ce que peut être un nombre incommensurable non défini *logiquement* et, d'après la marche même suivie, on n'en peut définir qu'une infinité dénombrable. Certains esprits verront là une lacune ; d'autres penseront, au contraire que, pratiquement, tout nombre, pour être connu effectivement, doit pouvoir *être caractérisé* par un nombre fini de mots et, par suite, doit trouver sa place dans le système de M. Drach (convenablement complété).

[8] *Acta Mathematica*, t.22, 1899, p. 16.

[1] M. Jules Drach a exposé ses idées dans la seconde partie de l'*Introduction à la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (d'après des Conférences de M. Jules Tannery, par Emile BOREL et Jules DRACH ; Paris, Nony ; 1895) et dans sa Thèse : *Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes* (Paris, Gauthier-Villars ; 1898, et *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1898).
Ces idées me paraissent mériter d'être plus connues (en Algèbre elles ne sont pas sans analogie avec celles de Kronecker, tout en s'en distinguant essentiellement en bien des points) ; il y aura lieu, bien entendu, de ne pas se borner comme l'a fait jusqu'ici Drach à étudier les équations différentielles et aux dérivées partielles, mais d'attaquer par la même méthode les autres procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres et des fonctions. Cette remarque appartient d'ailleurs à M. Drach [note d'Emile Borel].

Si l'on considère ainsi un nombre (rationnel, algébrique ou transcendant) caractérisé par un certain nombre d'*entiers* et par certaines *opérations*, il est clair qu'on est conduit à regarder ce nombre comme d'autant plus compliqué que ces entiers sont plus *nombreux* et plus *élevés* et ces opérations plus *nombreuses*. La complication d'un nombre (à partir des entiers, c'est-à-dire à partir de l'unité) ; le nombre ou symbole qui mesurera cette complication sera dit la *hauteur* du nombre dans le système considéré.

2. Un point de vue presque opposé au précédent consiste à ne se préoccuper que des *valeurs numériques*, de la *grandeur* des nombres, sans s'inquiéter de leur définition logique ; on recherche alors les nombres rationnels approchés et c'est par cette voie que les entiers apparaissent. La théorie des fractions continues numériques joue ici un rôle capital. Elle fournit les nombres rationnels les plus approchés d'un nombre *quelconque*. Dans un grand nombre d'autres questions interviennent ainsi des relations de *grandeur* entre certains systèmes d'entiers et un ou plusieurs nombres incommensurables quelconques. Parmi les plus célèbres, citons la proposition de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction uniforme à trois périodes et les beaux travaux de Lejeune-Dirichlet.

Vinrent ensuite les mémorables recherches arithmétiques de Charles Hermite, qui furent suivies par celles de Kronecker et de M. Minkowski sur les systèmes de formes linéaires à coefficients quelconques et à indéterminées entières. M. Minkowski a rassemblé, dans sa *Geometrie der Zahlen*, malheureusement encore inachevée, les principaux résultats acquis dans cet ordre d'idées, et en grande partie dus à ses propres recherches.

M. Minkowski a montré que l'on pouvait arriver à des résultats nombreux et importants par une méthode uniforme, basée sur un petit nombre de principes simples et intuitifs.

Rappelons en quoi elle consiste, en nous bornant au cas le plus simple, pour lequel elle paraît due à Lejeune-Dirichlet. Si l'on a $n + 1$ points sur une droite, dans un intervalle dont la longueur est égale à n, il y a au moins deux de ces points dont la distance est inférieure à 1 (sauf dans le cas particulier où les $n + 1$ points ont les coordonnées $0, 1, 2, 3, ..., n - 1, n$, lorsque l'on prend pour origine l'une des extrémités de l'intervalle). Cette proposition se démontre en divisant l'intervalle donné en n parties égales ; comme il y a $n - 1$ points, il y a au moins un intervalle partiel qui en renferme deux et la distance de ces deux points est inférieure à 1 (une discussion facile relative aux points coïncidant avec les extrémités conduit au seul cas exceptionnel signalé).

3. Les nombres incommensurables sont ainsi définis de deux manières essentiellement différentes, à partir des nombres entiers ; il est du plus grand intérêt d'étudier les relations entre ces deux définitions. Le premier résultat, à ce point de vue, est dû à Lagrange qui a démontré, en 1770, la périodicité du développement en fraction continue des irrationnelles quadratiques. Les résultats obtenus par M. Minkowski relativement à la périodicité de certains algorithmes numériques pour les nombres algébriques de degré déterminé[2] doivent être regardés comme la généralisation, à un certain point de vue, du résultat de Lagrange.

Les résultats de Liouville sur l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels le généralisent dans une autre direction, bien qu'ils ne fassent pas connaître une propriété *caractéristique* des nombres algébriques.

On peut aussi obtenir des résultats très simples, soit au sujet de l'approximation des nombres algébriques les uns par les autres, soit au sujet de l'approximation par des nombres rationnels ou algébriques de certains nombres transcendants se rattachant à la fonction exponentielle ; ces dernières recherches se rattachent à celles qui ont été inspirées par le célèbre Mémoire de Charles Hermite sur la transcendance du nombre e. J'ai déjà indiqué certains résultats à ce sujet[3] ; je compte y revenir en utilisant les méthodes de ce Mémoire[4].

Ces diverses recherches ont une même conclusion générale : la rapidité de l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels et en relation simple avec la *hauteur* de ces nombres, telle que nous l'avons définie tout à l'heure.

C'est là un principe dont l'importance à la fois théorique et pratique me paraît devoir être considérable.

4. Ce Mémoire est consacré exclusivement aux nombres rationnels et à leur emploi pour l'approximation des incommensurables *quelconques*. Parmi les résultats nouveaux qui y sont renfermés, je citerai notamment le suivant :

---

[2] *Ein Kriterium für algebraischen Zahlen* (Göttinger Nachrichten, 1 février 1889). *Ueber periodische Approximation algebraischer Zahlen*, *Acta mathematica*, t. XXVI) [note d'Emile Borel).

[3] *Comptes rendus*, 6 mars 1899 [note d'Emile Borel].

[4] Comparez ma note dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1903 [note d'Emile Borel].

Il est possible de déterminer a priori *une infinité d'intervalles* (A_n, B_n) tels que A_n et B_n *augmentent indéfiniment avec n et tels que, x étant un nombre incommensurable quelconque compris entre 0 et 1, il existe des nombres* p_n, q_n, *vérifiant les inégalités*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \frac{1}{q_n^2 \sqrt{5}}, \qquad A_n < q_n < B_n .$$

Ce théorème est d'ailleurs susceptible de nombreuses généralisations.

Le programme de Weierstrass était un programme d'arithmétisation de l'Analyse : Weierstrass définissait la fonction à partir "des opérations arithmétiques fondamentales". "Dès que celles-ci sont définies, dit Weierstrass, on obtient la notion de fonction, qui est déduite, au moyen des opérations fondamentales des quantités variables considérées".

Que Borel exprime en 1903 un programme d'arithmétisation du continu marque combien était important la place de l'édifice Weierstrassien pour les mathématiciens de son temps, mais aussi il caractérise sa mathématique en la démarquant de celle de Weierstrass. La mathématique de Borel va être celle du support des fonctions, et non de l'approximation des fonctions par des expressions polynomiales comme celle de Weierstrass.

L'article de 1905, *Remarques sur certaines questions de prob ·bilités* ne fait pas recours à la théorie des fractions continues. Pourtant, il ne peut manquer d'être signalé : ce premier article de Borel sur les probabilités opère un rapprochement entre la théorie de la mesure d'ensemble et de l'intégration, d'une part, et la notion de probabilité, d'autre part. Cependant, il faut noter que les exemples illustrent bien la volonté de Borel de poursuivre son programme d'analyse arithmétique du continu[9] . L'article de Palerme apporte plus : ce n'est plus quelques "remarques", mais un résultat fondateur d'une nouvelle dimension à donner au calcul des probabilités.

2 - *Fractions continues et probabilité : un exemple générateur des conceptions contemporaines en théorie des probabilités*

Fréchet présente l'article de Palerme sur les *probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* comme la brêche dans lequel se sont engouffrés toute la génération de probabilistes (Paul Lévy, Cantelli, Slutsky, Steinhaus, Khintchine, Kolmogoroff et Fréchet lui-même) qui ont mis au point la théorie contemporaine des probabilités.

Paul Lévy résumait comme suit l'apport de l'article de Palerme (au-delà du résultat connu aujourd'hui sous le nom de lemme de Borel-Cantelli) :

"Le mémoire des Rendiconti di Palermo a ouvert au calcul des probabilités un champ de recherches tout nouveau (...). Le point de vue classique, celui de Bernoulli consiste à étudier les propriétés asymptotiques de la probabilité d'un événement qui ne dépend que d'un nombre fini d'épreuves ; au point de vue de M. Borel, c'est cet événement lui-même qui dépend de toutes les épreuves. Ainsi, dans le cas d'un nombre dont les décimales sont déterminées par des tirages au sort (indépendants et à chances égales) le théorème de Bernoulli nous apprend que si n est grand, la fréquence du chiffre 3 dans les n premières décimales est très probablement très peu différente de 1/10 ; cela est d'autant plus exact que n est grand ; mais cela ne veut pas dire que

---

[9] L'exemple traité dans le paragraphe 4 de l'article est "Quelle est la probabilité pour que x, assujetti à être compris entre 0 et 1, soit commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre ?". L'article est reproduit dans les *Œuvres* - Émile Borel, *Œuvres*, t.2, p.989.

cette fréquence tende vers 1/10. M. Borel va beaucoup plus loin en nous disant qu'elle tend presque sûrement vers cette limite"[10].

Au delà de la simple classification des différents modes de convergence, Borel se situe bien à un point de rupture dans l'histoire du calcul des probabilités et des statistiques - bien plus important, à l'avis de ses contemporains, que l'axiomatique de Kolmogoroff qui ne fait qu'unifier des travaux antérieurs. Ces travaux de Kolmogoroff n'ont, en leur temps, eu aucun écho externe au monde des mathématiques ; à la différence des travaux de Borel qui trouveront rapidement un écho large dans le public à travers des livres comme *Le Hasard* qui paraît en 1914.

Dans le préambule de l'article de Palerme, Borel indique pourquoi il se tourne vers cette étude des probabilités, dénombrables en l'occurrence.

"Beaucoup d'analystes mettent au premier rang la notion du continu ... J'ai indiqué récemment en quoi cette notion de continu, considérée comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable, me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne effectivement dans nos raisonnements"[11].

Dans l'itinéraire intellectuel de Borel, l'article de Palerme se place au moment où il se détache complètement du projet cantorien de définition du transfini. Où il rompt avec Cantor, pourrait-on dire, alors que les *Leçons sur la théorie des fonctions* constituaient déjà une séparation, marquée par des réserves importantes. Il s'en explique à la rencontre internationale de Rome de 1908 :

"J'émettais il y a dix ans, dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, une opinion atténuée" nos connaissances précises sur les puissances diverses n'excèdent guère la remarque suivante : il y a des ensembles dénombrables et des ensembles non-dénombrables, cette dernière notion étant *surtout* négative". J'écrirais aujourd'hui "n'excédent pas la remarque suivante" et "cette notion étant *purement* négative" [12].

Borel alors s'interroge : Comment concilier la notion du continu avec mon opinion sur notre défaut de notion des ensembles non dénombrables ? "Le continu, poursuit Borel, ne m'apparaît jamais comme donné dans son intégralité, au point de vue arithmétique (...) il n'est aucun de ses éléments dont nous puissions actuellement affirmer qu'il ne peut pas être défini, mais l'ensemble des éléments effectivement définis sera toujours dénombrable; c'est seulement sous une forme négative que nous sommes assurés de ne jamais l'épuiser ainsi"[13].

D'où l'idée de l'article de Palerme : on n'a jamais fait que parler de probabilités discrètes ou continues ; une telle classification apparaît incomplète, il faut considérer les ensembles dénombrables et les probabilités attachées aux éléments de ce type. Soit par exemple, l'ensemble des nombres algébriques. Et "l'on demande la probabilité pour qu'un nombre choisi arbitrairement dans ce corps appartienne à une classe donnée"[14]. L'exemple cité montre l'attrait de la notion de probabilité : elle donne un instrument exploratoire plus puissant que celle de cardinal d'ensemble, dont les possibilités apparaissent à Borel de plus en plus limitées. La définition induite de la probabilité qu'il adopte est celle d'une fonction additive d'ensemble - définition liée à la considération d'ensemble dénombrable, tout comme les ensembles discrets

---

10 Cité dans les *Œuvres* de Borel, t. 1, p. 221.

11 Reproduit dans les *Œuvres* de Borel, t.2, p.1055.

12 Émile Borel, Sur les principes de la théorie des ensembles, reproduit dans les *Œuvres*, t. 3, p. 1267.

13 *Œuvres*, t.3, p. 1269.

14 Article de Palerme, *Œuvres*, t.2, p. 1079.

induisent une définition liée à une proportion, ou les ensembles continus une définition de la probabilité liée à un rapport de mesures d'ensemble.

Borel classe en trois catégories les problèmes de probabilités dénombrables :

1°) Le nombre de cas possibles est limité dans chaque épreuve, mais les épreuves sont en infinité dénombrable. Les fractions décimales servent de réservoir d'exercices pour cette première catégorie. Par exemple, soit un nombre déterminé, si l'on regarde comme cas favorables ceux où se présente un chiffre déterminé, les décimales successives correspondent à l'infinité dénombrable des épreuves.

2°) Les cas possibles sont en infinité dénombrable, et le nombre des épreuves est limité.

3°) Les cas possibles sont en infinité dénombrable, les épreuves également. Les fractions continues servent ici de réservoir d'exercices pour cette troisième catégorie. Par exercice, j'entends le moyen de se faire la main. Il suffit de considérer le développement illimité en fraction continue d'un nombre irrationnel : cela donne une infinité dénombrable de quotients incomplets où chacun peut acquérir une infinité dénombrable de valeurs.

L'encart n° 2 sur les probabilités des quotients incomplets d'une fraction continue résume la plupart des calculs liminaires présentés dans l'article de Palerme à propos des fractions continues. Nous adopterons une notation avec un double indice $p_{nk} = P\ \{a_n = k\}$, là où Borel adopte une notation en p_k.

Encart n° 2 : LES PROBABILITES DES QUOTIENTS INCOMPLETS D'UNE FONCTION CONTINUE

extrait de l'ouvrage d'Emile Borel,
***Eléments de la théorie des probabilités*, 1949, p. 257 à 260.**

73 - Considérons l'intervalle fondamental 0 - 1 et définissons la probabilité pour qu'un point irrationnel appartienne à un ensemble formé d'une infinité d'intervalles sans partie commune comme égale à la somme des longueurs de ces intervalles. On peut alors se proposer de calculer les probabilités pour que le quotient incomplet de rang donné d'une fraction continue soit égal à un entier donné.

Considérons d'abord le premier quotient incomplet a_1. Si l'on a

$$f = (k, a_2, \ldots)$$

k étant un entier donné, on en conclut

$$\frac{1}{k+1} < f < \frac{1}{k}$$

La probabilité p_k pour que a_1 soit égal à k est donc

$$p_k = \frac{1}{k\ (k+1)} \qquad (1)$$

On vérifie que l'on a bien

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.1.} + \ldots + \frac{1}{k\ (k+1)} + \ldots = 1$$

Dès que l'on passe au quotient incomplet a_2, le problème devient plus difficile, car il est aisé de voir que la probabilité pour que a_2 ait une valeur donnée dépend de la valeur de a_1. Plus généralement, si l'on donne a_1, a_2, ...a_n, on définit un intervalle, que l'on appelle intervalle de Baire d'ordre n et que l'on désigne par $(a_1,a_2,...,a_n)$. Les limites de cet intervalle sont

(2) $$\frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}$$

qui correspondraient aux valeurs $a_{n+1} = \infty$ (non atteinte) et $a_{n+1} = 1$. La probabilité pour que a_{n+1} soit égal à k correspond à la longueur de l'intervalle :

(3) $$\frac{k\, P_n + P_{n-1}}{k\, Q_n + Q_{n-1}}, \quad \frac{(k+1)P_n + P_{n-1}}{(k+1)Q_n + Q_{n-1}}$$

et est égale au rapport et à celle de l'intervalle (2) ; ce rapport est

(4) $$p_k = \frac{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}{(k\, Q_n + Q_{n-1})\,[(k+1)(Q_n + Q_{n-1})]}$$

ce qui peut s'écrire

(5) $$p_k = \frac{1+x}{(k+x)\,(k+1+x)}$$

en désignant par x le rapport $\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$; ce rapport peut prendre toute valeur rationnelle comprise entre 0 et 1 ;

la formule (5) se réduit à (1) pour $x = 0$; on peut donc négliger cette formule (1) et ne conserver que (5). pour nous rendre compte de la variation de p_k avec x, calculons sa dérivée

(6) $$\frac{dp_k}{dx} = \frac{k^2 - k - (1+x)^2}{(k+x)^2\,(k+1+x)^2}$$

Cette dérivée est constamment négative si $k = 1$ et constamment positive si $k \geq 3$. Pour $k = 2$, elle s'annule si l'on a

$$(1+x)^2 = 2$$

(7) $$x = \sqrt{2} - 1$$

On en conclut que l'on a, pour $k = 1$

(8) $$\frac{1}{3} < p_1 < \frac{1}{2}$$

et pour $k \geq 3$

(9) $$\frac{1}{k\,(k+1)} < p_k < \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

si $k = 2$, nous devons calculer ses valeurs, pour $x = 0$, $x = \sqrt{2}-1$ et $x = 1$; ces valeurs sont

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots\ ; \quad \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = 0{,}0857\ldots\ ; \quad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$$

On a donc

(10) $$\frac{3-2\sqrt{2}}{2} < p_2 < \frac{1}{6}$$

ce qui peut être remplacé par la formule plus simple, mais moins précise

(11) $$\frac{1}{12} < p_2 < \frac{1}{6}$$

c'est - à - dire que, pour $k = 2$, on a la formule

(12) $$\frac{1}{(k+1)(k+2)} < p_k < \frac{1}{k(k+1}\ ,$$

formule très différente de (9).

Si l'on voulait avoir une formule qui comprenne des formules (8) , (9) et (12), c'est-à-dire qui soit exacte pour toutes les valeurs de k, on pourrait écrire

(13) $$\frac{1}{2k(k+1)} < p_k < \frac{2}{(k-1)(k+2)}$$

Mais cette formule, très commode parce qu'elle est générale, est moins précise que l'ensemble des formules (8), (9) et (10).

Il faut bien se rendre compte de la signification de ces inégalités, elles expriment que chacun des p_k est compris entre certaines limites, mais que nous ignorons sa valeur exacte entre ces limites. Bien entendu, ces limites étant valables pour la valeur de p_k dans le cas où on donne l'intervalle de Baire $(a_1, a_2,...,a_n)$ sont également valables pour la valeur globale de p_k lorsque l'on considère un domaine formé d'une infinité dénombrable d'intervalles de Baire d'ordre quelconque et en particulier pour la probabilité globale qui correspond à l'intervalle fondamental, quel que soit le rang du quotient incomplet considéré. Si l'on considère simultanément un nombre fini ou une infinité dénombrable de rangs, la probabilité globale reste encore tousjours comprise entre les mêmes limites, bien que les probabilités relatives à des rangs différents ne soient pas rigoureusement indépendantes.

On pourrait se proposer divers autres problèmes dont celui auquel on songe d'abord est le calcul de la valeur exacte des p_k pour chacun des quotients incomplets $a_2, a_3,...$ leur valeur pour a_1 étant donnée par la formule (2). Pour calculer les probabilités relatives à a_2 on observera que, en ce cas, la valeur du rapport que nous avons appelé x est égale à $\frac{1}{a_1}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{n}$, *n étant un entier positif quelconque ; on a donc*

(14) $$p_1 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = 2 \operatorname{Log} 2 - 1$$

comme on le déduit aisément de la formule bien connue

(15) $$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \operatorname{Log} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}$$

On se rend compte, par cet exemple simple, de la complication des calculs où l'on serait conduit, même pour de petites valeurs de l'indice k et de l'indice n du quotient incomplet. Il ne semble pas qu'il soit aisé, dans l'état actuel de l'analyse, d'effectuer ces calculs sous une forme tant soit peu générale.

On pourrait, par contre, envisager deux problèmes, assurément difficiles, mais qui ne paraissent cependant pas insolubles ; d'une part, le calcul de la valeur globale de p_k dans tout intervalle fondamental 0 - 1 , d'autre part, le calcul de la limite vers laquelle tend p_k pour l'ensemble des intervalles de Baire d'ordre n : $(a_1, a_2, ... a_n)$, lorsque la valeur de n augmente indéfiniment.

Pour toutes les applications que nous avons en vue, les inégalités (8), (9) et (11), ou l'inégalité (13) qui les résume, nous suffiront largement. Il est encore plus simple de poser

(16) $$p_k = \frac{a}{k^2}$$

le nombre a étant compris entre des limites finies, par exemple 1/3 et 2. On en conclut que la probabilité pour que la valeur d'un quotient incomplet soit supérieure à un nombre donné k peut être prise égale à

(17) $$a\int_k^{\infty} \frac{dk}{k^2} = \frac{a}{k}.$$

Par suite, la probabilité P_k pour que le quotient complet soit inférieur à k est égale à

(18) $$P_k = 1 - \frac{a}{k}.$$

Elle tend vers l'unité lorsque k augmente indéfiniment.

Avec la notation à double indice, les résultats obtenus s'écrivent :

(1) $$p_{1k} = \frac{1}{k(k+1)}$$

probabilité pour que a_1 soit égal à k

(5) $$p_{nk} = \frac{1+x}{(k+x)(k+1+x)} \qquad \text{avec} \quad x = \frac{Q_{n-1}}{Q_n}$$

$\frac{P_n}{Q_n}$ notant la réduite de rang n,

et le groupe d'inégalités (8) (9) (10) qui peut être résumé dans l'inégalité moins précise (13) :

$$\frac{1}{2k(k+1)} < p_{nk} < \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

Enfin (14) lire $p_{21} = 2 \operatorname{Log} 2 - 1$

Borel pose ensuite :

$P_{nk} = p_{n1} + p_{n2} + \ldots p_{nk}$.

P_{nk} est égal à la somme partielle des p_{nk} pour une donnée.

P_{nk} est la probabilité pour que a_n soit égal ou inférieur à k : $P_{nk} = p\ \{a_n \leq k\}$

En utilisant l'inégalité (13) et le fait que le reste de la série de terme $\frac{1}{k(k+1)}$ est égal à $\frac{1}{k+1}$

Il vient :

$1 - P_{nk} = P_{n,k+1} + P_{n,k+2} + \ldots$

$$1 - \frac{2}{k+2} < P_{nk} < 1 - \frac{1}{2(k+1)}$$

Prenons pour k une fonction croissante de n, soit $\phi(n)$,

Premier cas :

Si la série $\sum \frac{1}{\phi(n)}$ converge,

la série $\sum_n (1 - P_{n\ \phi(n)})$ converge.

On applique le résultat élaboré précédemment dans cet article de Palerme (connu sous le nom de première partie du lemme de Borel-Cantelli : Si (E_n) est une suite d'événements tels que $\Sigma P(E_n) < + \infty$ alors P (Lim Sup (E_n)) = 0).

La probabilité pour que l'on ait, pour une infinité de valeur de n, $a_n > \phi_{(n)}$ est égale à zéro. Il y a une probabilité égale à un pour que l'on ait, à partir d'une valeur finie de n, $a_n < \phi_{(n)}$.

Second cas : Si la série $\Sigma \frac{1}{\phi(n)}$ diverge,

la probabilité pour que a_n soit supérieur à $\phi(n)$ pour une infinité de valeurs de n est égale à l'unité.

Le mode de croissance des a_n, est, avec une probabilité égale à l'unité, inférieur à toute fonction ϕ (n) telle que la série Σ 1/ ϕ (n) converge, et supérieur à toute fonction ϕ (n), telle que la série soit divergente.

Les fractions continues apparaissent surtout comme un grand exemple qui a permis d'affiner ce que seront les conceptions contemporaines en théorie des probabilités. Les fractions continues peuvent alors être présentées comme un domaine d'application de la théorie des probabilités.

Denjoy et Lévy ont poursuivi ces travaux de Borel ; Bernstein a soulevé une objection liée à l'indépendance des événements, qui a amené Borel à préciser ce point en 1912.

Les fractions continues apparaissent intimement liées, par la particularité de leur gymnastique intellectuelle, au geste de Borel qui intercale des probabilités dénombrables entre les probabilités discrètes et les probabilités continues, qui étaient seules en question dans le premier article de Borel sur les probabilités. Il est advenu à son programme de recherche sur l'analyse arithmétique du continu, auquel il est encore fait référence dans l'article de Palerme, un peu le même sort qu'à son programme sur les fonctions monogènes, à savoir que ce sont des lemmes, des résultats annexes dans ces programmes de recherche qui ont été déterminants et marqué de nouveaux départs.

3 - *La raréfaction*

Le projet de Borel est de compléter la théorie de la mesure par une théorie de la raréfaction qui permette de classer les ensembles de mesure nulle.

Fréchet a recensé trois exposés des conceptions de Borel sur la raréfaction. On ne peut pas dire qu'il y a une théorie de la raréfaction constituée, tout au plus des pistes indiquées par Borel, assez peu empruntées depuis lors[15] .

"La première idée de Borel, dit Fréchet, consiste à établir une inégalité symbolique (à définir) entre une sorte de grandeur d'un ensemble de mesure nulle, E, et la rapidité de convergence d'une série convergente à termes positifs associée convenablement à E. (Comme ΣL_n est convergente), Borel dit alors que la "mesure asymptotique de E " est inférieure ou égale à ΣL_n. Il est revenu plus tard à la question et a perfectionné son idée primitive. Au lieu de définir la "grandeur" d'un ensemble comme inférieure ou égale à la convergence d'une série (...), il

[15] Il faut citer toutefois l'exposé de Daniel Dugué dans son ouvrage *Ensembles probabilisables et mesurables*, paru en 1958.

compare directement entre eux deux ensembles E et F de mesure nulle et ramène cette comparaison à celle des convergences de séries"[16].

Cette "mesure asymptotique" telle qu'il l'a désignée dans un premier temps, il l'appellera plus tard la raréfaction. E est plus ou moins raréfié suivant que la série converge plus ou moins rapidement. Le repérage de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle se heurte donc aux mêmes difficultés que le repérage de la vitesse de convergence d'une série. L'on sait (théorème de Dubois-Raymond) qu'on peut toujours construire à partir d'une suite de fonction croissante, une fonction croissant plus rapidement que toute fonction de la suite. Et par conséquent, étant donné une suite d'ensembles, de mesure nulle de plus en plus raréfié, il est possible de construire un ensemble plus raréfié que tout ensemble de la suite.

Dans ces travaux sur la raréfaction, les fractions continues interviennent pour générer des ensembles de points. Elles permettent d'avoir des familles d'ensembles de mesure nulle par des procédés qui peuvent être :

1 - se fixer à un certain nombre de valeurs de quotients incomplets.

2 - majorer les valeurs possibles de ces quotients incomplets.

Les exemples cités dans les travaux de Borel sur la raréfaction le sont surtout avec des fractions décimales, d'une écriture plus aisée.

Borel introduit une notation de la raréfaction, elle n'est pas sans avoir une certaine valeur symbolique.

La raréfaction d'un ensemble E réduit à un point et symbolisé par ω^{-1}, où ω est le premier nombre transfini de Cantor.

Le positionnement symbolique de sa mathématique du support fonctionnel par rapport à la création cantorienne est ainsi explicite. Borel a opéré un déplacement du champ d'une ordination vers ce qui est accessible, c'est-à-dire des ensembles de points ou des ensembles dénombrables ou encore des ensembles obtenus par l'inclusion successive d'une suite d'intervalles.

Encart n° 3 : QUELQUES RAPPELS SUR LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE

Extrait de l'ouvrage Émile Borel,

***Les nombres inaccessibles*, p.30 à 32.**

Nous allons donner un exemple qui nous permettra d'introduire la notion très importante d'ensemble de mesure nulle, ainsi que certaines propriétés intéressantes au point de vue de l'égalité euclidienne dans le cas où au lieu d'un seul déplacement, on est amené à en considérer une infinité dénombrable.

Considérons, parmi les fractions décimales illimitées comprises entre 0 et 1, celles dans lesquelles ne figure pas le chiffre 5. Il est clair que la probabilité pour que le chiffre 5 ne soit pas l'un des *n* premiers chiffres suivant la virgule, est :

$$p_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

Cette probabilité p_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; la probabilité pour que ne figure jamais un chiffre 5 est nulle.

On retrouve aisément ce résultat en construisant les intervalles successifs où doit se trouver le point x pour que le chiffre 5 figure, soit au premier rang après la virgule, soit au second rang, soit au troisième et ainsi de suite indéfiniment.

[16] Cité et reproduit dans les *Œuvres* de Borel, t.1, p. 60-61.

Si le chiffre 5 figure au premier rang après la virgule, le point

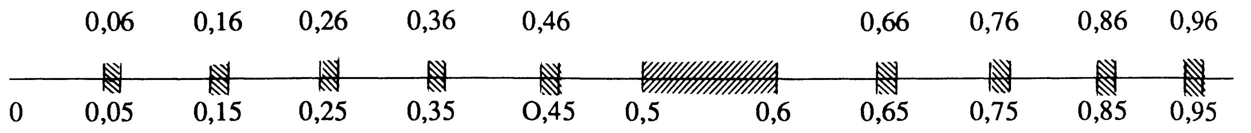

Fig. I.

correspondant est compris entre 0,5 et 0,6; nous couvrirons de hachures l'intervalle correspondant (fig.I). Si le chiffre 5 n'a pas figuré au premier rang, ce premier chiffre sera l'un des 9 autres chiffres: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 et, pour que 5 figure au second rang, le nombre x devra être compris dans l'un des 9 intervalles.

0,05, O,06 ; 0,15, 0,16 ; 0,25, 0,26 ; 0,35, O,36 ; 0, 45, 0,46 ;
0,65, 0,66 ; 0,75, 0,76 ; 0,85, 0,86 ; 0,95, 0,96

que nous avons aussi couverts de hachures.

On observera ensuite que si les 2 premiers chiffres après la virgule ne sont ni l'un ni l'autre des 5, il y a pour chacun d'eux 9 possibilités, soit 9^2 pour l'ensemble des deux; à chacune de ces possibilités, tels que 0,07 ou 0,23 ou 0,40 correspondra un intervalle tel que 0,075 ou 0,235, 0,236, etc... dont chacun a pour longueur un millième et qui devraient aussi être couverts de hachures; en continuant de la même manière pour les chiffres suivants, on arrivera à couvrir de hachures des intervalles dont la longueur totale sera:

$$L = \frac{1}{9} + \frac{9}{100} + \frac{9^2}{10^3} + \frac{9^3}{10^4} + \ldots + \frac{9^n}{10^{n+1}} + \ldots. ,$$

série dont la somme, comme on le vérifie aisément est égale à l'unité. On retrouve ainsi le résultat d'après lequel ~~la~~probabilité (ou la mesure) est égale à 1 pour l'ensemble E des nombres dans le développement décimal desquels figure le chiffre 5 et par suite égale à 0 pour l'ensemble *complémentaire*, c'est-à-dire pour l'ensemble des nombres dans lesquels le chiffre 5 ne figure pas. Ce dernier ensemble sera dit de mesure nulle, tandis que la mesure de l'ensemble E est égale à l'unité.

La mathématique de Borel apparaît comme restant attachée aux travaux de Weierstrass et de Cantor par un travail de lecture critique: l'existence d'une lignée, ensemble, mesure, probabilité est un cheminement à partir de Cantor, et un détachement progressif des approches de Weierstrass et de Cantor.

Si le titre d'un de ces articles "l'analyse arithmétique du continu" pourrait fournir un intitulé au programme de recherches de Borel, l'analyse des recours à la théorie des fractions continues, qui servent dans un premier temps à mettre de l'ordre dans les approximations d'un réel, puis à fournir des exemples porteurs de nouvelles conceptions pour le calcul des probabilités et enfin à générer des ensembles de mesure nulle, en montre les phases successives distinctes. Elle montre aussi les positions successives de Borel par rapport à Cantor.

Fourier appelait de ses voeux une "mathématique de l'inégalité", de l'epsilon, que Weierstrass réalise. Borel inaugure d'autres manipulations mathématiques. Il apporte d'autres manières de s'approcher, de négliger des quantités, dans l'analyse mathématique. Certaines multiplicités sont négligeables en regard d'autres; des ensembles de mesure nulle peuvent avoir la puissance du continu, être tout à la fois considérables et négligeables. Cette nouvelle façon de négliger, Borel l'apporte aussi bien dans la théorie des fonctions que dans celle des probabilités.

L'esprit des travaux mathématiques du début de ce siècle réanime la notion de probabilité, que la tradition positiviste puis biométrique sollicitait peu, voire pas du tout. Que ce réveil puisse avoir de nombreuses implications, la possibilité des trois biographies en témoigne.

Appendice : Liste des ouvrages et articles de Borel où interviennent les fractions continues.

Les ouvrages publiés de Borel ont été numérotés de 1 à 35 successivement d'après leur date de publication.

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898
(3) *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, particulièrement pp. 55-61
(a) *Contribution à l'analyse arithmétique du continu,* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1903), 1903 : reproduit dans les *Oeuvres*, t.III, pp. 1439 à 1485
(b) *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques,* (R.C. Circolo Mat.Palermo, t.27, 1909 pp. 247-270). L'article de Palerme est reproduit dans les rééditions des *Leçons sur la théorie des fonctions et dans les Œuvres*, t.II, p. 1055 et s.
(8) *Leçons sur la théorie de la croissance*, 1910, particulièrement p. 127 et s.
(c) *Sur un problème de probabilités relatif aux fractions continues*, (Math-Annalen, t.72, 1912, pp.578-584); reproduit dans les *Œuvres*, t.II, p.1085
(12) *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions*, 1922, pp. 38-66
(19) *Application à l'aritmétique et à la théorie des fonctions*, 1926. Le chapitre quatre de ce fascicule du *Traité du calcul des Probabilités et de ses applications* est consacré aux fractions continues
(29) *Les paradoxes de l'infini*, 1946. Notes II sur les fractions continues
(30) *Eléments de la théorie des ensembles*, 1949, particulièrement pp.240-264
(33) *Les nombres inaccessibles*, 1952