

J. P. DESCLES

Graphes sans circuit et bilinéarité

Mathématiques et sciences humaines, tome 81 (1983), p. 5-45

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__81__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GRAPHES SANS CIRCUIT ET BILINEARITE

J.P. DESCLES *

Le présent article a pour objectif d'établir des liens entre une classe générale de graphes sans circuit utilisés en informatique ou en linguistique (DES.80) et le "calcul matriciel". Chaque graphe de la classe retenue est tel que l'ensemble des sommets d'un même niveau est totalement ordonné, situation courante en informatique. Tout graphe est composable avec d'autres graphes de la même classe, la composition étant fermée par rapport à la classe. Il s'ensuit une représentation des graphes de la classe considérée par des "matrices formelles" où chaque graphe est décomposable en "somme" et "produit" de chemins élémentaires. Cette démarche fait bien apparaître la structure algébrique et le langage qui permettent, d'une part, de décrire et d'engendrer des représentations informatiques de ces graphes sans circuit de façon à en effectuer une gestion dynamique par grammaires de graphes, par exemple (CORI.80), et, d'autre part, d'illustrer le "calcul matriciel" par de simples compositions de graphes. Le rôle profond et central joué par la bilinéarité qui seul rend possible le "calcul matriciel" est alors clairement démontré et illustré.

* * *

* UER de Mathématiques et d'Informatique, Université de Paris-VII.

L'auteur remercie A. Lentin et P. Rosenstiehl d'avoir bien voulu relire le manuscrit.

Présentons le problème de façon informelle.

Soit A un alphabet contenant un ensemble de sommets ; on étend A en posant :

$$A_0 = A \cup \{0\} ; A_{01} = A \cup \{0,1\} \quad (0,1 \notin A)$$

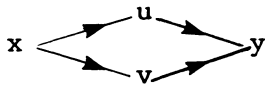
A^* (respectivement A_0^* , A_{01}^*) désigne le monoïde engendré par A (A_0 , A_{01})

Un chemin de x vers y et passant par les sommets x_1 , x_2 , ..., x_n est codé par un mot θ de la forme :

$$\theta = x \theta'_1 x_1 \dots x_i \theta'_{i+1} \dots x_{n-1} \theta'_n y \quad \text{où } \theta'_i \in A_{01} \text{ et } x_n = y$$

Tout chemin θ est un mot de $x A_{01}^* y$. Deux chemins sont composables entre eux par 'pseudo-concaténation' notée '·'.

EXEMPLE : soit G un graphe sans circuit évoqué par :



$$A_{01} \supseteq \{x, y, u, v, 0, 1\}$$

Nous avons trois chemins du graphe de x vers y :

$$\theta_1 = x 1 u 1 y = x \theta'_1 y / \theta_2 = x 1 v 1 y = x \theta'_2 y / \theta_3 = x 0 y = x \theta'_3 y$$

La pseudo-concaténation est illustrée par :

$$x 1 u \cdot u 1 y = x 1 u 1 y = x \theta'_1 y \quad \square$$

A l'aide d'une opération "d'addition" qui sera définie, il sera possible de faire la 'somme' de deux et plus généralement plusieurs chemins de x vers y .

Désignons par $\hat{C}(x,y)$ l'ensemble de toutes les sommes de chemins de x vers y , une 'somme' $\hat{\theta}$ de x vers y est décomposable, en utilisant les symboles métalinguistiques de parenthésage qui autorisent les regroupements, en chemins élémentaires, soit :

$$\hat{\theta} = x (\theta'_1 + \dots + \theta'_i + \dots + \theta'_n) y = x (A) y$$

sachant que, pour chaque i , $x \theta'_i y$ est un chemin de x vers y .

EXEMPLE (suite)

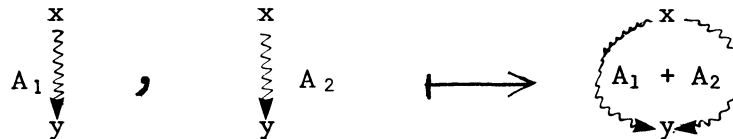
$$\begin{aligned}
\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= x \theta_1' y + x \theta_2' y + x \theta_3' y \\
&= x (\theta_1' + \theta_2' + \theta_3') y \\
&= x (1 u 1 + 1 v 1 + 0) y = x (1 u 1 + 1 v 1) y \quad \square
\end{aligned}$$

Chaque élément $\hat{\theta}$ de $\hat{C}(x, y)$ est donc de la forme $x(A)y$ où A est un mot du monoïde libre engendré à partir de $A_{01} \cup \{+\}$.

"L'addition" sur les chemins de x vers y est définie sur $\hat{C}(x, y)$ par :

$$\langle x(A_1)y, x(A_2)y \rangle \longmapsto x(A_1 + A_2)y$$

ce que l'on peut évoquer par :



où chacun des "arcs" entre x et y est une "somme" de chemins.

L'ensemble $\hat{C}(x, y)$ est muni d'une structure de monoïde abélien (pour la 'somme'). On en déduit alors une catégorie $\underline{C}(A)$ dans laquelle on compose des chemins $\hat{\theta}_1 = x(A_1)y$ et $\hat{\theta}_2 = y(A_2)z$ à l'aide de la 'pseudo-concaténation'.

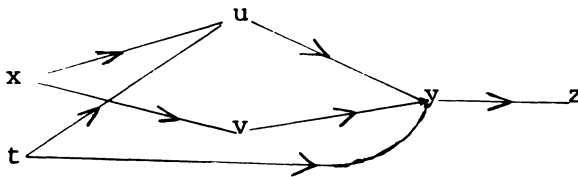
$\underline{C}(A)$ est une 'Abm-catégorie' (au sens de Arbib (ARB / MAN. 75)) que l'on munit d'un 'biproduit' en imposant une condition de bilinéarité, ce qui permet d'étendre $\underline{C}(A)$ en une catégorie 'semi-additive' $\underline{T}(A)$ (catégorie avec produits et coproduits finis, chaque ensemble de flèches étant muni d'une structure de monoïde abélien compatible avec la bilinéarité), cette extension étant unique et librement engendrée par la catégorie $\underline{C}(A)$.

Chaque flèche f de $\underline{T}(A)$ représente l'ensemble des chemins (d'un graphe sans circuit) entre deux niveaux des sommets (chaque niveau étant totalement ordonné). Chacune des flèche de $\underline{T}(A)$ est décomposable sous la forme d'une "matrice formelle" où chaque composante est une somme de chemins entre deux sommets. La composition des flèches dans $\underline{T}(A)$ se comporte comme un "produit matriciel". Les propriétés de bilinéarité, de composition matri-

cielle se transportent immédiatement aux graphes sans circuit considérés et il devient possible de justifier par une méthode purement algébrique et non combinatoire l'algorithme d'énumération et les algorithmes apparentés de Y. Malgrange et A. Kaufmann (MAL / KAU , 63).

La représentation d'un graphe sans circuit particulier (de la classe considérée) est codée de la façon suivante : s'il existe un arc entre deux sommets x et y , on code : ' $x (1) y$ ' ; s'il n'existe pas un tel arc, on code : ' $x (0) y$ ' ; soit deux ensembles (totalement ordonnés) de sommets de niveaux différents (on rappelle que tout graphe sans circuit est décomposable en niveaux), la 'somme' des chemins entre ces deux ensembles ordonnés est codée par une matrice formelle, chaque composante de la matrice étant un certain mot formel qui code la somme des chemins d'un sommet vers un autre. Tout graphe sans circuit, décomposé en niveaux, est alors codé et décomposé en un produit matriciel de matrices formelles où chaque matrice code l'ensemble des 'sommes' de chemins entre deux niveaux successifs.

EXEMPLE : Considérons le graphe évoqué par :



La 'somme' des chemins de x vers y et respectivement de y vers z est codé par le mot formel :

$$\Theta = x (1 u 1 + 1 v 1) y \quad \text{respectivement : } y (1) z$$

L'ensemble des 'sommes' de chemins du couple $\langle x, t \rangle$ de sommets vers y est codé par le vecteur :

$$\hat{v} = [x (1 u 1 + 1 v 1) y, t (1 u 1 + 1) y]$$

Le graphe général est représenté par le produit de deux vecteurs :

$$\hat{v} \circ [y (1) z]$$

En effectuant le produit , selon les règles formelles précises, on obtient un vecteur $\hat{w} = [\theta_1, \theta_2]$ à deux composantes :

$$\theta_1 = x ((1 u 1 + 1 v 1) y (1)) z$$

$$\theta_2 = t ((1 u 1 + 1) y (1)) z$$

où chaque composante code la 'somme' des chemins de x (respectivement t) vers z. Il est possible de donner des règles de simplification - comme en algèbre classique- ce que nous n'avons pas proposé dans le présent article, et par conséquent de simplifier les écritures de θ_1 et θ_2 :

$$\theta_1 = x(u + v) yz = xuyz + xvyz$$

$$\theta_2 = t(u + 1) yz = tuyz + tyz \quad \square$$

L'article ne présente pas le codage lui-même mais développe les propriétés algébriques du langage de représentation utilisé et les décompositions qu'il implique.

NOTATION : Soit une application de X vers Y. L'image de l'élément x par f sera noté 'xf'. Soit g une application de Y vers Z, l'application h de X vers Z, obtenue par composition de f avec g, est telle que l'on note : 'h = fg'. Nous avons donc :

$$xh = xfg = x (fg) = (xf) g$$

Un graphe G est la donnée de $\langle O, F, \delta_1, \delta_2 \rangle$ où O, F sont respectivement un ensemble d'objets (sommets) et un ensemble de flèches (arcs) ; δ_i est une application de F dans O (pour $i = 1, 2$) : δ_1 est l'application source, δ_2 l'application but. Une (petite) catégorie $\underline{C}$ est un graphe accompagné de la donnée de deux applications :

$$\underline{id} : O \longrightarrow F : x \longrightarrow x \underline{id}$$

$$\underline{0} : F \times_0 F = \{ \langle f, f' \rangle ; f, f' \in F : f \delta_1 = f' \delta_0 \} \longrightarrow F$$

$$\langle f, f' \rangle \longmapsto ff' \text{ (composition de f avec f')}$$

telles que l'on ait, de plus, les propriétés suivantes :

$$(i) \ x \underline{\text{id}} \delta_0 = x = x \underline{\text{id}} \delta_1$$

$$(ii) \ (ff') \delta_0 = f\delta_0 \ ; \ (ff') \delta_1 = f'\delta_1$$

$$(iii) \ \text{pour toute flèche } f, \text{ on a : } f (f\delta_1) \underline{\text{id}} = f \ ; \ (f\delta_0) \underline{\text{id}} f = f$$

Pour tout couple d'objet $\langle x, y \rangle$ de $\mathcal{O}$, on pose :

$$\underline{\mathcal{C}}(x, y) = \{ f \in F \ ; \ f\delta_0 = x, \ f\delta_1 = y \}$$

Un chemin d'un graphe est une suite de flèches composables. A chaque graphe G , on associe, de façon canonique, la catégorie $\underline{\mathcal{G}}^*$ "libre engendrée par G " dont les objets sont les objets de G et dont les flèches sont les chemins dans G .

Un mot μ (de longueur m) sur (un ensemble) X (non vide) est la donnée d'une suite (de longueur m) d'éléments de X , cette suite est notée :

' $x_1 \dots x_j \dots x_m$ '. Soit $\mu = x_1 \dots x_j \dots x_m$ un mot sur X et ν un autre mot $\nu = y_1 \dots y_p$ sur X . On dit que ν présente une occurrence dans μ , si et seulement si : (i) $0 < p \leq m$

$$(ii) \text{ il existe un } j \ (1 \leq j \leq m) \text{ tel que } x_j = y_1, \dots, x_{j+p} = y_p$$

Aux abus d'écriture près on notera : ' $\nu \leq \mu$ '

1. MONOÏDE DES CHEMINS SUR UN ALPHABET

Soit A un ensemble non vide (alphabet) au plus dénombrable, 0 et 1 des symboles distingués avec $0, 1 \notin A$, $A_{01} = A \cup \{0, 1\}$. Le monoïde libre engendré par une partie $B \subseteq A_{01}$ est désigné par B^* , le mot neutre étant λ .

1.1 DEFINITION 1 : Soit $\langle x, y \rangle \in A^2$; on pose : $C(x, y) = x A_{01}^* y$.

Un mot θ de $C(x, y)$ est appelé 'chemin (sur A) de x vers y '. $\square$

La concaténation est notée par la simple juxtaposition.

λ_{xy} désigne le chemin vide : $x \lambda y$ (de x vers y)

0_{xy} désigne le chemin nul : $x 0 y$ (de x vers y)

Considérons la donnée de $\langle A A_1^* A, . \rangle$ où $.$ est une loi binaire (et partielle) définie sur $A A_1^* A$ que l'on appelle 'pseudo-concaténation' :

$$x \theta_1' \xi . \eta \theta_2' y = \begin{cases} x \theta_1' \xi \theta_2' y & \text{si } \xi = \eta \\ \text{non définie} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les chemins θ_1 , θ_2 , θ_3 composables, on vérifie que l'on a :

$$\theta_1 . (\theta_2 . \theta_3) = (\theta_1 . \theta_2) . \theta_3$$

1.2. DEFINITION 2 : Soit $\langle x, y \rangle \in A^2$; $\hat{C}(x, y)$ désigne l'ensemble des éléments $\hat{\theta}$ de la forme $x(A)y$ où A est une partie finie de A_1^* . $\square$

Sur $\hat{C}(x, y)$, on définit une opération binaire, notée $+$ et appelée 'somme'

par : $\langle x(A_1)y, x(A_2)y \rangle \mapsto x(A_1 \cup A_2)y$

En désignant par $x(A_1 + A_2)y$ le résultat de cette opération, on peut écrire

$$x(A_1 + A_2)y \simeq x(A_1)y \cup x(A_2)y$$

Par homomorphisme injectif de A_{01}^* dans $(A_{01} \cup \{ \}, \{ \})^*$:

$$\theta = x \theta' y \mapsto x(\theta')y$$

on représente chaque chemin (sur A) par un mot parenthésé (plus aisé à décoder). On désignera encore par θ l'image de cette injection (aux abus d'écriture près). On identifie également $x (\theta') y$ avec $x (\{\theta'\}) y$. De cette identification, il découle que chaque élément $\hat{\theta} = x (A) y$ de $\hat{C} (x,y)$ est décomposable en une somme d'éléments (ses composantes élémentaires) :

$$\hat{\theta} = x (\theta'_1 + \dots + \theta'_i + \dots + \theta'_n) y \text{ avec } \theta'_i \in A$$

Nous avons une injection canonique de $C (x,y)$ dans $\hat{C} (x,y)$ et nous notons (aux abus d'écriture près) que :

$$\text{si } \theta'_i \in A \text{ alors } \theta_i = x (\theta'_i) y \in \hat{\theta} = x (A) y$$

et l'on dit que :

$$\theta_i \text{ a une occurrence dans } \hat{\theta}$$

1.3 Soit $\langle x,y \rangle \in A^2$; on munit $\hat{C} (x,y)$ d'une structure à l'aide des deux axiomes suivants :

[A₁] (axiome des chemins nuls) :

il existe un unique chemin nul $0_{xy} = x (0) y$

tel que pour tout $\langle z,t \rangle \in A^2$:

$$(i) \theta_1 = z (\theta'_1) x \Rightarrow \theta_1 \circ 0_{xy} = 0_{zx} = z (0) x$$

$$(ii) \theta_2 = y (\theta'_2) t \Rightarrow 0_{xy} \circ \theta_2 = 0_{xt} = x (0) t$$

[A₂] (axiome de l'élément nul) :

pour chaque $\theta = x (\theta') y$ on a :

$$\theta + 0_{xy} = \theta = 0_{xy} + \theta$$

Nous supposons que les axiomes précédents sont vrais pour chaque ensemble $\hat{C} (x,y)$ ($\langle x,y \rangle \in A^2$)

L'unique chemin nul 0_{xy} pour un $\langle x,y \rangle \in A^2$ sera désigné par 0 lorsque le contexte s'y prêtera.

L'axiome [A₁] est équivalent à la proposition suivante :

si 0 appartient à l'ensemble $\hat{C}$ des chemins nuls associés à un alphabet A
alors pour tout chemin (sur A) θ composable avec 0 on a :

$\theta \cdot 0 \in \hat{0}$ et $0 \cdot \theta \in \hat{0}$ et les trois chemins $0, \theta \cdot 0, 0 \cdot \theta$ coïncident.

De l'axiome $[A_2]$, on déduit immédiatement que :

$$\hat{\theta} + 0 = \hat{\theta} = 0 + \hat{\theta} \text{ pour chaque } \hat{\theta} \in \hat{C}(x,y),$$

$$\text{pour chaque } \langle x,y \rangle \in A^2$$

1.4. PROPOSITION 1 : Pour chaque $\langle x,y \rangle \in A^2$ la donnée de $\langle \hat{C}(x,y), +_{xy}, +_{xy} 0 \rangle$ définit un monoïde abélien que l'on désigne par son ensemble sous-jacent.

Preuve : Soit $\hat{\theta}_i \in \hat{C}(x,y)$ ($i=1, 2, 3$) ; l'associativité de l'union ensembliste et la commutativité permettent d'écrire :

$$(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) + \hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 + (\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3) \text{ et } \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1$$

D'après les axiomes $[A_1]$ et $[A_2]$ le neutre de $+_{xy}$ est nécessairement :

$$0_{xy} = x(0)y \text{ . } \square$$

Pour chaque $\langle x,y \rangle \in A^2$, $\hat{C}(x,y)$ est dit monoïde (abélien) des chemins (de x vers y). Un élément $\hat{\theta}$ est appelé par abus de langage "chemin (de x vers y)" alors que l'on devrait dire "somme de chemins (de x vers y)".

1.5. DEFINITION 3 : $\hat{C}(A)$ désigne l'ensemble $\cup \hat{C}(x,y)$ ($\langle x,y \rangle \in A^2$).

Soit A et A' deux alphabets non vides, un morphisme $\hat{f}$ de $\hat{C}(A)$ vers $\hat{C}(A')$ est déterminé par la donnée d'une application $f : A \rightarrow A'$

telle que pour chaque $\langle x,y \rangle \in A^2$, on ait :

$$\text{si } \hat{\theta} = x(\theta'_1 + \dots + \theta'_i + \dots + \theta'_n)y \in \hat{C}(x,y)$$

$$\text{alors } \hat{\theta} \hat{f} = x f(\theta'_1 f^* + \dots + \theta'_i f^* + \dots + \theta'_n f^*) y f$$

$$\text{ou } f^* \text{ est le prolongement de } f \text{ à } A_0^* \text{ tel que } 0 f^* = 0 \text{ . } \square$$

De la définition précédente, on déduit que :

$$(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) \hat{f} = \hat{\theta}_1 \hat{f} + \hat{\theta}_2 \hat{f}$$

pour chaque

$$\langle \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \rangle \in \hat{C}(x, y) \quad (\langle x, y \rangle \in A^2)$$

On désigne par $\hat{C}$ la catégorie qui a pour objets les ensembles $\hat{C}(A)$ et pour flèches les morphismes $\hat{f}$ déterminés par les applications f entre alphabets.

2. 'ABM-CATEGORIE' DES CHEMINS SUR UN ALPHABET

2.1 DEFINITION 4 : $\hat{C}(A)$ désigne l'ensemble des objets et des flèches associées à un alphabet non vide A et ainsi défini :

(i) A est un ensemble d'objets ;

(ii) . pour chaque $\langle x, y \rangle \in A^2$ tel que $x \neq y$:

$$\hat{C}(A)(x, y) = \hat{C}(x, y)$$

.. pour chaque $x \in A$:

$$\hat{C}(A)(x, x) \supset \hat{C}(x, x) \quad \text{et}$$

$\hat{C}(A)(x, x)$ est tel que l'élément 1_x (dit 'neutre de x') appartient à cet ensemble et soit défini par l'expression :

$x(1)y$ où 1 est un symbole adjoint à $A_0 \cup \{ \) , (\}$, avec $1 \notin A_0$

On pose $A_{01} = A_0 \cup \{1\}$

De plus, 1_x vérifie les propriétés suivantes :

$$. \theta = x(\theta')y \Rightarrow 1_x \circ \theta = x(1_x \theta')y = x(\theta')y$$

$$.. \theta = y(\theta')x \Rightarrow \theta \circ 1_x = y(\theta'x1)x = y(\theta')x$$

(iii) pour chaque $\langle x, y, z \rangle \in A^3$,

$$\text{si } \hat{\theta}_1 = x(A_1)y \text{ et } \hat{\theta}_2 = y(A_2)z$$

alors $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 = x(A_3)z$ avec :

$$A_3 = \{ \theta'_{j_1} y \theta'_{j_2} ; \theta'_{j_1} \in A_1, \theta'_{j_2} \in A_2 \} \subset A_{01}^*$$

L'ensemble $\langle x, y \rangle^u \subseteq \underline{C}(A)(x, y)$ ($\langle x, y \rangle \in A^2$) désigne l'ensemble des flèches de $\underline{C}(A)$. $\square$

2.2 La condition (iii) de 2.1 n'est autre que le prolongement de la 'pseudo-concaténation' de $\langle x, y \rangle^u \subseteq \underline{C}(x, y)$ à $\langle x, y \rangle^{\hat{C}} \subseteq \hat{C}(x, y)$ ($\langle x, y \rangle \in A^2$).

Cette condition s'écrit aussi (d'après la notation introduite en 1.2) :

$$\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 \approx \{ \hat{\theta}_{i_1} \cdot \hat{\theta}_{j_2} ; \hat{\theta}_{i_1} \in \hat{\theta}_1 \text{ et } \hat{\theta}_{j_2} \in \hat{\theta}_2 \}$$

De la définition 4, on déduit aussitôt que :

$$1_x \cdot \hat{\theta} = \hat{\theta} \text{ pour tout } \hat{\theta} = x(A)y$$

$$\hat{\theta} \cdot 1_x = \hat{\theta} \text{ pour tout } \hat{\theta} = y(A)x ;$$

$$1_x + 0 = 1_x = 0 + 1_x \quad (\text{en étendant l'axiome } \underline{A_2} \text{ à tous les mots}$$

de A_0^*)

$$1_x \cdot 0_{xx} = 0_{xx} = 0_{xx} \cdot 1_x$$

2.3 Nous avons supposé que : $1 \neq 0$, pour écarter le cas trivial suivant.

Si 1 est identique à 0 , on devrait avoir simultanément pour chaque

$$\theta = x(\theta')y \in \underline{C}(x, y) \text{ ce qui suit :}$$

$$1_x \cdot x(\theta')y = x(\theta')y = 0_{xx} \cdot x(\theta')y = 0_{xy} = x(0)y$$

ce qui impliquerait que le seul chemin sur A de x vers y soit $x(0)y$,

c'est à dire le chemin nul. Nous n'avons pas supposé que nécessairement :

$1 \neq \lambda$. Dans certains cas, il est possible d'identifier le neutre de x ,

soit $1_x = x(1)x$ avec le chemin vide soit $x(\lambda)x$; dans le cas général,

en adjoignant 1 à $A_0 \cup \{ \cdot \}$, $\{ \cdot \}$, avec $1 \neq 0$ et $1 \neq \lambda$, toute flèche de

$\underline{C}(A)(x, x)$ est représentée par un mot de la forme :

$$\hat{\theta} = x(\theta'_1 + \dots + \theta'_i + \dots + \theta'_n)x$$

$$\text{avec } (\theta'_i \in A_0 \text{ ou } \theta'_i = 1)$$

Il faut distinguer, dans le cas général, le chemin (ou flèche) vide

$x(\lambda)x$, du chemin (ou flèche) nul $x(0)x$, de la flèche unité

$x(1)x$ ($x \in A$). Il est possible d'identifier $x(1)x$ et $x(\lambda)x$ mais

jamais $x(1) \cdot x$ et $x(0) \cdot x$ (sauf dans le cas trivial).

2.4 Rappelons les DEFINITIONS GENERALES suivantes :

- . Une catégorie $\underline{\underline{C}}$ est une 'Abm-catégorie' (au sens de M.A. Arbib et E.G Manes [ARMA-75]) lorsque pour tout couple d'objets $\langle \underline{o}_1, \underline{o}_2 \rangle$, $\underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_2)$ est structuré en monoïde abélien et lorsque, de plus :
 - (i) la composition des flèches dans $\underline{\underline{C}}$ est bilinéaire par rapport aux lois des monoïdes;
 - (ii) les éléments neutres des monoïdes sont les flèches nulles.
- . La condition de bilinéarité s'exprime ainsi :

$$f, g \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_2) \text{ et } h \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_2, \underline{o}_3) \Rightarrow (f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$$

$$f \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_2) \text{ et } g, h \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_2, \underline{o}_3) \Rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$$
- . Une flèche $f \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_2)$ est nulle si l'on a pour toute flèche $g \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_3, \underline{o}_1)$ (resp. $h \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_2, \underline{o}_4)$) :

$$g \cdot f = g' \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_3, \underline{o}_2) \text{ (resp. } f \cdot h = h' \in \underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_4))$$
 où g' (resp. h') est nulle aussi. Une catégorie $\underline{\underline{C}}$ est 'à flèches nulles' si pour tout couple $\langle \underline{o}_1, \underline{o}_2 \rangle$ d'objets, $\underline{\underline{C}}(\underline{o}_1, \underline{o}_2)$ a une flèche nulle.
- . Une catégorie $\underline{\underline{C}}$ est semi-additive si $\underline{\underline{C}}$ est une 'Abm-catégorie' ayant un 'biproduit' pour tout couple d'objets ainsi qu'un objet nul.

REMARQUE : B. Mitchell (MIT-65) utilise le terme de catégorie 'semi-additive' pour désigner une 'Abm-catégorie'. Nous préférons suivre (ARMA-75) plus conforme au paradigme des catégories abéliennes (MAC-71).

2.5. PROPOSITION 2 : $\underline{\underline{C}}(A)$ est une 'Abm-catégorie'

Preuve : Par construction de $\underline{\underline{C}}(A)$ Pour les flèches composables, on vérifie que :

$$\hat{\theta}_1 \cdot (\hat{\theta}_2 \cdot \hat{\theta}_3) = (\hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2) \cdot \hat{\theta}_3 ;$$

Pour chaque objet $x \in A$, 1_x est la flèche neutre de $\underline{\underline{C}}(A)(x,x)$.
 Pour chaque $\langle x,y \rangle \in A^2$, $\underline{\underline{C}}(x,y)$ est un monoïde abélien de neutre 0_{xy} lorsque $x \neq y$ (cf. 1.4.); si $x = y$, l'adjonction de 1_x au monoïde $\hat{C}(x,x)$ ne modifie pas la structure (cf. 2.2) et l'on fait de $\underline{\underline{C}}(A)(x,x)$ un monoïde abélien tel que pour tout $\hat{\theta} = x(A)x : \hat{\theta} + 1_x = 1_x + \hat{\theta} = x(1+A)x$.
 Il est clair que les neutres des monoïdes sont les flèches nulles de $\underline{\underline{C}}(A)$ (conséquence de l'axiome des chemins nuls en 1.3). La composition des flèches dans $\underline{\underline{C}}(A)$ est bilinéaire ; on vérifie en effet que :

$$\begin{aligned} \text{si : } \hat{\theta}_1, \hat{\theta}'_1 \in \underline{\underline{C}}(A)(x,y) \text{ et } \hat{\theta}_2, \hat{\theta}'_2 \in \underline{\underline{C}}(A)(y,z) \quad (x,y,z \in A) \\ \text{alors : } (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}'_1) \cdot (\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}'_2) = \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 \cdot \hat{\theta}'_2 + \hat{\theta}'_1 \cdot \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}'_1 \cdot \hat{\theta}'_2 \end{aligned}$$

expression de la bilinéarité . $\square$

3. CATEGORIE SEMI-ADDITIVE DES CHEMINS SUR UN ALPHABET

3.1 DEFINITION 5 : La catégorie $\underline{\underline{T}}(A)$ est caractérisée par :

- (i) les mots de A^* qui sont les objets ;
- (ii) les flèches qui sont ainsi définies :

. Pour tout $\langle x,y \rangle \in A^2$, nous avons l'injection :

$$\underline{\underline{C}}(A)(x,y) \rightarrow \underline{\underline{T}}(A)(x,y)$$

$$x(A)y \mapsto [x(A)y]$$

. Pour tout $\langle x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n \rangle \in A^* \times A^*$

on a la bijection :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n, & m \\ \swarrow & & \searrow \\ & \times & \\ \downarrow & & \downarrow \\ j = 1 & & i = 1 \end{array} \end{array} \quad \underline{\underline{T}}(A)(x_j, y_i) \simeq \underline{\underline{T}}(A)(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$$

qui détermine les flèches de $\underline{\underline{T}}(A)(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$.

Chaque flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ est identifiée par la famille $[x_j(A_{ji})y_i] \quad (j \in [m], i \in [n])$

(iii) Soit $\sigma^1 \simeq [x_j (A_{ji}) y_i]$ ($j \in [m]$, $i \in [n]$) et

$\sigma^2 \simeq [y_i (B_{ik}) z_k]$ ($i \in [n]$, $k \in [p]$) deux flèches de $\underline{\underline{T}}(A)$

La flèche composée $\sigma^3 = \sigma^1 \cdot \sigma^2 \in \underline{\underline{T}}(A)$ est définie par la bijection :

$$\sigma^3 \simeq [x_j (C_{jk}) z_k] \quad (j \in [m], k \in [p]) \quad \text{avec}$$

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^n A_{ji} y_i B_{ik} = A_{j1} y_1 B_{1k} + \dots + A_{jn} y_n B_{nk}$$

et naturellement :

$$\sigma^3 \in \underline{\underline{T}}(A) (x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_p).$$

(iv) Pour chaque flèche $x_1 \dots x_m \in A^*$: $1_{x_1 \dots x_m} \simeq [x_j (1) x_j]$ ($j \in [m]$)

(v) $\lambda \in A^*$ est un objet nul dans $\underline{\underline{T}}(A)$. $\square$

Une flèche de $\underline{\underline{T}}(A)$ est donc définie à une bijection près. Pour des commodités d'écriture, qui seront justifiées ultérieurement, une flèche $\sigma \in \underline{\underline{T}}(A) (\mu, \nu) (m, n \in A^*)$ est caractérisée par :

$$\sigma = \mu \left(\sum_{j,i} x_j (\sigma_{ji}) y_i \right) \nu,$$

avec $x_j (\sigma_{ji}) y_i = x_j (A_{ji}) y_i$ ($x_j \leq \mu$, $y_i \leq \nu$) ;

$x_j (\sigma_{ji}) y_i$ est une composante de σ .

REMARQUES :

(1) La notation proposée ci-dessus nous invite à considérer une flèche

$$\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$$

comme une somme "directe" de chemins (les composantes plus élémentaires)
c'est-à-dire la somme "directe" des chemins.

$x_j (\sigma_{ji}) y_i$ (de x_j vers y_i) ($j \in [m]$, $i \in [n]$).

(2) La composition des flèches σ^1 et σ^2 définie dans (iii) s'effectue comme un produit matriciel (là encore nous en expliquerons la raison

profonde : voir remarque (2) en 3.4. ci-dessous) : la composition est donc bien associative et $\underline{\underline{T}}(A)$ est - on le vérifie - une catégorie.

3.2. PROPOSITION 3 : On peut munir $\underline{\underline{T}}(A)$, d'une et d'une seule façon, d'un système de flèches nulles.

Preuve : $\underline{\underline{T}}(A)$ a un objet nul ; pour tout couple d'objet $\langle \mu, \nu \rangle$ la flèche $0 : \mu \rightarrow \nu$ est la flèche composée $\mu \rightarrow \lambda \rightarrow \nu$ et c'est une flèche nulle et la seule possible si $\underline{\underline{T}}(A)$ a des flèches nulles, puisque $\mu \rightarrow \lambda$ et $\lambda \rightarrow \nu$ sont des flèches nulles. Le système de ces flèches composées constitue un système de flèches nulles pour $\underline{\underline{T}}(A)$ et il n'y en a pas d'autres . $\square$

PROPOSITION 4 : Si $\underline{\underline{T}}(A)$ a des flèches nulles, alors nécessairement

$1_\lambda = 0_{\lambda\lambda}$ et réciproquement.

Preuve : λ est un objet nul, donc $\underline{\underline{T}}(A)(\lambda, \lambda)$ a un seul élément, d'où l'égalité. Supposons maintenant que $1_\lambda = 0_{\lambda\lambda}$; soit μ un objet de $\underline{\underline{T}}(A)$; $\underline{\underline{T}}(A)(\mu, \lambda)$ n'est pas vide puisque $0_{\mu\lambda}$ y appartient ; pour tout élément u de $\underline{\underline{T}}(A)(\mu, \lambda)$ on a :

$$u = u \cdot 1_\lambda = u \cdot 0_{\lambda\lambda} = 0_{\mu\lambda}$$

et $\underline{\underline{T}}(A)(\mu, \lambda)$ a un seul élément : λ est un objet final . On démontre de même que λ est un objet initial et donc que λ est un objet nul. Comme précédemment, chaque flèche nulle $0_{\mu\nu} = 0_{\mu\lambda} \cdot 0_{\lambda\nu}$. $\square$

PROPOSITION 5 : $\underline{\underline{T}}(A)$ est une 'Abm-catégorie'.

Preuve : On vérifie que $\underline{\underline{T}}(A)$ est bien une catégorie (la composition des flèches est associative tout comme le produit matriciel est associatif, d'après la remarque (2)-de 3.1.). Par ailleurs, pour chaque couple $\langle \mu, \nu \rangle \in A^* \times A^*$, l'ensemble $\underline{\underline{T}}(A)(\mu, \nu)$ est structuré en monoïde abélien.

Soit $\sigma^1 = \mu \left(\sum_{j,i} \sigma^1_{ji} \right) \vee$ et $\sigma^2 = \mu \left(\sum_{j,i} \sigma^2_{ji} \right) \vee$

$$\sigma^3 = \sigma^1 + \sigma^2 = \mu \left(\sum_{j,i} \sigma^1_{ji} + \sigma^2_{ji} \right) \vee \in \underline{\underline{T}}(A) (\mu, \vee).$$

La flèche de $\underline{\underline{T}}(A) (\mu, \vee)$ qui est définie par :

$$\mu (0) \vee = \mu \left(\sum_{j,i} x_j \wedge y_i \right) \vee \quad (x_j \leq \mu, y_i \leq \vee)$$

est telle que pour tout $\sigma^1 \in \underline{\underline{T}}(A) (\rho, \mu)$ (resp. $\sigma^2 \in \underline{\underline{T}}(A) (\vee, \rho)$) avec $\rho \in A^*$

on a :

$$\sigma^1 \cdot \mu (0) \vee = \rho (0) \vee \quad (\text{resp. } \mu (0) \vee \cdot \sigma^2 = \mu (0) \rho)$$

$$\text{avec } \rho (0) \vee = \rho \left(\sum_{k,i} z_k (0 \wedge 0) y_i \right) \vee$$

$$(\text{resp. } \mu (0) \rho = \mu \left(\sum_{j,k} x_j (0 \wedge 0) z_k \right) \rho) :$$

c'est une conséquence de la définition de la composition dans $\underline{\underline{C}}(A)$ et de

l'axiome des flèches nulles en 1.3. La flèche $\mu (0) \vee$ est donc une

flèche nulle et elle est unique d'après la proposition 3. On vérifie que

$\mu (0) \vee$ est un neutre pour la somme + (conséquence de la proposition 1

et de la construction de $\underline{\underline{T}}(A)$) et donc que :

$\langle \underline{\underline{T}}(A) (\mu, \vee), +, \mu (0) \vee \rangle$ est un monoïde abélien.

Soit $\sigma^1, \sigma^2 \in \underline{\underline{T}}(A) (\mu, \vee)$ et $\sigma \in \underline{\underline{T}}(A) (\vee, \rho)$ (resp. $\sigma \in \underline{\underline{T}}(A) (\rho, \mu)$)

$$(\mu, \vee, \rho \in A^*);$$

on vérifie que :

$$(\sigma^1 + \sigma^2) \cdot \sigma = \sigma^1 \cdot \sigma + \sigma^2 \cdot \sigma$$

$$(\text{resp. } \sigma \cdot (\sigma^1 + \sigma^2) = \sigma \cdot \sigma^1 + \sigma \cdot \sigma^2)$$

(la vérification est analogue à celle qui établit la distributivité entre

multiplication et addition dans le calcul matriciel) . $\square$

COROLLAIRE 1 : Dans $\underline{\underline{T}}(A)$, $1_\lambda = 0_{\lambda\lambda}$

Preuve : Puisque $\underline{\underline{T}}(A)$ est une 'abm-catégorie', $\underline{\underline{T}}(A)$ a des flèches nulles

et donc, en vertu de la proposition 4, nous avons le résultat annoncé ;

par la proposition 3, le système des flèches nulles est unique . $\square$

3.3. Rappelons la définition suivante (Mac Lane (MACL-71) p. 190)

DEFINITION 6 : Un biproduit $\underline{c}$ de deux objets $\underline{o}_1$ et $\underline{o}_2$ d'une 'Abm-catégorie' $\underline{\mathbb{C}}$ est défini par le diagramme (à un isomorphisme près) :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{o}_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \underline{c} & \xleftarrow{\pi_2} & \underline{o}_2 \\ & \xrightarrow{k_1} & & \xrightarrow{k_2} & \\ & & \underline{c} & & \end{array}$$

où les flèches π_i, k_i ($i = 1, 2$) satisfont les identités :

$$k_1 \cdot \pi_1 = 1_{\underline{o}_1} ; k_2 \cdot \pi_2 = 1_{\underline{o}_2} ; \pi_1 \cdot k_1 + \pi_2 \cdot k_2 = 1_{\underline{c}} . \square$$

DEFINITION 7 : La projection $\pi_i : y_1 \dots y_n \rightarrow y_i$ dans $\underline{\mathbb{T}}(A)$ est une flèche caractérisée par le n-uple $\langle \pi_{i_1}, \dots, \pi_{i_k}, \dots, \pi_{i_n} \rangle$ où :

$$\pi_{ik} = \begin{cases} y_k (0) y_i & \text{si } k \neq i \\ y_k (1) y_i & \text{si } k = i \end{cases}$$

et notée aussi : $y_1 \dots y_n (\pi_{i_1} + \dots + \pi_{i_k} + \dots + \pi_{i_n}) y_i$

(aux abus d'écriture signalés en 3.1).

La coprojection $k_j : x_j \rightarrow x_1 \dots x_m$ dans $\underline{\mathbb{T}}(A)$ est une flèche caractérisée par le n-uple $\langle k_{j_1}, \dots, k_{j_k}, \dots, k_{j_m} \rangle$

$$k_{jm} = \begin{cases} x_j (0) x_k & \text{si } j \neq k \\ x_j (1) x_k & \text{si } j = k \end{cases}$$

et notée aussi : $x_j (k_{j_1} + \dots + k_{j_k} + \dots + k_{j_m}) x_1 \dots x_m$

(aux abus d'écriture signalés en 3.1.). $\square$

PROPOSITION 6 : Dans $\underline{\mathbb{T}}(A)$, l'objet ab ($a, b \in A$) est 'le' biproduit des deux objets a et b.

Preuve : Nous avons :

$$k_1 = a (a (1) a + a (0) b) ab ;$$

$$k_2 = b (b (0) a + b (1) b) ab ;$$

$$\pi_1 = ab (a (1) a + b (0) a) a ;$$

$$\pi_2 = ab (a (0) b + b (1) b) b .$$

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \pi_1 &= a (a (1) a + a (0) b) a a \\ &= a (a (1) a + a (0) a) a \\ &= a (1) a \\ &= 1_a \end{aligned}$$

de même :

$$k_2 \cdot \pi_2 = 1_b$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot k_1 &= ab (a (1a1) a + a (1a0) b + b (0a1) a + b (0a0) b) ab \\ &= ab (a (1) a + a (0) b + b (0) a + b (0) b) ab \\ &= ab (a (1) a) ab \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} \pi_2 \cdot k_2 &= ab (b (1) b) ab , d'où \\ \pi_1 \cdot k_1 + \pi_2 \cdot k_2 &= ab (a (1) a + b (1) b) ab \\ &= 1_{ab} \end{aligned}$$

Un biproduit est défini à un isomorphisme près, d'où 'le' biproduit. $\square$

REMARQUE :

On rappelle que produit et coproduit sont définis à un isomorphisme près.

PROPOSITION 7 : Dans $\underline{T}(A)$, l'objet ab est 'le' produit de a et de b par

π_1 et π_2 .

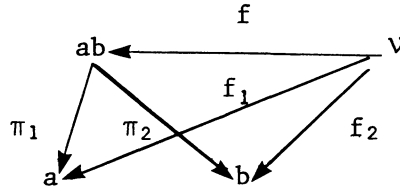
Preuve : Soit ab considéré comme biproduit, alors :

$$\begin{aligned} k_2 \cdot \pi_1 &= k_2 \cdot (\pi_1 \cdot k_1 + \pi_2 \cdot k_2) \cdot \pi_1 = k_2 \cdot \pi_1 \cdot 1 + 1 \cdot k_2 \cdot \pi_1 \\ &= k_2 \cdot \pi_1 + k_2 \cdot \pi_1 \end{aligned}$$

d'où $k_2 \cdot \pi_1 = 0$.

De même, on démontre que $k_1 \cdot \pi_2 = 0$.

Montrons que ab est 'le' produit, c'est-à-dire que si $v \in A^*$ est tel que l'on ait un couple de flèche $f_1 : v \rightarrow a$ et $f_2 : v \rightarrow b$, alors il existe une flèche unique $f : v \rightarrow ab$ qui rend commutatif les diagrammes :



$$(f_i = f \cdot \pi_i) \quad (i = 1, 2)$$

Posons $f = (f_1 \cdot k_1 + f_2 \cdot k_2)$;

D'après ce que nous venons de démontrer ci-dessus on a :

$$f \cdot \pi_i = f_i.$$

Soit $f' : v \rightarrow ab$ tel que l'on ait $f' \cdot \pi_i = f_i$ ($i = 1, 2$) alors :

$$\begin{aligned} f' &= f' \cdot (\pi_1 \cdot k_1 + \pi_2 \cdot k_2) = f' \cdot \pi_1 \cdot k_1 + f' \cdot \pi_2 \cdot k_2 \\ &= f_1 \cdot k_1 + f_2 \cdot k_2 = f \end{aligned}$$

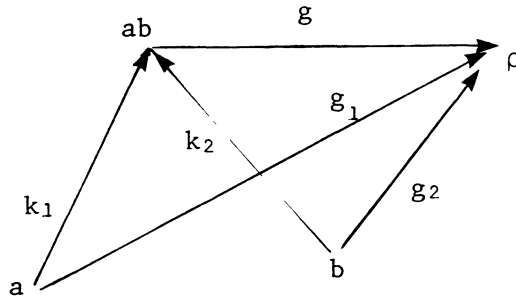
d'où f est unique et ab est un produit (à un isomorphisme près). $\square$

PROPOSITION 8 : Dans $\underline{T}(A)$, l'objet ab est 'le' coproduit de a et de b par k_1 et k_2 .

Preuve : Soit $g_1 : a \rightarrow \rho$, $g_2 : b \rightarrow \rho$ ($\rho \in A^*$),

il faut montrer qu'il existe une unique flèche $g : ab \rightarrow \rho$

telle que les diagrammes suivants commutent ($g_i = k_i \cdot g$ pour $i = 1, 2$) :



Posons $g = (\pi_1 \cdot g_1 + \pi_2 \cdot g_2) : ab \rightarrow \rho$

il est clair que : $k_i \cdot (\pi_1 \cdot g_1 + \pi_2 \cdot g_2) = k_i \cdot \pi_1 \cdot g_1 + k_i \cdot \pi_2 \cdot g_2 = g_i$ ($i = 1, 2$)

puisque : $k_1 \cdot \pi_1 = 1, k_1 \cdot \pi_2 = 0, k_2 \cdot \pi_1 = 0$ et $k_2 \cdot \pi_2 = 1$

Soit $g' : ab \rightarrow \rho$ telle que $k_i \cdot g' = g_i$ ($i = 1, 2$) alors :

$$g' = (\pi_1 \cdot k_1 + \pi_2 \cdot k_2) \cdot g' = \pi_1 \cdot k_1 \cdot g' + \pi_2 \cdot k_2 \cdot g' = \pi_1 \cdot g_1 + \pi_2 \cdot g_2 = g \quad \square$$

COROLLAIRE 2 : $\underline{T}(A)$ a des produits (resp. coproduits) finis.

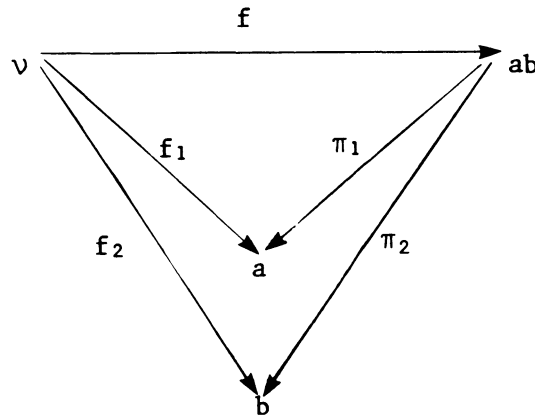
Preuve : Toute catégorie qui a un objet nul (donc final) et qui a un produit pour deux objets quelconques, a des produits finis (resp. initial et coproduit par dualité) ; c'est une propriété générale des catégories ((MACL-77)p. 73), d'où le résultat . $\square$

COROLLAIRE 3 : Pour chaque $v \in A^*$, l'isomorphisme de monoïdes abéliens :

$$\underline{T}(A)(v, a) \times \underline{T}(A)(v, b) \simeq \underline{T}(A)(v, ab)$$

est déterminé par : $f = (f_1 \cdot k_1 + f_2 \cdot k_2)$

Preuve : nous avons les diagrammes commutatifs ($f \cdot \pi_i = f_i$, $i = 1, 2$) :



(d'après la démonstration de la proposition 7) $\square$

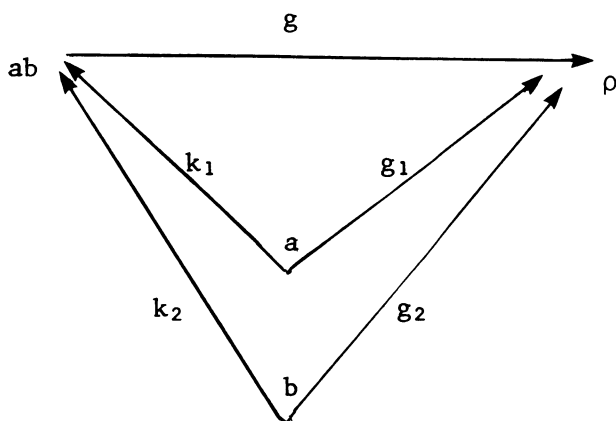
COROLLAIRE 4 : Pour chaque $\rho \in A^*$, l'isomorphisme de monoïdes abéliens :

$$\underline{T}(A)(a, \rho) \times \underline{T}(A)(b, \rho) \simeq \underline{T}(A)(ab, \rho)$$

est déterminé par :

$$g = (\pi_1 \cdot g_1 + \pi_2 \cdot g_2)$$

Preuve : Nous avons les diagrammes commutatifs $(k_i \cdot g = g_i ; i = 1, 2)$



□

REMARQUE :

L'existence du produit (resp. coproduit) déduite de l'existence du biproduit est une propriété générale des 'Abm-catégories' qui possèdent des biproduits (MIT-65, p. 29) et réciproquement. Nous avons simplement 'exhibé' la forme des projections et coprojections de $\underline{T}(A)$. Les corolaires précédents sont des extensions des bijections qui interviennent dans la construction de $\underline{T}(A)$.

3.4. Rappelons que dans une catégorie $\underline{C}$ qui a à la fois des produits et des coproduits, toute flèche du coproduit vers le produit est déterminée par une matrice ; de plus, si $\underline{C}$ a un objet nul, il y a une flèche canonique (la matrice diagonale) du coproduit vers le produit :

$$x_1 \cup \dots \cup x_m \rightarrow x_1 \times \dots \times x_m$$

(MACL-71 p.74)

Par itération sur les produits et coproduits, on démontre une propriété plus forte dans $\underline{T}(A)$ (à partir de (MACL-71))

THEOREME 1 : Soit $x_1 \dots x_m \in A^*$; la famille $(k_j : x_j \rightarrow x_1 \times \dots \times x_m)$ (resp. la famille $(\pi_j : x_1 \times \dots \times x_m \rightarrow x_j)$) ($j \in [m]$) fait de $x_1 \cup \dots \cup x_m$ 'le' coproduit (resp. 'le' produit) des $x_1 \dots x_m$.

On a :

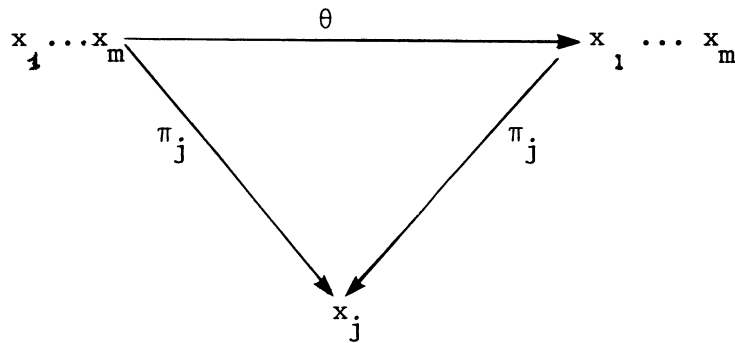
$$k_j \cdot \pi_i = \delta_{ij} = \begin{cases} a_j (1) a_i & \text{si } j = i \\ a_j (0) a_i & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

(j, i ∈ [m]) ;

et $\pi_1 \cdot k_1 + \dots + \pi_m \cdot k_m = 1_{x_1 \dots x_m}$;

la flèche 'canonique' du coproduit $x_1 \dots x_m$ vers le produit $x_1 \dots x_m$ est un isomorphisme.

Preuve : Le corollaire 3 permet de montrer que $\pi_1 \cdot k_1 + \dots + \pi_m \cdot k_m = \theta$ est tel que pour chaque $j \in [m]$ le diagramme suivant commute :



c'est-à-dire que $\theta \cdot \pi_j = \pi_j$. On vérifie que $\theta = 1_{x_1 \dots x_m}$ et, de la même façon que dans la proposition 7, que $k_j \cdot \pi_i = \delta_{ji}$. □

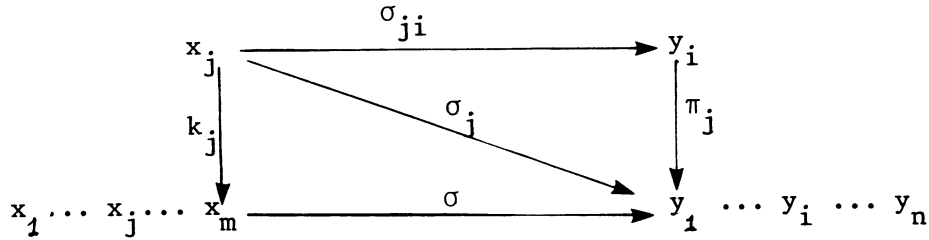
THEOREME 2 : Soit $x_1 \dots x_m \in A^*$ et $y_1 \dots y_n \in A^*$; l'isomorphisme de monoïdes abéliens :

$$\mathbb{T}(A)(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) \simeq \sum_{j,i} \mathbb{T}(A)(x_j, x_i)$$

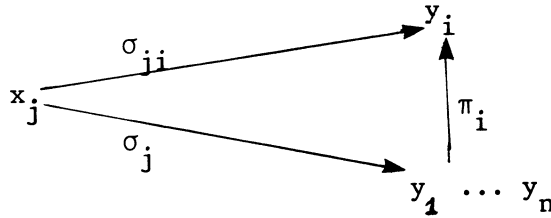
(où $\sum_{j,i}$ est le biproduct itéré de monoïdes abéliens) est déterminé de façon unique par la flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ à partir des composantes σ_{ij} telles que :

$$\sigma_{ji} = k_j \cdot \sigma \cdot \pi_i : x_j \rightarrow y_i$$

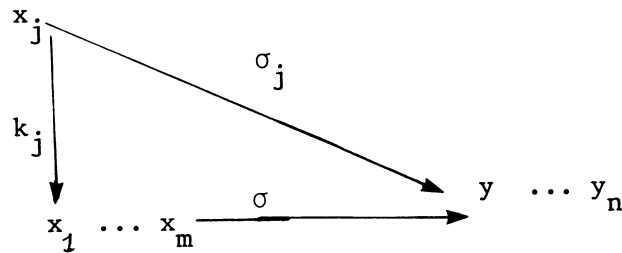
Preuve : Soit la donnée de $(\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i)$ ($j \in [m], i \in [n]$) alors il existe une flèche unique $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ telle que les diagrammes suivants commutent pour chaque $\langle j, i \rangle$:



En effet, j étant fixé, il existe (par définition du produit) une unique flèche $\sigma_j : x_j \rightarrow y_1 \dots y_n$ telle que les diagrammes (produits) commutent (Cf. proposition 7) :



et donc telle que $\sigma_j \cdot \pi_i = \sigma_{ji}$ pour chaque $i \in [n]$. Lorsque j varie, il existe (par définition du coproduit) une unique flèche σ telle que les diagrammes (coproduits) commutent (cf. proposition 8) :



et donc telle que $k_j \cdot \sigma = \sigma_j$ ($j \in [m]$).

Alors $k_j \cdot \sigma \cdot \pi_i = \sigma_j \cdot \pi_i = \sigma_{ji} \cdot \square$

COROLLAIRE 5 : Soit $x_1 \dots x_m \in A^*$ et $y_1 \dots y_n \in A^*$ tels que l'on ait la famille de flèches $\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i$ ($j \in [m], i \in [n]$), alors la flèche

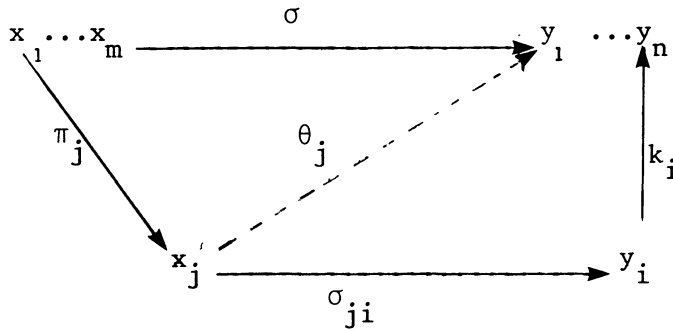
$\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ est déterminée par :

$$\sigma = \sum_{j,i} \pi_j \cdot \sigma_{ji} \cdot k_i = \pi_1 \cdot \sigma_{11} \cdot k_1 + \dots + \pi_m \cdot \sigma_{mn} \cdot k_n$$

Preuve : D'après le théorème précédent, la donnée de la famille

$(\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i)$ détermine une flèche unique σ . On peut montrer que σ déterminée ci-dessus vérifie bien les conditions $k_j \cdot \sigma \cdot \pi_i = \sigma_{ji}$ pour chaque $\langle j, i \rangle$. Montrons, en la construisant, que σ existe.

Soit $\theta_j = \sum_i \sigma_{ji} \cdot k_i$ la flèche $x_j \rightarrow y_1 \dots y_n$ (j étant fixé) :



Cette flèche θ_j est telle que pour chaque $i \in [n]$, $\theta_j \cdot \pi_i = \sigma_{ji}$,

d'après le corollaire (généralisé à n composantes). Si j varie, d'après le corollaire (généralisé à m composantes), la flèche $\theta = \sum_j \pi_j \cdot \theta_j$ est telle que $k_j \cdot \theta = \theta_j$ pour chaque $j \in [m]$.

Comme la flèche $x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ déterminée par $(\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i)$ est unique (théorème précédent) : $\theta = \sigma$. $\square$

REMARQUES :

1) le théorème précédent précise l'isomorphisme entre

$\langle \underline{T}(A) (x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n, +, 0) \rangle$, d'une part et le produit itéré $\sum_{j,i} \langle \underline{T}(A) (x_j, y_i), +_{x_j, y_i}, 0 \rangle$, d'autre part.

2) le corollaire 'justifie' en quelque sorte la notation proposée pour

désigner une flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ en fonction de ses composantes, soit : $x_1 \dots x_m (\sum_{j,i} \sigma_{ji}) y_1 \dots y_n$ (cf. remarque (2) en 3.1)

Cette notation fait clairement apparaître la décomposition de

$\sigma = \sum_{j,i} \pi_j \cdot \sigma_{ji} \cdot k_i$ où l'occurrence de $\sigma_{ji} = x_j (A_{ji}) y_i$ dans σ , considérée comme une somme de chemins plus élémentaires, est composée

avec la projection :

$\pi_j : x_1 \dots x_m \rightarrow x_j$ et la coprojection $k_i : y_i \rightarrow y_1 \dots y_n$.

Une flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ peut donc être considérée comme une somme de flèches canoniquement associée à la donnée de la famille :

$$(\sigma_{ji}) \quad (j \in [m], i \in [n])$$

4. REPRESENTATION MATRICIELLE DES CHEMINS SUR UN ALPHABET.

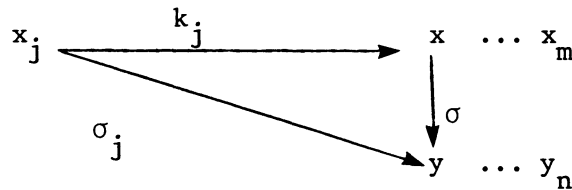
4.1. DEFINITION 8 :

Soit $x_1 \dots x_m$ un objet de $\underline{T}(A)$ considéré comme un coproduit : il admet alors une m-(co-)décomposition déterminée par $(k_j : x_j \rightarrow x_1 \dots x_m) \quad (j \in [m])$; soit $y_1 \dots y_n$ un objet de $\underline{T}(A)$, considéré comme un produit : il admet une n-décomposition déterminée par : $(\pi_i : y_1 \dots y_n \rightarrow y_i) \quad (i \in [n])$. $\square$

PROPOSITION 9 :

Soit une m-décomposition de $x_1 \dots x_m$; il y a une bijection entre chaque flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ et le m-uple $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ où

$\sigma_j : x_j \rightarrow y_1 \dots y_n$ sont des flèches de $\underline{T}(A)$ telles que l'on ait les diagrammes co-produits $(j \in [m])$:

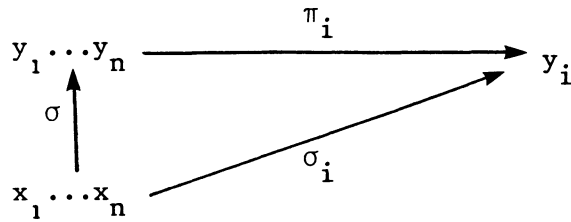


Preuve : Propriété (universelle) du coproduit . $\square$

PROPOSITION 10 :

Soit une n-décomposition de $y_1 \dots y_n$; il y a une bijection entre chaque flèche $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ et le n-uple $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ où

$\sigma_i : x_1 \dots x_m \rightarrow y_i$ sont des flèches de $\underline{T}(A)$ telles que l'on ait les diagrammes produits $(i \in [n])$:



Preuve : Propriété (universelle) du produit . $\square$

4.2 En suivant (MACL-71) et (ARB/MAN-75), nous introduisons ce qui suit.

A chaque m -décomposition de $x_1 \dots x_m$ on associe le vecteur colonne suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix} = {}^t [\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_m]$$

qui caractérise $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow v$. On rappelle que chaque composante σ_j est une flèche $x_j \rightarrow v$ de $\underline{T}(A)$ telle que $k_j \cdot \sigma = \sigma_j$ ($j \in [m]$). On dit que le vecteur colonne ${}^t[\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ est le coproduit des composantes $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ et que c'est une décomposition de $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow v$.

A chaque n -décomposition de $y_1 \dots y_n$ on associe le vecteur ligne suivant :

$$[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$$

qui caractérise $\sigma : \mu \rightarrow y_1 \dots y_n$. On rappelle que chaque composante σ_i est une flèche $\mu \rightarrow y_i$ de $\underline{T}(A)$ telle que $\sigma \cdot \pi_i = \sigma_i$ ($i \in [n]$). On dit que le vecteur ligne $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ est le produit des composantes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et que c'est une décomposition de $\sigma : \mu \rightarrow y_1 \dots y_n$. $\square$

REMARQUES :

- 1) Pour indiquer que l'occurrence de la composante appartient à un vecteur colonne ${}^t[\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_m]$ on utilisera parfois la notation σ^j , d'où naturellement l'identification ${}^t[\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_m] \equiv [\sigma^1, \dots, \sigma^j, \dots, \sigma^m]$
- 2) Le contexte lève l'ambiguïté entre σ^1 (resp. σ^2, σ^3) compris comme une flèche et la première composante (resp. 2ème, 3ème) d'un vecteur colonne.

NOTATIONS : Si nous désignons par $\boxplus$ le coproduit et par $\boxtimes$ le produit, nous avons les bijections suivantes :

$$\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y : \sigma \simeq {}^t[\sigma_1, \dots, \sigma_m] = \boxplus_j \sigma_j$$

$$\sigma = \mu \rightarrow y_1 \dots y_n : \sigma \simeq [\sigma_1, \dots, \sigma_n] = \boxtimes_i \sigma_i$$

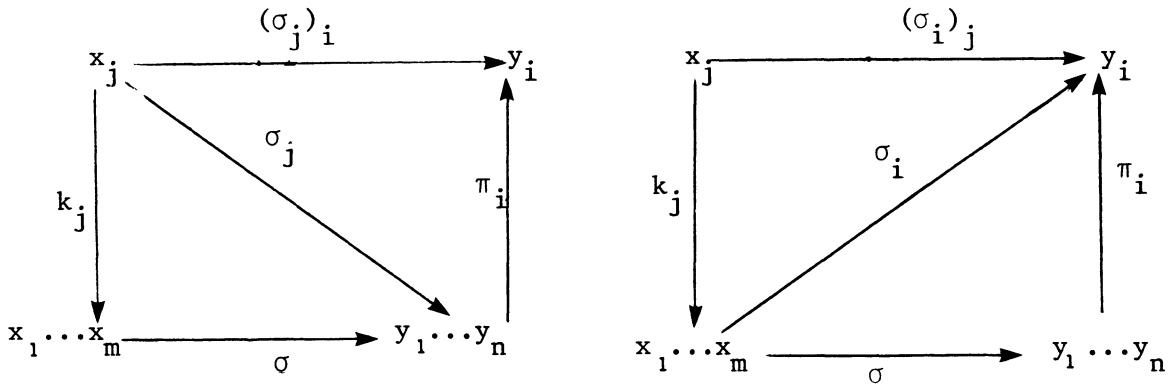
REMARQUE : D'après le remarque 1, on peut écrire :

$${}^t[\sigma_1, \dots, \sigma_m] = \boxplus_j \sigma_j$$

PROPOSITION 11 :

Soit $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ une flèche de $\underline{T}(A)$; la codécomposition de σ suivie de la décomposition de chaque composante est identique à la décomposition de σ suivie de la codécomposition de chaque composante.

Preuve : Nous avons les deux diagrammes commutatifs :



puisque $x_1 \dots x_m$ (resp. $y_1 \dots y_n$) admet une m -décomposition (resp. n -décomposition) dans $\underline{T}(A)$. Comme σ est déterminé de façon unique à partir de la donnée de $((\sigma_j)_i)$ (resp. $((\sigma_i)_j)$) d'après le corollaire 5, on a alors :

$$(\sigma_j)_i = k_j \cdot \sigma \cdot \pi_i = (\sigma_i)_j$$

$$\text{d'où : } \sigma_{ji} = (\sigma_j)_i = (\sigma_i)_j \cdot \square$$

La proposition précédente permet d'écrire, avec les notations et conventions précédentes :

$$\sigma \approx \begin{matrix} \otimes & (X & \sigma_i) \\ j & i & \end{matrix}^j \approx \begin{matrix} X & (\otimes & \sigma^j) \\ i & j & \end{matrix}_i \approx \begin{matrix} \otimes & (X & \sigma_{ji}) \\ j & i & \end{matrix}$$

PROPOSITION 12 :

Soit $\sigma^1 : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ et $\sigma^2 : y_1 \dots y_n \rightarrow z_1 \dots z_p$
deux flèches de $\underline{T}(A)$; la flèche $\sigma^3 = \sigma^1 \cdot \sigma^2 : x_1 \dots x_m \rightarrow z_1 \dots z_p$
est canoniquement déterminée par la famille des composantes $((\sigma^3)_{jk})$ de σ^3
où chaque composante est obtenue par le produit matriciel des deux compo-
santes $(\sigma^1)_j$ et $(\sigma^2)^k$.

Preuve : $x_1 \dots x_m$ est un coproduit et admet donc une m-codécomposition,
d'où le vecteur-colonne :

$${}^t[(\sigma^1)_1, \dots, (\sigma^1)_j, \dots, (\sigma^1)_m]$$

avec $(\sigma^1)_j : x_j \rightarrow y_1 \dots y_n$

$y_1 \dots y_n$ est un produit et admet une n-décomposition, pour chaque

$j \in [m]$, nous avons le vecteur ligne :

$$[(\sigma^1)_{j1}, \dots, (\sigma^1)_{jn}]$$

$z_1 \dots z_p$ est un produit et admet une p-décomposition, d'où le vecteur ligne

$$[(\sigma^2)_1, \dots, (\sigma^2)_k, \dots, (\sigma^2)_p]$$

avec $(\sigma^2)_k : y_1 \dots y_n \rightarrow z_k$

$y_1 \dots y_n$ est aussi un coproduit et admet une n-décomposition ; pour chaque

$k \in [p]$, nous avons le vecteur colonne :

$${}^t[(\sigma^2)_{1k}, \dots, (\sigma^2)_{nk}]$$

Par construction de la flèche $\sigma^3 \in \underline{T}(A) (x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_p)$, σ^3 est
déterminée de façon unique par les flèches $(\sigma^3)_{jk} \in \underline{T}(A) (x_j, z_k)$,

(théorème 2), c'est-à-dire par :

$$(\sigma^3)_{jk} = \sigma_{j1}^1 \sigma_{1k}^2 + \dots + \sigma_{ji}^1 \sigma_{ik}^2 + \dots + \sigma_{jn}^1 \sigma_{nk}^2$$

Nous avons donc finalement :

$$(\sigma^3)_{jk} = [(\sigma^1)_{j1}, \dots, (\sigma^1)_{jn}] \begin{bmatrix} (\sigma^2)_{1k} \\ \vdots \\ (\sigma^2)_{nk} \end{bmatrix} = (\sigma^1)_j (\sigma^2)_k$$

□

Des propositions précédentes, ainsi que des théorèmes 1 et 2, on déduit aussitôt le théorème suivant ((MACL-71)) :

THEOREME 3 :

Il y a une correspondance biunivoque entre $\underline{T}(A) (x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ et l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ dont chaque terme de coordonnées $\langle j, i \rangle$ est $\sigma_{ji} \in \underline{T}(A) (x_j, y_i)$. Le produit des flèches est analogue au produit matriciel. A la flèche 'canonique' du coproduit vers le produit est associée la matrice de dimension $n \times n$: (δ_{ji}) où $\delta_{ji} = 1$ si $j = i$ et $\delta_{ji} = 0$ si $j \neq i$.

REMARQUE :

La catégorie $\underline{T}(A)$ (mais ceci reste vrai pour toute une classe de catégories construites par les mêmes procédés) a les propriétés suivantes :

- 1) il y a une structure de monoïde abélien sur chaque ensemble de flèches avec la condition de bilinéarité sur la composition (des flèches par rapport à l'opération du monoïde) ;
- 2) il y a des biproduits (et donc des produits et coproduits finis) ;
- 3) il y a un isomorphisme canonique du coproduit vers le produit (ce qui n'est pas vrai de toute catégorie avec produits et coproduits) ;

La condition 3 est impliquée par les conditions 1) et 2) (théorème 1).

Cette catégorie a ses flèches $\sigma : x_1 \dots x_m \rightarrow y_1 \dots y_n$ caractérisées

de façon unique par ses composantes $\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i$ (théorème 2) ; les flèches se composent comme le produit usuel des matrices.

Ainsi que le remarque Mac Lane, les conditions (1) et (2) ci-dessus "contiennent tout le calcul matriciel" (MACL-71 p. 192)

4.3. La représentation des flèches de $\underline{T}(A)$ en termes matriciels permet de noter quelques faits utiles .

1) Soit $\sigma : x \rightarrow y_1 \dots y_n \in \underline{T}(A)$; $y_1 \dots y_n$ est un produit, donc n-décomposable ; on associe à σ un vecteur ligne $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ qui est le produit des composantes σ_i ($i \in [n]$), d'où :

$$\sigma \simeq \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

En particulier, soit $\sigma_j : x_j \rightarrow y_1 \dots y_n$ ($j \in [m]$) alors :

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ji} \quad (\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i)$$

2) Pour des raisons duales, on écrit, en désignant le coproduit par $\boxplus$, pour

$$\sigma_i : x_1 \dots x_m \rightarrow y_i \quad (i \in [n]) :$$

$$\sigma_{.i} = \sum_{j=1}^m \sigma_{ji} \quad (\sigma_{ji} : x_j \rightarrow y_i)$$

3) La proposition 11 permet d'écrire :

$$\sigma \simeq \sigma_{..} = \sum_{j=1}^m (\sigma_{j.}) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{.i})$$

NOTATION ET CONVENTION : Nous ne distinguerons plus entre σ , considérée comme une flèche de $\underline{T}(A)$ et $\sigma_{..}$ considérée comme une matrice ; nous travaillons donc à un isomorphisme près comme cela est usuel en mathématiques.

4) Soit $a \sqcup b$ le coproduit de a et de b ; soit ab le produit, (nous notons différemment l'un et l'autre dans ce paragraphe).

La matrice :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

représente l'isomorphisme $a \cup b \rightarrow ab$ (théorème 1).

5) Soit $\sigma = [\sigma_1, \dots, \sigma_n] : x \rightarrow y_1 \dots y_n$ une flèche ; à σ on peut associer une famille de flèches pour chacun des mots :

$$y_1 \dots y_n \quad y_{n+1} \dots y_{n+p} \quad (1 \leq p \leq +\infty)$$

La flèche σ' , associée canoniquement à σ , de source x et de but

$y_1 \dots y_n y_{n+1} \dots y_{n+p}$ est alors représentée par le vecteur

$$\sigma' = [\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots, 0]$$

est appelée la 'prolongée canonique' à $y_1 \dots y_{n+p}$ de σ .

6) 'La' flèche nulle $x_1 \dots x_n \rightarrow y_1 \dots y_n$ est caractérisée par la matrice $\underline{0} = [0]$ (0 partout), où chaque compoante $0 : x_j \rightarrow y_i$ est une flèche nulle.

7) Une flèche diagonale $\underline{\Delta}$ est une flèche $x \rightarrow x \dots x$ (m fois) caractérisée par le vecteur-ligne :

$$\underline{\Delta} = [1, \dots, 1] \text{ (m fois)}$$

Une flèche codiagonale $\underline{\nabla}$ est une flèche $x \dots x \rightarrow x$ (m fois) caractérisée par le vecteur colonne :

$$\underline{\nabla} := {}^t[1, \dots, 1] \text{ (m fois)}$$

Une flèche projection $\pi_i : x \dots x \rightarrow x$ est caractérisée par le vecteur-colonne :

$$\pi_i = {}^t[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \text{ (un 1 au } i\text{-ème rang uniquement)}$$

la flèche coprojection $k_i : x \rightarrow x \dots x$ est caractérisée par le vecteur-ligne :

$$k_i = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0] \text{ (un 1 au } i\text{-ème rang uniquement).}$$

On vérifie que :

$$\underline{\Delta} \cdot \pi_i = 1_x : x \rightarrow x \text{ pour chaque } i \in [m]$$

$$k_i \cdot \underline{\nabla} = 1_x : x \rightarrow x \text{ pour chaque } i \in [m]$$

si $\underline{\Delta}$ (resp. $\underline{\nabla}$) = $[1, \dots, 1]$ (resp. $t_{[1, \dots, 1]}$) (m fois)

4.4 Lemme : Dans $\underline{T}(A)$, la somme de $\sigma^1: x \rightarrow y$ et de $\sigma^2: x \rightarrow y$ est donnée par l'un des diagrammes :

$$x \xrightarrow{\underline{\Delta}} x \quad x \xrightarrow{t[\sigma^1, \sigma^2]} y \quad (I)$$

$$x \xrightarrow{[\sigma^1, \sigma^2]} y \quad y \xrightarrow{\underline{\nabla}} y \quad (II)$$

$$x \xrightarrow{\underline{\Delta}} x \quad x \xrightarrow{\begin{bmatrix} \sigma^1, 1 \\ 0, \sigma^2 \end{bmatrix}} y \quad y \xrightarrow{\underline{\nabla}} y \quad (III)$$

Preuve : En faisant les produits matriciels. La matrice :

$$\begin{bmatrix} \sigma^1, 0 \\ 0, \sigma^2 \end{bmatrix}$$

est obtenue en 'prolongeant' σ^1 (resp. σ^2) à yy . $\square$

PROPOSITION 13 :

Il y a une façon unique de définir une structure additive sur les flèches de $\underline{T}(A)$ de sorte que la composition soit bilinéaire.

Preuve : Soit $\sigma^1, \sigma^2: x \rightarrow y$. Définissons $(\sigma^1 + \sigma^2)$ par :

$$(\sigma^1 + \sigma^2) = \underline{\Delta} \cdot t[\sigma^1 \sigma^2] \quad ((I) \text{ du lemme}).$$

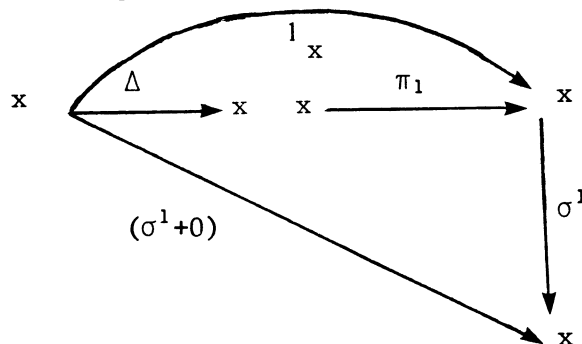
Définissons également :

$$(\sigma^1 * \sigma^2) = [\sigma^1 \sigma^2] \cdot \underline{\nabla} \quad (\text{d'après (II)}).$$

Soit π_1 la première projection : $x \times x \rightarrow x$; comme $\pi_1 = t[1, 0]$, on a :

$$\pi_1 \cdot \sigma^1 = t[\sigma^1, 0] \quad (\text{puisque } \pi_1 \cdot \sigma^1 = t[1, 0] \cdot \sigma^1)$$

Nous en déduisons le diagramme commutatif :



puisque $\underline{\Delta} \cdot \pi_1 \cdot \sigma^1 = (\sigma^1 + 0)$. D'après le diagramme, il suit que
 $(\sigma^1 + 0) = \sigma^1$ puisque $\underline{\Delta} \cdot \pi_1 = 1_a$.

De façon analogue, on montre que : $\sigma^1 = (0 + \sigma^1)$

(et de même que : $\sigma^1 * 0 = \sigma^1 = 0 * \sigma^1$).

Soit $\theta = y \rightarrow y'$; alors, nous avons ${}^t[\sigma^1, \sigma^2] \cdot \theta = {}^t[\sigma^1 \cdot \theta, \sigma^2 \cdot \theta]$

d'où : $(\sigma^1 + \sigma^2) \cdot \theta = (\sigma^1 \cdot \theta + \sigma^2 \cdot \theta)$.

Soit $\eta : x' \rightarrow x$; alors nous avons :

$$\eta \cdot (\sigma^1 * \sigma^2) = (\eta \cdot \sigma^1 * \eta \cdot \sigma^2)$$

Soit maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre flèches : $x \rightarrow y$; nous avons :

$$(\alpha + \beta) * (\gamma + \delta) = (\underline{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}) \underline{\nabla} = \underline{\Delta} \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \underline{\nabla} \right) = (\alpha * \gamma) + (\beta * \delta)$$

Si β et γ sont identifiées à 0, nous obtenons : $\alpha * \delta = \alpha + \delta$ et alors :

$* \equiv +$ (les deux opérations sont identiques). Si α et δ sont identifiées à 0 nous obtenons : $\beta + \gamma = \gamma + \beta$ (commutativité de +) ;

Si β est identifié à 0, nous obtenons : $\alpha + (\gamma + \delta) = (\alpha + \gamma) + \delta$

(associativité de +) . $\square$

Une catégorie $\underline{\underline{C}}$ est semi-additive lorsque cette catégorie a des produits et coproduits finis et admet une unique structure de monoïde abélien pour chaque ensemble de flèches, telle que cette structure soit compatible avec la propriété de bilinéarité (par rapport à la composition) et avec l'axiome des chemins nuls.

THEOREME 4 : $\underline{\underline{T}}(A)$ peut être munie d'une seule structure de semi-additivité.

Preuve : $\underline{\underline{T}}(A)$ est une 'Abm-catégorie' (proposition 5) et a des produits et coproduits finis (corollaire 2) : c'est une catégorie semi-additive.

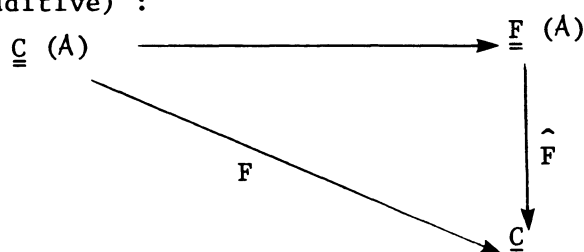
D'après la proposition 3, $\underline{\underline{T}}(A)$ peut avoir d'une seule façon des flèches nulles ; d'après la proposition précédente, on a qu'une seule addition possible (en généralisant la démonstration à toute somme de flèches

$\sigma^1, \sigma^2 : \mu \rightarrow \nu < \mu \rightarrow \nu > \in A^* \times A^*$) : on a donc une seule structure de mo-

noïde abélien sur $\langle \mu, \nu \rangle$ où le neutre est une flèche nulle ; cette structure de monoïde abélien est compatible avec la propriété de bilinéarité . $\square$

REMARQUES :

- 1) La catégorie $\underline{\underline{C}}(A)$ est une 'Abm-catégorie' qui n'est pas une catégorie semi-additive.
- 2) La catégorie $\underline{\underline{C}}(A)$ sert à engendrer librement une catégorie semi-additive $\underline{\underline{F}}(A)$. Pour cela, on se donne un foncteur 'semi-additif' (qui respecte les structures de monoïdes abéliens) de $\underline{\underline{C}}(A)$ vers $\underline{\underline{F}}(A)$ qui soit universel pour $\underline{\underline{C}}(A)$, c'est-à-dire que l'on a le diagramme universel (où $\underline{\underline{C}}$ est une catégorie semi-additive) :



F étant donné, il existe un unique foncteur $\hat{F}$. Les objets de $\underline{\underline{F}}(A)$ sont alors des suites d'objets de $\underline{\underline{C}}(A)$ et les flèches de $\underline{\underline{F}}(A)$ sont les matrices de flèches de $\underline{\underline{C}}(A)$. On constate que $\underline{\underline{F}}(A)$ est isomorphe à $\underline{\underline{T}}(A)$ que nous avons construite plus systématiquement en étudiant quelques unes de ses propriétés (voir exercice n°6 "the free additive category" transposé ici à la catégorie semi-additive libre (MACL-71) p. 194)

- 3) le théorème 3 et le théorème précédent se généralisent. On sait que si dans une catégorie il y a des produits et coproduits finis, alors toute flèche du coproduit vers le produit se détermine par une matrice de flèches. Si, de plus, cette catégorie est une 'Abm-catégorie', alors la flèche du coproduit vers le produit est un isomorphisme et la structure de semi-additivité est unique. Réciproquement cette propriété entraîne que la catégorie est une 'Abm-catégorie' (voir (ARB-MAN-75) p.78 ou d'une façon plus légèrement différente (MIT-65) p. 30).

5. ALGÈBRE DES CHEMINS D'UN GRAPHE

5.1. Soit A un alphabet non vide. Le graphe $G(A)$ est défini par

$$\langle A, A \times A_{01}^* \times A, \delta'_1, \delta'_2 \rangle$$

$$\text{avec } \delta'_i : \langle x, v, y \rangle \mapsto \begin{cases} x & \text{si } i = 0 \\ y & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

(pour $x \in A, y \in A, v \in A_{01}^*$).

$G(A)$ est tel qu'on a l'isomorphisme :

$$G(A) \simeq \underline{G}(A) * \underline{U}$$

(où $\underline{G}(A) * \underline{U}$ est le graphe sous-jacent à la catégorie des chemins dans $G(A)$ avec $\underline{U}$ le foncteur d'oubli).

Nous avons les deux foncteurs d'inclusion $\underline{J}_1$ et $\underline{J}_2$:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{G}(A)^* & \xrightarrow{\underline{J}_1} & \underline{C}(A) & \xrightarrow{\underline{J}_2} & \underline{T}(A) \\ \downarrow \underline{U} & & \downarrow \underline{U} & & \downarrow \underline{U} \\ \underline{G}(A) & \xrightarrow{\underline{J}_1} & \underline{C}(A) & \xrightarrow{\underline{J}_2} & \underline{T}(A) \end{array}$$

5.2. Soit $G = \langle 0, 0 \times (0 \cup \{0, 1\})^* \times 0, \delta'_0, \delta'_1 \rangle$; 0 (ensemble des objets du graphe G) est considéré comme un alphabet auquel on a adjoint deux symboles.

A chaque chemin dans G de la forme $f_0 f_1 \dots f_n$ avec :

$f_i \delta'_1 = f_{i+1} \delta'_0$ ($f_i \in F$ pour $i = 0, \dots, n-1$), on a fait correspondre le mot : $f_0 \delta'_0 (f_1 \delta'_1 \dots f_{n-1} \delta'_1) f_n \delta'_1$ de $(0 \cup \{(), ()\})^*$: la composition des chemins dans G est traduite par la composition des chemins sur 0 , d'où l'inclusion :

$$G \xrightarrow{\underline{J}_0 \underline{U}} G(0)$$

et le foncteur $\underline{J}_0$

$$\underline{G}^* \xrightarrow{\underline{J}_0} \underline{G}(0)^*$$

5.3. Désignons par $\underline{\underline{C}}(0; G)$ la sous-catégorie de $\underline{\underline{C}}(0)$ (voir définition 4)

'restreinte par G ' de la façon suivante :

pour $\langle x, y \rangle \in 0 \times 0$:

$$\underline{\underline{C}}(0; G)(x, y) = \{ \hat{\theta} \in \underline{\underline{C}}(0)(x, y) ; P(G)(\hat{\theta}) \text{ est vrai} \}$$

avec ' $P(G)(\hat{\theta})$ est vrai' si et seulement si :

- (i) $\hat{\theta} = x(\theta'_1 + \dots + \theta'_1 + \dots + \theta'_n)y$;
- (ii) pour chaque i : soit : $x(\theta'_1)y \in \underline{\underline{G}}^*(x, y)$
soit : $x(\theta'_1)y = x(0)y$
soit : $x(\theta'_1)y = x(1)y$

où $\underline{\underline{G}}^*(x, y)$ est l'ensemble des flèches de x vers y en bijection avec les chemins dans G de x vers y .

L'ensemble des chemins de x vers y restreints par G est désigné par $C(x, y; G)$; il est en bijection avec $\underline{\underline{G}}^*(x, y)$ et donc est représentable par $\underline{\underline{G}}^* \underline{\underline{U}}(x, y)$, le graphe des chemins dans G de x vers y .

$C(x, y; G)$ n'est autre que l'ensemble des 'séquences pseudo-concaténées' (étudiées par A. Kaufmann et Y. Malgrange (KAUF/MAL, 63)) passant par des sommets d'un graphe G et d'extrémités x et y .

On voit maintenant que $\langle \bigcup_{x, y} C(x, y; G), \cdot_G \rangle$ est un semi-groupe, où l'opération $\cdot_G$ est la pseudo-concaténation des 'séquences pseudo-concaténées' ; plus précisément, si $\underline{h}_1 = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$ et $\underline{h}_2 = \langle y_0, y_1, \dots, y_q \rangle$ sont deux telles séquences, alors :

$$\underline{h}_1 \cdot_G \underline{h}_2 = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q \rangle & \text{si } x_p = y_0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

L'opération, quand elle est définie, est associative. Le semi-groupe précédent est sans neutre, non commutatif et tel que la séquence vide notée $\emptyset$ soit absorbante à gauche et à droite.

Sur l'ensemble des chemins sur O , soit $\bigcup_{\langle x,y \rangle} C(x,y)$, on définit une extension

de l'opération définie en 1.1. sur chaque $C(x,y) \times C(y,z)$ en posant :

si $\theta_1 \in C(x,\xi)$ et $\theta_2 \in C(\eta,y)$ et $\xi \neq \eta$, alors $\theta_1 \cdot \theta_2 = 0_{xy}$ où 0_{xy} est le chemin nul de x vers y .

Il existe une application injective de $\langle \bigcup_{\langle x,y \rangle} C(x,y; G(0)), \cdot_{G(0)} \rangle$

dans $\langle \bigcup_{\langle x,y \rangle} C(x,y), \cdot \rangle$ telle que l'image de $\emptyset$ soit un chemin nul.

Les propriétés d'absorption de $\emptyset$ se retrouvent dans les propriétés des chemins nuls (axiome des chemins nuls).

5.4 $\underline{T}(0)(\mu, \nu; G)$ désigne l'ensemble des flèches $\mu \rightarrow \nu$ telles que chaque flèche ait ses composantes qui soient toutes restreintes par G ; il est clair que l'on a l'injection suivante :

$$\prod_{i \in 0} \{ C(x, y_i; G) \cdot C(y_i, z; G) \} \rightarrow$$

$$\underline{T}(0)(x, y_1 \dots y_n; G) \cdot \underline{T}(0)(y_1 \dots y_n, z; G) :$$

$$\langle x (\theta'_1 y_1 \theta''_1) z, \dots, x (\theta'_n y_n \theta''_n) z \rangle \mapsto$$

$$\left[x (\theta'_1) y_1, \dots, x (\theta'_n) y_n \right] \begin{bmatrix} y_1 (\theta''_1) z \\ \vdots \\ y_n (\theta''_n) z \end{bmatrix}$$

La pseudo-concaténation des 'séquences pseudo-concaténées' dans G est donc caractérisée par un produit matriciel de vecteurs.

5.5. Plus généralement :

Soit $o_i \in O$ pour $i \in [n]$, sachant que $\text{card}(O) = n$

$$\underline{T}(0)(o_1 \dots o_n, o_1 \dots o_n; G)^{(r)}$$

représente la matrice 'des séquences pseudo-concaténées de longueur r dans G '.

Nous avons :

$$\underline{T}^{(0)}(\underline{o}_1 \dots \underline{o}_n, \underline{o}_1 \dots \underline{o}_n; G)^{(r+s)} \equiv \underline{T}^{(0)}(\underline{o}_1 \dots \underline{o}_n, \underline{o}_1 \dots \underline{o}_n; G)^{(r)} \cdot \underline{T}^{(0)}(\underline{o}_1 \dots \underline{o}_n, \underline{o}_1 \dots \underline{o}_n; G)^{(s)}$$

Ceci revient à dire que la matrice des séquences de longueur $r+s$ dans G est obtenue en faisant le produit matriciel des séquences de longueur r avec les séquences de longueur s . Chaque élément de la matrice de coordonnées $\langle i, j \rangle$ est déterminé par l'image de l'injection suivante :

$$\sum_{\substack{x \\ o_i \in 0}} \{ \underline{C}^{(r)}(\underline{o}_j, \underline{o}_k; G) \cdot \underline{C}^{(s)}(\underline{o}_k, \underline{o}_i; G) \} \rightarrow \underline{T}^{(0)}(\underline{o}_j, \underline{o}_1 \dots \underline{o}_n; G)^{(r)} \cdot \underline{T}^{(0)}(\underline{o}_1 \dots \underline{o}_n, \underline{o}_i; G)^{(s)}$$

c'est à dire par le produit du produit :

$$\left[\underline{o}_j \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \vdots \\ \theta'_n \end{pmatrix} \underline{o}_1, \dots, \underline{o}_j \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \vdots \\ \theta'_n \end{pmatrix} \underline{o}_n \right] \begin{bmatrix} \underline{o}_1 & \begin{pmatrix} \theta''_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} & \underline{o}_i \\ \underline{o}_n & \begin{pmatrix} \theta''_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} & \underline{o}_i \end{bmatrix}$$

où : $\underline{C}^{(r)}(\underline{o}_j, \underline{o}_k; G)$ (resp. $\underline{C}^{(r)}(\underline{o}_k, \underline{o}_i; G)$) détermine la somme des chemins dans G de $\underline{o}_j$ vers $\underline{o}_k$ (resp. de $\underline{o}_k$ vers $\underline{o}_i$) de longueur r (resp. de longueur s), elle même en bijection avec un ensemble de séquences pseudo-concaténées de longueur r (resp. de longueur s) de G .

5.6 . Cette présentation donne un fondement algébrique à la "méthode de pseudo-concaténation" utilisée dans l'énumération des chemins d'un graphe quelconque. L'algorithme d'énumération ([KAU/MAL, 63]) consiste à énumérer tous les chemins de longueur 2, 3, ... p du graphe. Pour cela, on calcule successivement

$$\begin{aligned} \underline{T}^{(1)} &= \underline{T}^{(0)}(\underline{o}_1 \dots \underline{o}_n, \underline{o}_1 \dots \underline{o}_n) \quad (\text{tableau d'ordre } 1) \\ \underline{T}^{(2)} &= \underline{T}^{(1)} \cdot \underline{T}^{(1)} \quad (\quad " \quad " \quad 2) \\ &\vdots \\ \underline{T}^{(p)} &= \underline{T}^{(p-1)} \cdot \underline{T}^{(1)} \quad (\quad " \quad " \quad p) \end{aligned}$$

La présentation algébrique éclaire le rôle qui est joué par la bilinéarité dans les opérations mises en jeu par cet algorithme.

D'autres algorithmes apparentés (plus court chemin, plus long chemin, k-ième chemin ...) sont formulables immédiatement de façon analogue et ceux-ci exploitent également la bilinéarité.

5.6. Nous avons introduit sur les chemins deux opérations : une somme qui nous permet de considérer plusieurs chemins entre deux sommets distincts et un produit de sommes de chemins (ou composition). Ces deux opérations ont des propriétés algébriques : l'ensemble des chemins entre deux sommets est structuré en un monoïde abélien, il y a distributivité entre les deux opérations (bilinéarité). Cette structure a déjà été considérée par M. Gondran et M. Minoux [GON, MIN, 79] sous le nom de dioïde.

Un dioïde est la donnée de $\langle S, +, \cdot, \varepsilon, e \rangle$ où S est un ensemble ; $\langle S, +, \varepsilon \rangle$ est un monoïde abélien avec élément neutre ε ; $\langle S, \cdot, e \rangle$ est un monoïde avec élément neutre e . On suppose que la multiplication $\cdot$ est distributive par rapport à $+$ et admet l'élément ε (élément nul) comme élément absorbant.

L'algèbre des chemins d'un graphe $G = \langle O, F, \delta_0, \delta_1 \rangle$ est définie par $\underline{T}(0)$ restreinte par G .

Les algorithmes de Gondran et Minoux [GON, MIN, 79] sont immédiatement applicables dans cette algèbre des chemins. Pour un graphe sans circuit, l'algèbre des chemins est plus pauvre.

Le codage envisagé et l'algèbre des chemins sont bien adéquats pour la classe des graphes sans circuit, chaque graphe étant caractérisé par une matrice formelle (qui n'est pas la matrice d'incidence du graphe) décomposable en matrices plus élémentaires correspondant aux "sommes des chemins" entre deux niveaux successifs.

Cependant, lorsqu'on désire composer des graphes sans circuit à partir d'arbres élémentaires intriqués entre eux ('intrication' étant prise au sens de [DES, 82]) l'algèbre des chemins ne permet plus d'avoir une bonne représentation des situations que l'on rencontre souvent dans les problèmes d'optimisation des codes arithmétiques en compilation des langages de programmation ou encore en linguistique lorsque l'on cherche à représenter les liens anaphoriques. Bien souvent, il est nécessaire dans ces problèmes de composer entre eux des arbres élémentaires "par intrication" pour obtenir des graphes sans circuit. Il faut alors conserver dans la représentation les arbres élémentaires qui entrent dans la composition des graphes et ne pas composer uniquement les sommes de chemins. Pour une représentation informatique, compatible avec des implémentations ultérieures, nous faisons encore appel à des techniques de représentations par matrices formelles, décomposables récursivement, ou, de plus, chaque ligne d'une matrice est représentation d'un arbre qui est soit un arbre élémentaire, soit un arbre de sommes de chemins entre une racine et les divers terminaux : chaque branche de l'arbre est une somme de chemins entre la racine et un terminal. Par 'intrication', ces arbres sont composés entre eux et le graphe qui en résulte est un graphe sans circuit représentable par une matrice (sur ces points, se reporter à [DES, 80]).

BIBLIOGRAPHIE

- [ARB/MAN,75] ARBIB, M.A., MANES, E.G., *Arrows structures and functors. The categorical imperative*, Academic Press Inc., New York ...,1975.
- [COR,80] CORI, M., *Structures hiérarchiques et opérateurs, manipulations et transformations algorithmiques*, thèse 3ème cycle, Université Paris-VII, 1980.
- [DES,80] DESCLES, J.P., *Opérateurs/opérations : méthodes intrinsèques en informatique fondamentale ; applications aux bases de données et à la linguistique*, thèse d'état, Université René Descartes, Paris, 1980.
- [DES,82] DESCLES, J.P., "Multiopérateurs - multiopérations", *Math. Sci. hum.*, n°78, 1982.
- [GON/MIN,75] GONDRAN, M., MINOUX, M., "Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes", *Bulletin Dir. Et. Rech.*, Série C, n°2, 1977, p.25-41.
- [GON/MIN,79] GONDRAN, M., MINOUX, M., *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1979.
- [KAU,MAL,63] KAUFMANN, A., MALGRANGE, Y., "Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe", *Revue Française de R.O.*, n°26, 1963.
- [MCL,71] Mac LANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York ..., 1971.
- [MIT,65] MITCHELL, B., *Theory of categories*, Academic Press, New York, 1965.