MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

CL. DENIAU
G. OPPENHEIM

Un point de vue sur l'analyse spectrale descriptive des chroniques

Mathématiques et sciences humaines, tome 88 (1984), p. 21-47
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__88__21_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (22e année, n°88, *1984*, p.21-47)

UN POINT DE VUE SUR L'ANALYSE SPECTRALE DESCRIPTIVE DES CHRONIQUES

Cl. DENIAU,* G. OPPENHEIM**

0. Introduction .

1. Choix d'une base .

2. Transformée finie de Fourier de X et composantes de Fourier .

3. Décomposition de la variance d'une chronique .
   . Périodogramme
   . Exemple

4. Liens entre périodogramme et la fonction d'autocovariance d'une chronique .

5. Lissages du périodogramme

6. Exemples

7. Annexe : construction d'une base orthogonale à partir des fonctions exp, sin, cos

8. Bibliographie

* G.R.E.Q.E., Université d'Aix-Marseille III.
** I.U.T. - PARIS-V, Equipe Statistique Appliquée, ORSAY.

0. INTRODUCTION

L'analyse spectrale est avant tout une méthode d'analyse de la variance comme telle, son but est de décomposer additivement les chroniques[1] observées en chronique non covariées et d'étudier la contribution de chacune des composantes ainsi construites, à la variance de la chronique étudiée. Cette comparaison permet de hiérarchiser, par l'intermédiaire de la variance, les différentes composantes de cette décomposition.

Quelles composantes choisir ? Dans le but d'aider à la mise en évidence de composantes périodiques (composantes saisonnières ou cycliques) le choix d'une décomposition additive, à l'aide de chroniques construites à partir de fonctions périodiques simples et régulières, est séduisant.

C'est donc à l'aide de chroniques constituant une base, orthogonale de l'espace vectoriel des chroniques de longueur donnée, et construites à partir des fonctions sinus et cosinus que nous effectuerons cette décomposition en composantes de Fourier.

Nous verrons comment le spectre d'une chronique est l'analogue de ce qu'est, pour les processus stationnaires d'ordre deux, la mesure spectrale. Nous mettrons en évidence les liens entre le spectre et la fonction de covariance à l'aide de la transformation de Fourier finie.

La littérature sur le sujet, aussi bien du point de vue descriptif que probabiliste ou inférentiel, est abondante et semble avoir pour source les travaux de STOKES [14] et SCHUSTER [13].

La bibliographie, volontairement réduite, fournit des éléments de référence concernant la description des chroniques BARBUT - FOURGEAUD [3], BLOOMFIELD [5] ; outre les aspects descriptifs, ANDERSON [2], JENKINS - WATTS [9], MALINVAUD [10],

---

(1) Séries temporelles ou séries chronologiques.

FULLER [7] sont assez complets sur le plan inférentiel. L'ouvrage de PRIESTLEY [11] semble constituer aujourd'hui l'outil de référence le plus complet. Nous terminons par quelques références spécifiques aux sciences humaines ; l'article de BEVERIDGE [4] constitue une référence historique pour les économistes ; de nombreux travaux ont suivi dont nous extrairons les livres de GRANGER [8], FISHMAN [6] et évidemment [10], déjà cité. Enfin la thèse d' ABELSON [1] constitue un bel exemple d'application à la psychologie ; le livre de RAYNER [12] fournit un excellent outil aux géographes.

Ce texte constitue un des chapitres d'un cours de statistique descriptive des chroniques qui peut être enseigné à tous les niveaux. Les résultats mathématiques élémentaires d'algèbre linéaire sont d'ailleurs démontrés pour la plupart. Notre présentation met en lumière :

- le rôle fondamental d'une base bien choisie constituée de chroniques centrées.

- le fait que l'analyse spectrale constitue une méthode de lecture des coordonnées d'un vecteur sur cette base. On met en évidence la notion de phase, essentielle dans le cadre multidimensionnel.

Cette approche algébrique offre les avantages suivants :

- elle est simple ; elle présente la majorité des problèmes intéressants et pratiques de l'analyse spectrale.

- elle est compatible avec les développements probabilistes et l'estimation.

- elle s'étend à l'analyse cospectrale d'une chronique multidimensionnelle.

- elle s'applique enfin à l'analyse spectrale d'une image discrétisée [12].

Bien sûr, nous laissons de côté divers problèmes simples d'une grande importance mais dont les solutions sont aisément accessibles. Citons par exemple : la méthode de calcul F.F.T. (Fast - Fourier - Transform) qui permet d'évaluer un spectre par un algorithme numériquement peu coûteux [5].

1. CHOIX D'UNE BASE

Nous noterons $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel des chroniques réelles de longueur n. Une première base est utile, c'est la base des chroniques canoniques de $\mathbb{R}^n$, soit $(1_t \; ; \; 1 \leqslant t \leqslant n)$ où $1_t = (\underbrace{0,..,0,1}_{t},0,..,0)$.

Si $X = (x_t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1}$ est une chronique de longueur n, $X = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \, 1_{t+1}$.
Cette base est évidemment orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Nous noterons $(\,|\,)_{\mathbb{R}^n}$, $\|\;\|_{\mathbb{R}^n}$ (resp. $(\,|\,)_{\mathbb{C}^n}$, $\|\;\|_{\mathbb{C}^n}$) le produit scalaire usuel et la norme associée de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$).

Une autre base va être pour nous essentielle ; elle est construite à partir de fonctions périodiques, plus précisément de fonctions circulaires. La fonction $\mathrm{Cos}\, 2\pi \frac{j}{n} t$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ est périodique de période $\frac{n}{j}$; intéressons-nous à la restriction de cette fonction à l'ensemble $[0, n-1] \subset \mathbb{N}$. Cette restriction est alors un élément de $\mathbb{R}^n$, donc une chronique de longueur n et lorsque $\frac{n}{j}$ est un entier, elle est périodique de période $\frac{n}{j}$ elle aussi. Posons :

$$C_j = (\mathrm{Cos}\, 2\pi \frac{j}{n} t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in J$$

$$S_j = (\mathrm{Sin}\, 2\pi \frac{j}{n} t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in J \; .$$

où J est défini dans la définition 3.

Si $a \in \mathbb{R}$, on notera $[a]$ la partie entière de a.

Définition 1 :

On notera $\mathcal{F}$ la base de l'espace vectoriel des chroniques de longueur n :

$$\mathcal{F} = \left((C_j)_{0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]} \quad , \quad (S_j)_{1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]}\right)$$

Cette base est orthogonale et :

$\|C_j\|^2 = \|S_j\|^2 = \frac{n}{2}$ si $1 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$; $\|C_o\|^2 = n$; si n pair : $\|C_{n/2}\|^2 = n$.

(Pour une démonstration, voir l'annexe).

2. TRANSFORMEE FINIE DE FOURIER DE X ET COMPOSANTES DE FOURIER

2.1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, une chronique de longueur n ; décomposons x dans la base $\mathcal{F}$:

$$X = c_o C_o + \sum_{j=1}^{[n/2]} [c_j C_j + s_j S_j] \quad \text{si n est impair}$$

$$X = c_o C_o + \sum_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]} [c_j C_j + s_j S_j] + c_{n/2} C_{n/2} \quad \text{si n est pair.}$$

Définition 2 : Transformée Finie de Fourier

On appelle transformée finie de Fourier de la chronique X de longueur n, la suite finie des coordonnées de X dans la base $\mathcal{F}$:

$$T.F.F.(X) = (c_o, c_1. s_1, .., c_j, s_j, .., c_{[n/2]}, s_{[n/2]}) \text{ si n est impair}$$

$$T.F.F.(X) = (c_o, c_1, s_1, .., c_j, s_j, .., c_{[\frac{n-1}{2}]}, s_{[\frac{n-1}{2}]}, c_{n/2}) \text{ si n est pair.}$$

2.2. Calcul de la Transformée Finie de Fourier de la chronique x

Soit X une chronique de $\mathbb{R}^n$;

$$X = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \, 1_{t+1} \quad \text{relativement à la base canonique ;}$$

$$\begin{cases} X = c_o C_o + \displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} [c_j C_j + s_j S_j] + c_{n/2} C_{n/2}, & \text{si n est pair,} \\ X = c_o C_o + \displaystyle\sum_{j=1}^{[n/2]} [c_j C_j + s_j S_j] & \text{si n est impair,} \end{cases}$$

relativement à $\mathcal{F}$.

Calculons le produit scalaire entre X et C_k élément de $\mathcal{F}$

$$(X \mid C_k)_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_t \, 1_{t+1} \mid C_k \right)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \operatorname{Cos} 2\pi \frac{k}{n} t$$

$$(X \mid C_k)_{\mathbb{R}^n} = \left(c_o C_o + \sum_{j=1}^{[n/2]} [c_j C_j + s_j S_j] \mid C_k \right)_{\mathbb{R}^n}$$

$$= c_k \, \| C_k \|^2_{\mathbb{R}^n} .$$

On en déduit que :

$$c_k \cdot \| C_k \|^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} t,$$

soit : $$c_k = \frac{1}{\| C_k \|^2_{\mathbb{R}^n}} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} t.$$

Identiquement, on montre que :

$$s_k = \frac{1}{\| S_k \|^2_{\mathbb{R}^n}} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \sin 2\pi \frac{j}{n} t.$$

On peut donc exprimer les valeurs des différents coefficients de Fourier de la chronique x :

$$c_o = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t = \bar{x}$$

$$\begin{cases} c_j = \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} t, \\ s_j = \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \sin 2\pi \frac{j}{n} t, \end{cases} \qquad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$$

$$c_{n/2} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t (-1)^t \quad \text{si n est pair.}$$

Définition 3 : Composantes de Fourier

On appelle *composante de Fourier* de fréquence $\frac{j}{n}$ de la chronique X de longueur n, la chronique périodique de même longueur.

$$X_j = c_j C_j + s_j S_j$$

Nous devons préciser les X_j :

$X_o = c_o C_o$ associé à la fréquence unité

$X_j = c_j C_j + s_j S_j$, $1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$

$X_{n/2} = c_{n/2} C_{n/2}$ si n est pair

Pour simplifier les notations, nous noterons :

$$X = \sum_{j \in J} X_j \qquad \text{où} \quad J = \{0,1,\ldots,[n/2]\}$$

Les fréquences $\{\frac{j}{n}, j \in J\}$ sont appelées *fréquences de Fourier*.

3. DECOMPOSITION DE LA VARIANCE D'UNE CHRONIQUE : ANALYSE SPECTRALE

Proposition 1 : Equation d'analyse de variance

La variance de la chronique X est égale à la somme des variances de ses composantes de Fourier. Plus précisément :

$$\text{var } X = \sum_{j \in J} \text{var } X_j$$

Preuve :

. Nous remarquons avant tout que les composantes de Fourier sont deux à deux orthogonales :

$$\text{si } j \neq j' : (X_j \mid X_{j'})_{\mathbb{R}^n} = (c_j C_j + s_j S_j \mid c_{j'} C_{j'} + s_{j'} S_{j'})_{\mathbb{R}^n}$$

$$= c_j s_{j'} (C_j \mid S_{j'})_{\mathbb{R}^n} + c_j c_{j'} (C_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n}$$

$$+ s_j s_{j'} (S_j \mid S_{j'})_{\mathbb{R}^n} + s_j c_{j'} (S_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0$$

car les chroniques de $\mathcal{F}$ sont deux à deux orthogonales.

. La composante de Fourier X_o étant une chronique constante, sa variance est nulle ; les autres composantes de Fourier étant orthogonales à X_o sont centrées. Donc :

$$\text{var } X_j = \frac{1}{n} \|X_j\|^2_{\mathbb{R}^n} \quad , \quad j \in J$$

$$\text{cov } (X_j, X_{j'}) = \frac{1}{n} (X_j \mid X_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

les composantes de Fourier de X sont deux à deux non covariées.
Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{var} X &= \operatorname{var} \Big[\sum_{j \in J} X_j \Big] \\ &= \sum_{j \in J} \operatorname{var} X_j \\ &= \sum_{j \in J - \{0\}} \operatorname{var} X_j \end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$:

$$\begin{aligned} \operatorname{var} X_j &= \frac{1}{n} \|X_j\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{1}{n} \|c_j\, C_j + s_j\, S_j\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{1}{n} c_j^2 \|C_j\|^2 + s_j^2 \|S_j\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{1}{2} (c_j^2 + s_j^2). \end{aligned}$$

$$\operatorname{var} X_{n/2} = c^2_{n/2} \quad \text{pour } n \text{ pair.}$$

Définition 4 : Périodogramme ou Spectre

On appelle *périodogramme* ou *spectre* de la chronique X de longueur n, dont la décomposition de Fourier est $X = \sum_{j \in J} X_j$, la fonction I_n définie sur l'ensemble des fréquences de Fourier $\{j/n,\ j \in J\}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$j/n \rightarrow I_n(j/n) = \operatorname{var} X_j .$$

Définition : Phase

La fonction $\phi : j/n \rightarrow \phi_j$ de l'ensemble $\{j/n,\ j \in J - \{0, \frac{1}{2}\}\}$ dans $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, appelée fonction de phase est définie par :

$$x_{j,t} = \sqrt{c_j^2 + s_j^2} \quad \cos 2\pi(\frac{j}{n} t + \phi_j),$$

si l'on note $X_j = (x_{j,t})_{0 \leqslant t \leqslant n-1}$.

puisque $X_j = c_j C_j + s_j S_j$, alors :

$$x_{j,t} = \sqrt{c_j^2 + s_j^2}\ (\cos 2\pi \frac{j}{n} t \cos 2\pi\phi_j - \sin 2\pi \frac{j}{n} t \sin 2\pi\phi_j)$$

$$c_j = \sqrt{c_j^2 + s_j^2} \cos 2\pi\phi_j \ ; \quad s_j = -\sqrt{c_j^2 + s_j^2} \sin \phi_j \ ;$$

$$X_j = \sqrt{c_j^2 + s_j^2}\ (C_j \cos 2\pi\phi_j - S_j \sin 2\pi\phi_j)$$

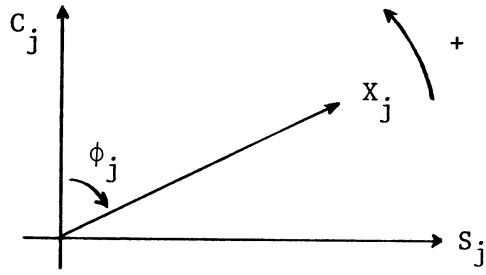


Figure 1

Commentaire sur la Figure 1 :

- si $\phi_j > 0$, on dira que X_j est *en avance* sur C_j.
- si $\phi_j < 0$, on dira que X_j est *en retard* sur C_j.

Dans cette convention, C_j est en avance sur S_j.

Périodogramme réduit

Les comparaisons de périodogrammes sont rendues plus aisées si au lieu d'étudier la variance de chacune des composantes de Fourier, soit var X_j, on étudie la contribution de chacune des composantes de Fourier à la variance de la chronique étudiée.

Définition 5 : Périodogramme réduit

On appelle périodogramme réduit d'une chronique X de longueur n, la fonction J_n qui à chaque fréquence de Fourier associe le scalaire :

$$I_n(j/n)/\text{var}\, X \in [0,1] \ : \ j/n \rightarrow J_n(j/n) = I_n(j/n)/\text{var}\, X .$$

Le périodogramme, comme le périodogramme réduit, sont représentés graphiquement ; en abscisse, nous porterons les fréquences de Fourier et en ordonnée, les valeurs de la fonction. Certains auteurs portent en abscisse les périodes de Fourier ; l'avantage des fréquences de Fourier est qu'elles sont toujours éléments de $[0,\frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$.

Remarque : d'après les expressions de c_j et s_j et puisque C_j et S_j $(1 \leqslant j < \frac{n}{2})$ sont centrées, on a :

$1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$

$$I_n\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(c_j^2 + s_j^2\right) = \frac{2}{n^2}\left[\left(\sum_{t=0}^{n-1} x_t \cos 2\pi \frac{j}{n} t\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{n-1} x_t \sin 2\pi \frac{j}{n} t\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[\left(\sum_{t=0}^{n-1} (x_t-\bar{x}) \cos 2\pi \frac{j}{n} t\right)^2 + \left(\sum_{t=0}^{n-1} (x_t-\bar{x}) \sin 2\pi \frac{j}{n} t\right)^2\right] ;$$

et $$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = c_{n/2}^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{t=0}^{n-1} x_t(-1)^t\right]^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{t=0}^{n-1} (x_t-\bar{x})(-1)^t\right]^2 .$$

Exemples[1] (très simples)

a) Chronique des ventes trimestrielles de gaz en un point d'alimentation du réseau (en 10^3 kWh) dans la ville d'Auxerre (G.D.F.)

Tableau 1

Année \ Trimestre	1	2	3	4
1978	6 979	3 059	1 184	5 593
1979	7 785	3 080	1 124	5 302
1980	7 279	2 853	1 120	6 500
1981	7 317	2 425	1 071	5 559
1982	6 295	2 356	970	6 533
1983	7 363	3 200	904	6 887

Moyenne chronique : 4 280,75 . 10^3 kWh

(1) Notre cours était illustré de nombreux exemples traités par les étudiants dirigés par Ph. CHABAULT, ingénieur G.D.F.

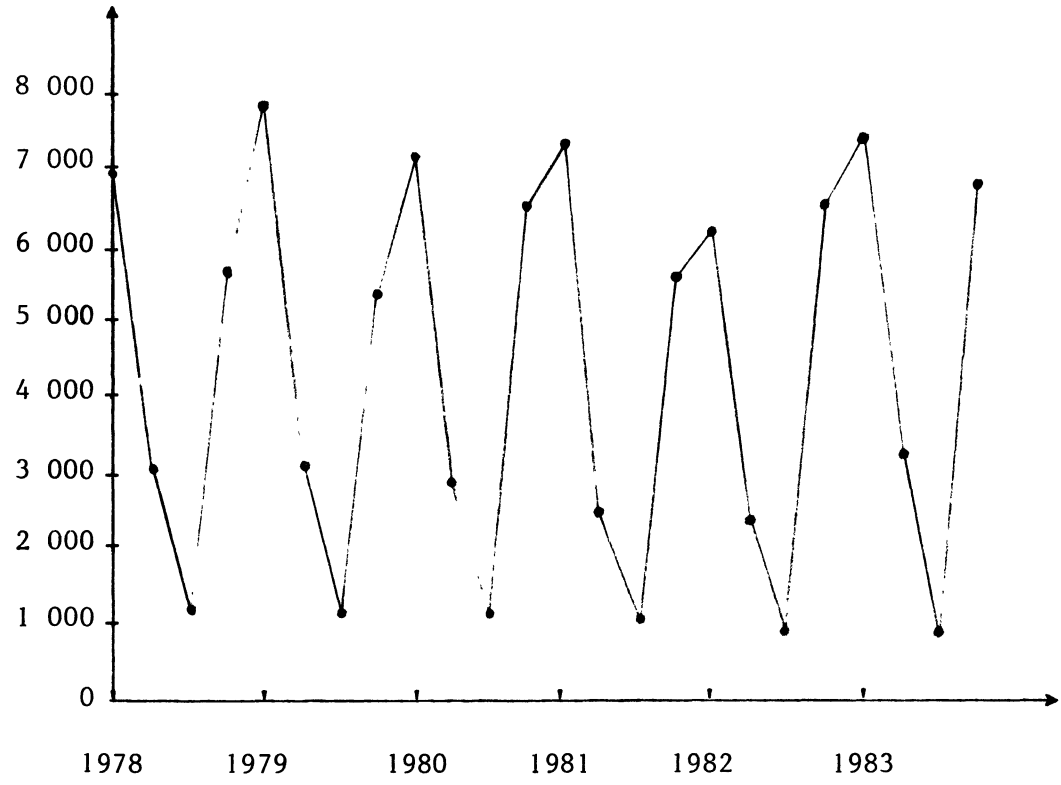


Figure 2

Chronique des ventes trimestrielles de gaz (en milliers de kWh) en un point d'alimentation du réseau de la ville d'Auxerre.

On note $\frac{n}{j}$ les périodes de Fourier avec $n = 24$ et $1 \leqslant j \leqslant 12$.

Tableau 2

$\frac{n}{j}$	C_j	S_j	$I(\frac{j}{n})$
24.00	177.	74.	18371.
12.00	114.	-195.	25471.
8.00	-237.	41.	28864.
6.00	63.	-51.	3299.
4.80	202.	-48.	21492.
4.00	3054.	-1617.	5969606.
3.43	-112.	102.	11519.
3.00	-81.	-166.	17051.
2.67	-82.	11.	3415.
2.40	-117.	-147.	17677.
2.18	-117.	-182.	23373.
2.00	-165.	0.	27170.

Sur cet exemple particulièrement simple, on constate que la composante de Fourier de fréquence 1/4, notée ici X_6 contribue à 97 % de la variance de la chronique. Cela confirme quantitativement l'impression laissée par la lecture d'une composante saisonnière annuelle très marquée sur le graphique.

On peut légitimement décomposer la chronique suivante en notant :

$$X_6 = (x_{6,t})_{0 \leqslant t \leqslant 23}$$

$$x_t = \underbrace{4\ 280{,}75}_{\text{moyenne}} + \underbrace{x_{6,t}}_{\text{composante saisonnière}} + a_t$$

où (a_t) est une chronique, non corrélée à X_6, et de variance négligeable relativement à celle de X_6 ; son étude ne doit pas être négligée.

b) Les chroniques $(C_i)_{i \leqslant i \leqslant 4}$ sont toutes de longueur n = 128

Un jeu simple sur cet exemple : associer à chaque chronique $(C_i)_{i \leqslant i \leqslant 4}$ son périodogramme qui se situe dans la suite $(P_i)_{i \leqslant i \leqslant 4}$. On tiendra compte des fréquences et des amplitudes des oscillations des chroniques ; on remarquera que ces graphiques sont construits avec des échelles différentes.

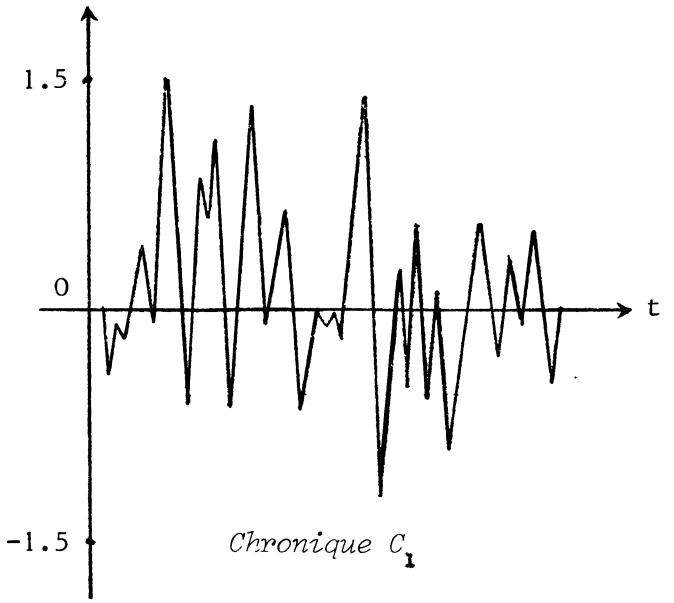


Figure 3

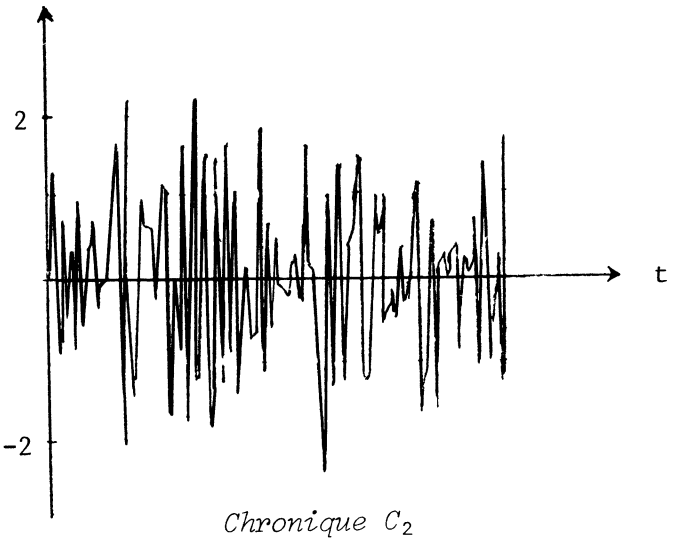
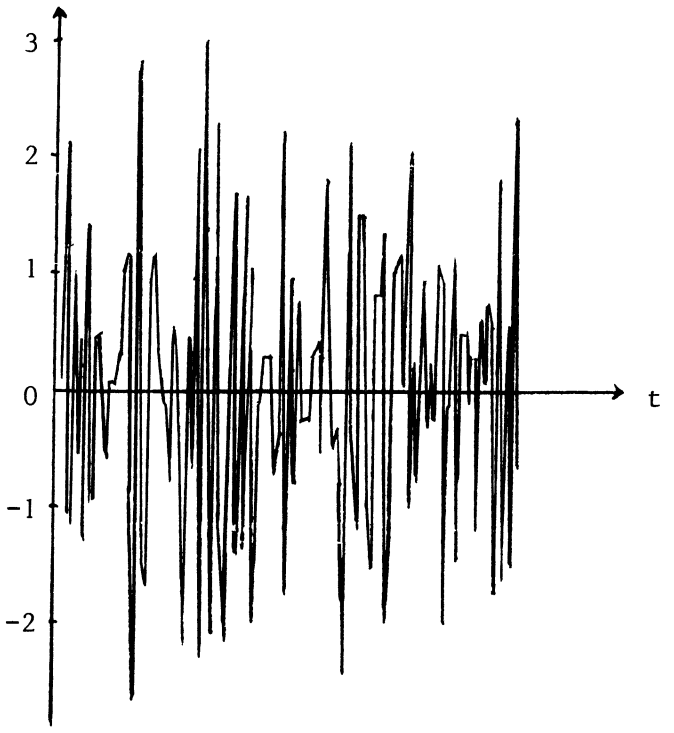
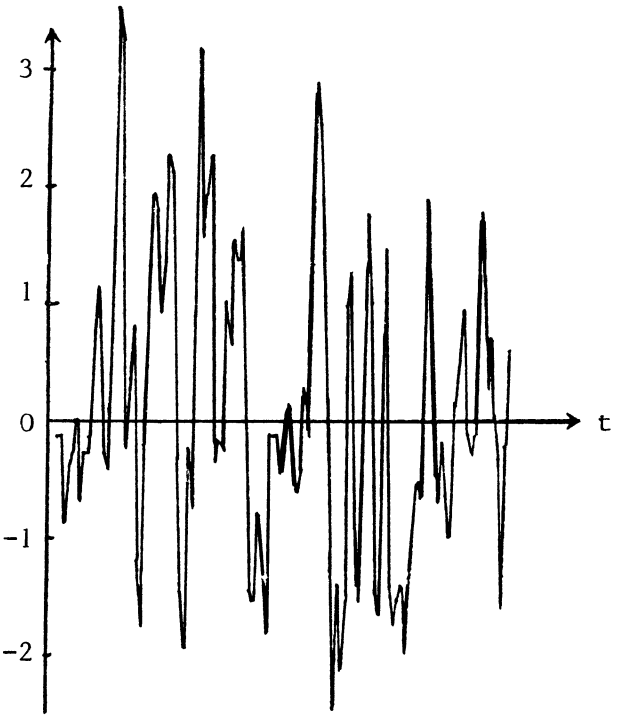


Figure 4



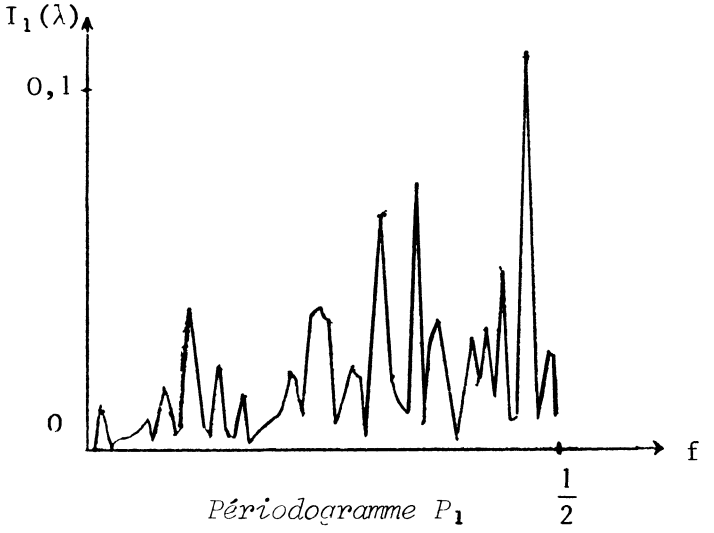
Chronique C_3

Figure 5



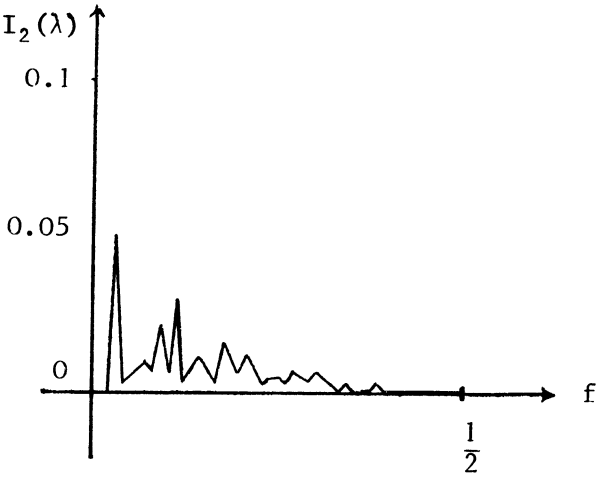
Chronique C_4

Figure 6



Périodogramme P_1

Figure 7



Périodogramme P_2

Figure 8

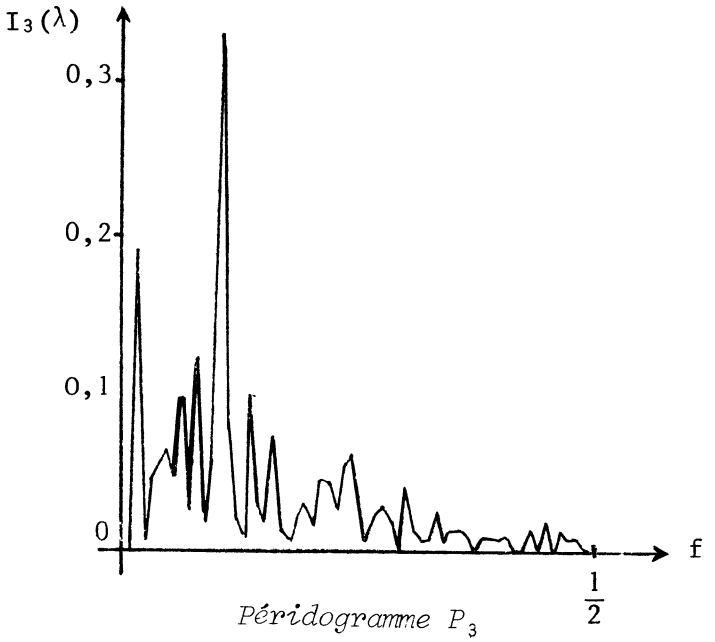


Figure 9

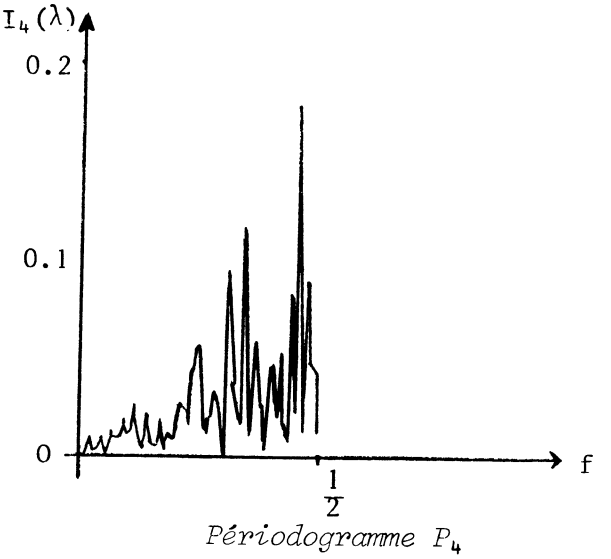


Figure 10

Résultats :

(C_2, P_1)	hautes fréquences, faibles amplitudes des oscillations
(C_3, P_4)	hautes fréquences, fortes amplitudes des oscillations
(C_4, P_3)	basses fréquences, fortes amplitudes des oscillations
(C_1, P_2)	basses fréquences, faibles amplitudes des oscillations

4. LIENS ENTRE LE PERIODOGRAMME ET LA FONCTION D'AUTOCOVARIANCE D'UNE CHRONIQUE

a) Nous allons mettre en évidence les liens qui unissent la fonction d'autocovariance et le périodogramme d'une chronique. Ces liens sont semblables à ceux qui unissent la mesure spectrale et la fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire stationnaire d'ordre deux (consulter [2] ou [11] par exemple). Le résultat est fourni par la formule (2).

Pour $j \neq \frac{n}{2}$ et $j \neq 0$:

$$I_n(\tfrac{j}{n}) = \frac{2}{n^2}\left[\left(\sum_{t=0}^{n-1}(x_t-\bar{x})\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}t\right)^2+\left(\sum_{t=0}^{n-1}(x_t-\bar{x})\operatorname{Sin} 2\pi\frac{j}{n}t\right)^2\right.$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{t'=0}^{n-1}(x_t-\bar{x})(x_{t'}-\bar{x})\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}t\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}t'+\right.$$

$$\left.+\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{t'=0}^{n-1}(x_t-\bar{x})(x_{t'}-\bar{x})\operatorname{Sin} 2\pi\frac{j}{n}t\operatorname{Sin} 2\pi\frac{j'}{n}t\right]$$

donc :

$$(1)\qquad I_n(\tfrac{j}{n}) = \frac{2}{n^2}\left[\sum_{t=0}^{n-1}\sum_{t'=0}^{n-1}(x_t-\bar{x})(x_{t'}-\bar{x})\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}(t-t')\right].$$

On souhaite faire apparaître dans cette expression, la fonction de covariance de la chronique x définie par :

$$s(k) = s(-k)\begin{cases} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{t=0}^{n-k-1}(x_{t+k}-\bar{x})(x_t-\bar{x}) & \text{pour } |k| \leqslant n-1 \\ = 0 & \text{pour } |k| > n-1 \end{cases}.$$

Pour cela, reécrivons (1) en regroupant les termes tels que $t-t'=0$, $t-t'=1, \ldots,$ etc. ; or $-(n-1) \leqslant t-t' \leqslant n-1$ et en tenant compte de (2), on vérifie facilement que :

$$I_n(\tfrac{j}{n}) = \frac{2}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} s(k)\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}k$$

$$(2)\qquad \boxed{I_n(\tfrac{j}{n}) = \frac{2}{n}\left[s(o)+2\sum_{k=1}^{n-1}s(k)\operatorname{Cos} 2\pi\frac{j}{n}k\right]}$$

pour $j = \frac{n}{2}$: $I_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{n} \left[s(o) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k s(k) \right]$

et $I_n(0) = 0$.

Les propriétés de symétrie par rapport à l'origine permettent d'écrire :

$$I_n(\frac{j}{n}) = \frac{2}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} s(j) \exp \{- 2i\pi \frac{j}{n} k\} \qquad 1 \leqslant j < \frac{n}{2}$$

b) Cas particulier du périodogramme réduit :

Pour $j \neq \frac{n}{2}$:

$$J_n(\frac{j}{n}) = I_n(\frac{j}{n}) / s(o)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \frac{s(k)}{s(o)} \text{ Cos } 2\pi \frac{j}{n} k$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} r(k) \text{ Cos } 2\pi \frac{j}{n} k$$

$$J_n(\frac{1}{2}) = \frac{2}{n} \left[\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (-1)^k r(k) \right]$$

où r_k est la fonction d'autocorrélation de la chronique et J_n le périodogramme réduit.

5. LISSAGE DU PERIODOGRAMME

Comme le montrent les différents exemples du paragraphe suivant, la lecture des périodogrammes de longues chroniques n'est pas aisée. Les périodogrammes présentent des variations de hautes fréquences qui masquent couramment les variations de basses fréquences. Nous pourrons donner ultérieurement, dans un cadre probabiliste, les raisons de ces variations de hautes fréquences.

Nous proposons donc de lisser $I_n(\lambda)$ afin d'en atténuer les variations de grandes fréquences et de mettre en évidence les basses fréquences. Les techniques de lissages qui suivent sont classiques ; pour les développements théoriques, on peut consulter [2], [9] et [11].

a) Le périodogramme est lissé par un filtre moyenne mobile :

Les moyennes mobiles seront de petites longueurs afin de ne pas lisser exagérément la fonction ; elles pourront être équipondérées ou non. Le résultat du lissage est la fonction f appelée périodogramme lissé défini par :

. équipondérées $f(\frac{j}{n}) = \frac{1}{2k+1} \sum_{\ell=-k}^{k} I_n(\frac{j-\ell}{n})$; k petit

. non équipondérées $f(\frac{j}{n}) = \sum_{\ell=-k}^{k} a_\ell \, I_n(\frac{j-\ell}{n})$; k petit , avec

$a_\ell > 0 \qquad (-k \leqslant \ell \leqslant k) \qquad \sum_{-k}^{k} a_\ell = 1$

En général, on suppose que $a_\ell = a_{-\ell}$ et que $a_\ell \leqslant a_{\ell'}$ pour $|\ell| \geqslant |\ell'|$, ceci afin d'attribuer des poids plus grands aux fréquences proches de la fréquence $\frac{j}{n}$.

On remarquera un défaut évident de cette technique :

on ne peut calculer $f(\frac{j}{n})$ pour $0 \leqslant j < k$ et $n-(k+1) \leqslant j \leqslant n$. On perd donc les évaluations de f pour diverses fréquences.

b) La chronique de longueur n est considérée comme constituée de k chroniques successives de longueurs p (n=kp).

Pour chaque chronique de longueur p, on calcule le périodogramme. Soit $I_{1,p}, \ldots, I_{k,p}$ ces périodogrammes. Ils auront tous même domaine de définition, c'est-à-dire même ensemble de fréquences. Nous pourrons alors calculer leur périodogramme moyen :

$$\bar{I}_p \left(\frac{j}{p}\right) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k} I_{\ell,p} \left(\frac{j}{p}\right)$$

Cette technique présente aussi l'avantage de pouvoir comparer les différents périodogrammes calculés sur les k chroniques et de mettre ainsi en évidence d'éventuelles instabilités du spectre de la chronique initiale.

c) La dernière technique que nous présentons est dérivée des liens existant entre le périodogramme et la fonction de covariance de la chronique :

$$I_n\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} s(k) \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} k.$$

En effet, le membre de droite de cette égalité fait intervenir la totalité des valeurs de s(k) ; or nous savons que pour :
- les petites valeurs de k les fonctions $s(k)\operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} k$ fluctuent peu.
- les grandes valeurs de k, les fonctions fluctuent beaucoup.

Si l'on cherche une fonction f ne possédant pas trop de fluctuations de hautes fréquences, l'idée est alors de :

(i) ne conserver les valeurs de s(k) pour $|k|$ petit : $-r \leqslant k \leqslant r$

(ii) pondérer les valeurs de s(k) conservées par des scalaires a_k positifs de somme 1, et tels que $a_k \geqslant a_{k'}$ pour $|k| \leqslant |k'|$, alors

$$f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{2}{2r+1} \sum_{k=-r}^{r} a_k\, s(k) \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} k.$$

6. EXEMPLES

En complément au paragraphe 3, nous présentons quelques exemples types de périodogrammes pour des chroniques simples utiles dans la modélisation des tendances, composantes saisonnières ou cycliques, valeurs aberrantes [10 ; chapitre 12].

Outil préliminaire

Pour les calculs théoriques, on introduit $d_X(\omega) = (X|E_\omega)_{\mathbb{C}^n}$

$$E_\omega = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} \exp(2i\pi\omega t)\, 1_{t+1},$$

$$d_X(\omega) \overset{\text{not}}{=} d(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \exp(-2i\pi\omega t) \qquad \omega \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

on a $d_X(\omega) = \overline{d_{\overline{X}}(-\omega)}$. (= $\overline{d_X(-\omega)}$ si X est une chronique réelle)

$$\text{et} \quad (3) \quad \begin{cases} c_j - i\, s_j = \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t \exp\left(-2i\pi \frac{j}{n} t\right) = 2\, d\left(\frac{j}{n}\right), \quad j \neq 0,\ j \neq \frac{n}{2} \\ c_o = d(o)\,, \\ c_{n/2} = d\left(-\frac{1}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

D'où pour le périodogramme :

$$(4) \quad \begin{cases} I_n\left(\frac{j}{n}\right) = \operatorname{Var} X_j = \frac{1}{2}\left(c_j^2 + s_j^2\right) = 2\ \left|d\left(\frac{j}{n}\right)\right|^2, \qquad j \neq 0,\ j \neq \frac{n}{2} \\ I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Var} X_{n/2} = c_{n/2}^2 = \left|d\left(\frac{1}{2}\right)\right|^2. \end{cases}$$

D'où pour la phase : $j \neq 0$; $j \neq \frac{n}{2}$

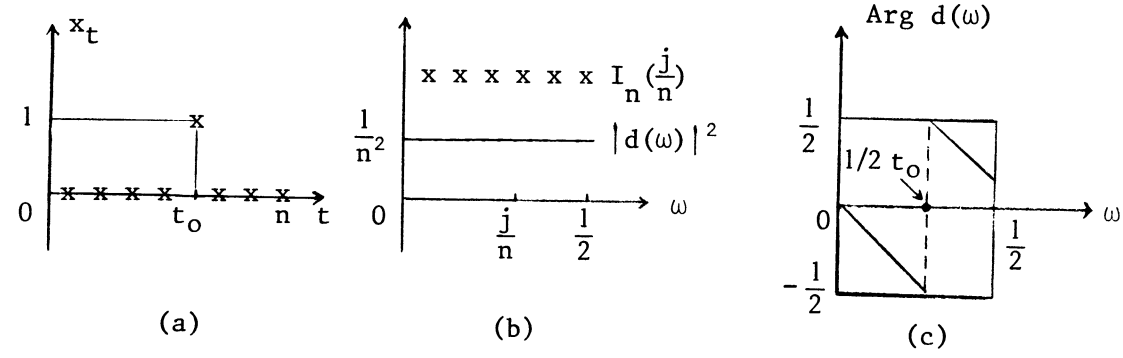
$$(5) \quad \begin{cases} c_j - i\, s_j = \sqrt{c_j^2 + s_j^2}\ (\cos 2\pi\phi_j - i \sin 2\pi\phi_j) = 2\ \left|d\left(\frac{j}{n}\right)\right| \exp 2i\pi \operatorname{Arg} d\left(\frac{j}{n}\right) \\ \qquad = \sqrt{c_j^2 + s_j^2}\ \exp(-2i\pi\phi_j) \\ \phi_j = -\operatorname{Arg} d\left(\frac{j}{n}\right) \qquad -\frac{1}{2} < \operatorname{Arg} d\left(\frac{j}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Cas particuliers</u>

1) <u>Impulsion à l'instant</u> t_o : $x_t = 0$ si $t \neq t_o$; $x_{t_o} = 1$

$d(\omega) = \frac{1}{n} \exp(-2i\pi\, \omega t_o)$; $|d(\omega)| = \frac{1}{n}$ ne dépend pas de t, $\operatorname{Arg} d(\omega) = -\omega t_o$ (mod. 1). Par (3), (4) et (5) on revient aisément à $I_n\left(\frac{j}{n}\right)$ et ϕ_j

Figure 11



2) <u>Chronique constante</u> : $x_t = 1$ pour tout t

$$d(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} \exp(-2i\pi\omega t) = \frac{1}{n}\,\frac{1-\exp(-2i\pi n\omega)}{1-\exp(-2i\pi\omega)}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\exp(-i\pi n\omega)\,[\exp(i\pi n\omega)-\exp(-i\pi n\omega)]}{\exp(-i\pi\omega)\,[\exp(i\pi\omega)-\exp(-i\pi\omega)]}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\sin 2\pi n\omega/2}{\sin 2\pi\omega/2}\,\frac{\exp(-i\pi n\omega)}{\exp(-i\pi\omega)}\ , \quad \omega \neq 0\ , \quad \omega \neq \frac{1}{2}$$

$$d(o) = 1 \quad ; \quad d(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t$$

$$|d(\omega)|^2 = \frac{1}{n^2}\left|\frac{\sin 2\pi n\omega/2}{\sin 2\pi\omega/2}\right|^2 ; \quad \text{Arg } d(\omega) = -\,\omega\,\frac{n-1}{2} \mod(1) \quad \omega \neq 0,\ \omega \neq \frac{1}{2}$$

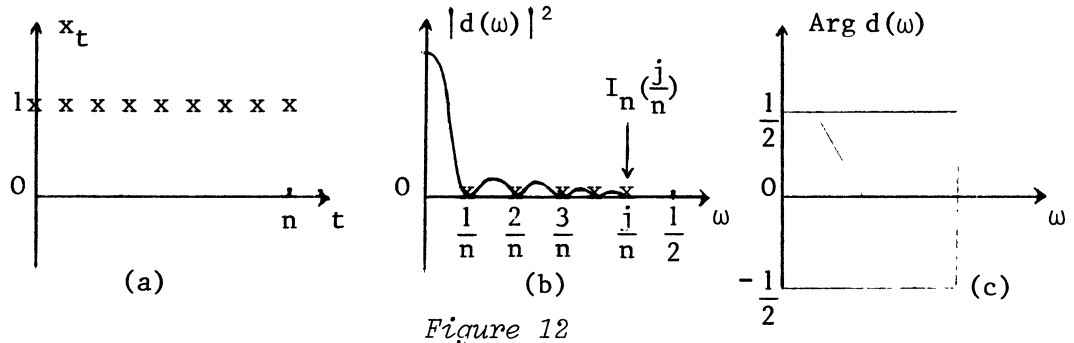


Figure 12

<u>Remarque</u> : $c_o = 1 \qquad c_j = s_j = 0 \qquad j \neq 0.$

3) <u>Chronique exponentielle</u> : $x_t = \exp 2\pi\omega_o t \quad 0 \leqslant t \leqslant n-1,\ \omega_o \in]-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}[$

$$d(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \exp 2i\pi(\omega_o-\omega)t = \frac{1}{n}\,\frac{\sin 2\pi n(\omega_o-\omega)/2}{\sin 2\pi(\omega_o-\omega)/2}\exp\{2i\pi(n-1)(\omega_o-\omega)/2\}$$

$$|d(\omega)|^2 = \frac{1}{n^2}\left|\frac{\sin 2\pi n(\omega_o-\omega)/2}{\sin 2\pi(\omega_o-\omega)/2}\right|^2 \qquad \text{Arg } d(\omega) = (n-1)(\omega_o-\omega)/2 \ (\text{mod } 1)$$

La fonction $|d(\omega)|^2$ est appelée ***Noyau de Fejer.***

L'étude de $|d(\omega)|$ et $|d(\frac{j}{n})|$ distingue deux cas :

. ω_o est une fréquence de Fourier, donc il existe $j_o \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_o = \frac{j_o}{n}$. Alors , $|d(\frac{j}{n})| = 0$ si $j \neq j_o$, $|d(\frac{j_o}{n})| = 1$

. ω_o n'est pas une fréquence de Fourier (voir figure 13).

Remarque :

Les vaguelettes de la fonction de ***Fejer*** s'atténuent rapidement, d'autant plus que n est grand.

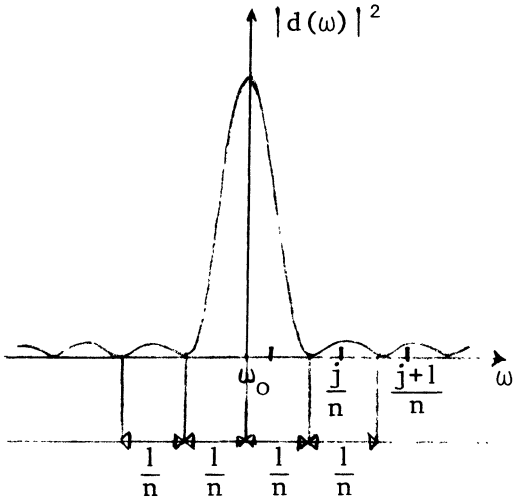


Figure 13

4) $x_t = \text{Cos } 2\pi\omega_o t \qquad 0 \leqslant t \leqslant n-1$

En notant $y_t = \exp 2\pi\omega_o t$, on a, avec des notations évidentes :

$$d_X(\omega) = \frac{1}{2}\ [\, d_y(\omega) + d_{\bar{y}}(\omega)\ ]$$

Si $\omega_o \neq 0$ et n assez grand $|d_y(\omega)|$ et $|d_{\bar{y}}(\omega)|$ ont des valeurs appréciables dans des zones étroites autour de ω_o pour $|d_y(\omega)|$ et de $-\omega_o$ pour $|d_{\bar{y}}(\omega)|$. Ces zones étant disjointes, on a :
$|d_X(\omega)|^2 \simeq |d_y(\omega)|^2 + |d_{\bar{y}}(\omega)|^2$. Nous ne construisons pas le graphique :

5) $x_t = t - \frac{n-1}{2}$ (cette chronique est parfois appelée rampe) $0 \leqslant t \leqslant n-1$

$$d(\omega) = \left\{ \frac{\frac{1}{n}\text{Cos } \pi\omega \text{ Sin } n\pi\omega - \text{Sin } \pi\omega \text{ Cos } \pi n\omega}{2 \text{ Sin}^2 \pi\omega} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{i} \exp\ (-i\pi(n-1)\omega) \right\}$$

On déduit :

$$\text{Arg } d(\omega) = \frac{3\pi}{4} - \frac{(n-1)2\pi\omega}{2} \quad ; \qquad \text{et} \quad |d(\omega)|^2.$$

7. ANNEXE 1

Nous allons construire ici pour $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$ des bases construites à partir de fonctions périodiques simples que sont des fonctions exponentielles complexes et les fonctions circulaires.

a) Quelques notations

$$1_t = (\underbrace{0,..,0,1}_{1},0,..,0) \qquad 1 \leqslant t \leqslant n \ , \quad t \in \mathbb{N}$$

$\{ 1_t \ ; \ 1 \leqslant t \leqslant n \}$ base canonique de $\mathbb{C}^n$ (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) ou base canonique de $\mathbb{R}^n$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

$$E_j = (\exp 2i\pi \frac{j}{n} t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{Z} : E_j \in \mathbb{C}^n$$

$$C_j = (\mathrm{Cos}\ 2\pi \frac{j}{n} t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{Z} : C_j \in \mathbb{R}^n$$

$$S_j = (\mathrm{Sin}\ 2\pi \frac{j}{n} t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} \quad ; \quad \forall j \in \mathbb{Z} : S_j \in \mathbb{R}^n$$

Proposition A1 :

La suite $(E_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$ constitue une base orthogonale pour le produit sacalaire usuel de $\mathbb{C}^n$; et $\| E_j \|^2_{\mathbb{C}^n} = n \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-1$

Preuve :

Il suffit de montrer que si $j \neq j'$: $(E_j \mid E_{j'})_{\mathbb{C}^n} = 0$ (nullité du produit scalaire) et $\| E_j \|^2_{\mathbb{C}^n} = n$

$$(E_j \mid E_{j'})_{\mathbb{C}^n} = \sum_{t=0}^{n-1} \exp 2i\pi \frac{j}{n} t \exp - 2i\pi \frac{j'}{n} t$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \exp 2i\pi \frac{j-j'}{n} t$$

. si $j \neq j'$: $(E_j \mid E_{j'})_{\mathbb{C}^n} = \dfrac{1 - \exp 2i\pi (j-j')t}{1 - \exp 2i\pi \frac{j-j'}{n} t}$

or $j - j' \in \mathbb{Z}$, donc $\exp 2i\pi (j-j')t = 1$ et $(E_j \mid E_{j'})_{\mathbb{C}^n} = 0$

.. si $j = j'$: $(E_j \mid E_{j'})_{\mathbb{C}^n} = \| E_j \|^2_{\mathbb{C}^n} = n$

Remarque A1 :

Le vecteur E_o de la base, $E_o = (1,..,1) \in \mathbb{C}^n$, est un vecteur constant de $\mathbb{C}^n$; on peut donc affirmer que la suite $(E_j)_{1 \leqslant j \leqslant n-1}$, des autres vecteurs de la base, est constituée de vecteurs *centrés*.

Lemme A1

$$\left[\begin{array}{lll} \text{Dans } \mathbb{R}^n : . & C_k = C_{n-k} \ ; \ S_k = -S_{n-k} & 1 \leqslant k \leqslant [\frac{n-1}{2}] \\ .. & S_n = S_o = 0_{\mathbb{R}^n} & \\ & C_n = C_o = (1,..1) & \\ ... & \text{si } n \text{ est pair : } S_{n/2} = 0_{\mathbb{R}^n} & \\ & C_{n/2} = ((-1)^t)_{0 \leqslant t \leqslant n-1} & \end{array}\right.$$

Preuve :

$$\left.\begin{array}{l} . \ \text{Cos } 2\pi \frac{n-k}{n} t = \text{Cos } 2\pi (1-\frac{k}{n})t = \text{Cos } 2\pi \frac{k}{n} t \\ \text{Sin } 2\pi \frac{n-k}{n} t = \text{Sin } 2\pi (1-\frac{k}{n})t = -\text{Sin } 2\pi \frac{k}{n} t \end{array}\right. \quad (0 \leqslant t \leqslant n-1)$$

Les preuves de .. et ... sont évidentes.

Proposition A2

La suite $((C_j)_{0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]}, (S_j)_{1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]})$ constitue une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Enfin :

$$\|C_o\|^2_{\mathbb{R}^n} = n \ ; \ \|C_j\|^2_{\mathbb{R}^n} = \|S_j\|^2_{\mathbb{R}^n} = \frac{n}{2} \qquad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$$

Si n est pair : $\|C_{\frac{n}{2}}\|^2_{\mathbb{R}^n} = n$.

Preuve

Nous n'allons pas donner une preuve complète, car celle-ci est longue, mais nous donnerons les principes de la démonstration. Il suffit de démontrer :

i) $(C_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0 \qquad 0 \leqslant j \neq j' \leqslant \frac{n}{2}$

ii) $(S_j \mid S_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0 \qquad 1 \leqslant j \neq j' \leqslant [\frac{n-1}{2}]$

iii) $(S_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0 \qquad 0 \leqslant j' \leqslant \frac{n}{2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$

iv) $\| S_j \|^2 = \| C_j \|^2 = \frac{n}{2} \qquad 1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}] \quad \| C_o \|^2 = \| C_{\frac{n}{2}} \|^2 = n$

On rappelle que :

$$E_j = C_j + i\, S_j \;\; ; \;\; C_j = \frac{E_j + E_{-j}}{2} \;, \quad S_j = \frac{E_j - E_{-j}}{2i}$$

et on exprimera tous nos vecteurs à partir d'écritures exponentielles. Par exemple :

$$(6) \quad \sum_{t=0}^{n-1} \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} t \,.\, \exp 2i\pi \frac{j'}{n} t = (C_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} + i(C_j \mid S_{j'})_{\mathbb{R}^n} .$$

Si le membre de gauche de (6) est nul, il en sera de même des parties réelles et imaginaires du membre de droite, donc nous obtiendrons une partie des résultats cherchés. Calculons le premier membre de (6) :

$$\sum_{t=0}^{n-1} \operatorname{Cos} 2\pi \frac{j}{n} t \;\; \exp 2i\pi \frac{j'}{n} t = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{[\exp 2i\pi \frac{j}{n} t + \exp 2i\pi \frac{j}{n} t]}{2} \;\; \exp 2i\pi \frac{j'}{n} t$$

$$= [\sum_{t=0}^{n-1} \exp 2i\pi \frac{(j-j')}{n} t + \sum_{t=0}^{n-1} \exp 2i\pi \frac{(j-j')}{n} t] \;.\; \frac{1}{2}$$

$$= [\frac{1-\exp 2i\pi (j+j')t}{1-\exp 2i\pi \frac{(j-j')}{n} t} + \frac{1-\exp 2i\pi (j-j')t}{1-\exp 2i\pi \frac{(j-j')}{n} t}] \;.\; \frac{1}{2}$$

. Si $1 \leqslant j \neq j' \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ les numérateurs de ces deux expressions sont nuls et les dénominateurs non nuls. Donc, on en déduit :

$$(C_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} = (C_j \mid S_{j'})_{\mathbb{R}^n} = 0 \qquad 1 \leqslant j \neq j' \leqslant \frac{n}{2}$$

. Si $1 \leqslant j = j' \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ le premier membre de (6) est égal à $\frac{n}{2}$, donc :

$$(C_j \mid C_{j'})_{\mathbb{R}^n} = \| C_j \|^2_{\mathbb{R}^n} = \frac{n}{2} \quad \text{et } (C_j \mid S_j) = 0$$

. Si $j = 0$ $1 \leqslant j' \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ le premier membre de (6) est égal à n,

. Si $j = \frac{n}{2}$ $1 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ $\| C_o \|^2_{\mathbb{R}^n} = \| C_{\frac{n}{2}} \|^2_{\mathbb{R}^n} = n$

et $(C_o \mid S_{j'}) = (C_{\frac{n}{2}} \mid S_{j'}) = 0$

En étudiant :

(7) $\sum_{t=0}^{n-1} \sin 2\pi \frac{j}{n} t \exp 2i\pi \frac{j'}{n} t$, on achève la démonstration.

Remarque A2

Ici C_o est un vecteur constant de $\mathbb{R}^n$, donc tous les autres vecteurs de la base sont centrés.

Commentaires

Les vecteurs E_j, C_j et S_j, constituant respectivement les bases de $\mathbb{C}^n$ et de $\mathbb{R}^n$, sont construits à partir de fonctions périodiques de période $\frac{n}{j}$; ces vecteurs ou applications de $[0,n-1] \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ ne sont plus périodiques en général mais seulement lorsque $\frac{n}{j}$ est un entier. Par exemple, pour n = 12, tous les vecteurs de base sont périodiques, sauf C_5 et S_5 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABELSON (1953) *Spectral analysis and the study of individual references*. Ph. D. Tesis. Princeton University.

[2] T.W. ANDERSON (1971) *Statistical Analysis of Time Series*. Wiley.

[3] M. BARBUT - G. FOURGEAUD (1971) *Eléments d'Analyse des Chroniques*. Hachette.

[4] W.H. BEVERIDGE (1922) *Wheat Prices and Rainfall in Western Europe*. J. Roy. Stat. Soc. 85, 412-459.

[5] P. BLOOMFIELD (1976) *Fourier Analysis of Time Series : an introduction*. Wiley.

[6] G.S. FISHMAN (1969) *Spectral Methods in Econometrics*. Harvard University Press.

[7] W.A. FULLER (1976) *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley.

[8] C.W.J. GRANGER (1964) *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton Univ. Press.

[9] G.M. JENKINS - D.G. WATTS (1968) *Spectrum Analysis and its Applications*. Holden-Day.

[10] E. MALINVAUD (1969) *Méthodes Statistiques de l'Econométrie*. Dunod.

[11] M.B. PRIESTLEY (1982) *Spectral Analysis and Time Series*. Ac. Press.

[12] J.N. RAYNER (1971) *An Introduction to Spectral Analysis*. London. Pion.

[13] A. SCHUSTER (1897) *On Linear and Solar periodicities of earthquakes*. Proc. Roy. Soc. 61, 455-465.

[14] G.G. STOKES (1879) Proc. Roy. Soc. 122.

oOo