

BRUNO LECLERC

Description combinatoire des ultramétries

Mathématiques et sciences humaines, tome 73 (1981), p. 5-37

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__73__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DESCRIPTION COMBINATOIRE DES ULTRAMETRIQUES

Bruno LECLERC*

Les ultramétriques étudiées ici sont celles de la classification : elles sont définies sur un ensemble X fini dépourvu de toute structure a priori, et se présentent comme des indices de dissimilarité ayant des propriétés classificatoires fortes. Elles s'écartent des ultramétriques au sens strict habituel en prenant leurs valeurs dans un ensemble totalement ordonné E , dont il est seulement parfois commode de supposer qu'il est une partie des réels positifs. On admet aussi que des éléments distincts de X soient à distance "nulle".

On se propose de présenter ici les propriétés qui découlent directement de la nature combinatoire de telles ultramétriques. Les démonstrations en sont souvent simples, mis à part un aspect technique qui peut gêner un lecteur peu familier avec les graphes et les ensembles ordonnés. L'arbre minimum est le fil conducteur. Il apparaît en effet comme indissociable de la notion même d'ultramétrie : outre le fait connu qu'une ultramétrie est entièrement définie par sa restriction à un de ses arbres minimums, on obtient, en termes d'arbre minimum ou d'un concept lié, des caractérisations des ultramétriques, des constantes facilitant la description d'une ultramétrie donnée, une distance sur le treillis des ultramétriques. Ceci malgré que par lui-même, l'arbre minimum est moins un outil classificatoire que le support d'une intermédiarité.

Les paragraphes 1 à 4 rassemblent, avec quelques précisions et adjonctions, un certain nombre de résultats obtenus par divers auteurs. Au paragraphe 1, nous rappelons quelques définitions, parfois adaptées, sur les graphes et nous introduisons le concept de découpe, dû à Matula. Le paragraphe 2 introduit les ultramétriques et reprend plusieurs remarques importantes de Hubert. Il y relie

* Centre de Mathématique Sociale, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

le problème classique de l'équilibrage d'un graphe, dont les applications aux sciences sociales sont assez variées. On y définit les ultramétries élémentaires, qui engendrent toutes les ultramétries. L'arbre minimum est lié, au paragraphe 3, à une intermédiarité assez naturelle à considérer, car elle est une bonne formalisation de l'idée de ressemblance de proche en proche. D'emblée, les ultramétries apparaissent comme un cas limite de ce point de vue, d'où leur caractérisation simple en termes d'arbres minimum (corollaire 3.5.).

A la fin du paragraphe 3, on utilise ce qui précède pour présenter la sous-dominante comme une ouverture au sens mathématique. On en détaille, au paragraphe 4, une propriété d'optimalité découverte par Fulkerson en 1966 et appliquée à la classification, à peu près simultanément, par Hubert, Delattre et Hansen, et Leclerc dix ans plus tard. On en fait aussi l'étude, moins évidente qu'il n'y paraîtrait, en tant qu'ultramétrie associée à une classification descendante. Ceci permet d'identifier les ensembles d'arêtes sur lesquels une ultramétrie est constante, et d'aborder le dénombrement de ses arbres minimaux.

A ce moment, on a aussi formalisé la décomposition, assez intuitive, de l'obtention de la sous-dominante en deux opérations successives de natures différentes. D'abord la recherche du, ou des arbres minimum qui correspond, on l'a vu, à une intermédiarité, et s'approcherait plutôt d'une méthode de sériation. Ensuite, la classification résulte d'une suite de coupures dans l'arbre.

C'est aussi à partir de l'ouverture ultramétrique, généralisation duale de la fermeture transitive, qu'on esquisse au paragraphe 5, le plus original, l'étude des treillis d'ultramétries. On rappelle d'abord certaines propriétés de ces treillis, permettant notamment de faciliter certains calculs. On signale que ces treillis sont déjà apparus dans la littérature, sous une forme assez différente, dans un article de Boorman et Olivier. On présente un indicateur de hauteur des ultramétries dans leurs treillis et un métrique qui en dérive. Les paragraphes 2 et 3 sont complétés par la mise en évidence d'une correspondance de Galois entre dissimilarités et valuations sur les bipartitions. Finalement, on aboutit à un lien inattendu entre les ultramétries et le vectoriel des cocycles du graphe complet (inégalité (5.3.1.) et proposition 5.7.).

L'ensemble de ces résultats concourt à éclairer la nature de l'arbre minimum, de l'ouverture ultramétrique et de la notion même d'ultramétrie. Nous pensons aussi qu'ils présentent un cadre dans lequel il peut être intéressant de se placer pour aborder des problèmes tels que la typologie et l'agrégation des ultramétries.

I. COUPES ET DECOUPES DANS LES GRAPHS

I.1. Ensembles d'arêtes : chaînes, cycles, arbres, cocycles

I.1.1. Soit $G = (X, U)$ un graphe simple : X est un ensemble fini de cardinal n et U une partie de l'ensemble $P_2(X)$ des parties de cardinal 2 de X . Les éléments de X sont les *sommets* et les éléments de U les *arêtes* du graphe. Les définitions qui suivent s'écartent formellement un peu de celles que l'on trouve habituellement dans les ouvrages sur les graphes, mais conviennent bien au sujet étudié ici. Pour les termes non définis ici, on se reportera à Berge [5].

Une *chaîne* de longueur k de G est une partie $S \subseteq U$ telle que $|S|=k$ et qu'il existe une suite $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ d'éléments de X , où $\{x_{i-1}, x_i\} \in S$, pour $i=1, \dots, k$. S est une chaîne *entre* x_0 et x_k . Si $x_0 = x_k$, S est un cycle. Si (sauf peut-être x_0 et x_k), $x_0, x_1, \dots, x_k$ sont tous distincts, S est une chaîne (ou un cycle) *élémentaire*. Ceci est le cas ssi (si et seulement si) il n'existe pas de cycle C tel que $C \subset S$ (inclusion stricte ; on utilisera $\subseteq$ pour "inclus ou égal"). On notera S_G (resp. C_G) l'ensemble des chaînes (resp. des cycles) du graphe G et $S_G(x, y)$ l'ensemble des chaînes de G entre x et y . G est *connexe* ssi $S_G(x, y) \neq \emptyset$, pour tous x, y sommets distincts.

Un *arbre* du graphe G est une partie $A \subseteq U$ telle que, pour tout $\{x, y\} \in P_2(X)$, $|S_G(x, y) \cap P(A)| = 1$. On note $A(x, y)$ ou $A(u)$ (en posant $u = \{x, y\}$) la chaîne unique entre x et y (de mêmes extrémités que u) incluse dans A , et A_G l'ensemble des arbres de G . G est connexe ssi $A_G \neq \emptyset$. La caractérisation suivante des arbres nous servira :

$$[A \in A_G] \iff [|A| = n - 1] \text{ et } [C_G \cap P(A) = \emptyset] \quad (I.1.1.)$$

I.1.2. Soient $Y, Y' \subset X$ tels que $Y, Y' \neq \emptyset$, $Y \cap Y' = \emptyset$. On pose $\delta_G(Y, Y') = \{u \in U / |u \cap Y| = |u \cap Y'| = 1\}$ et on note en particulier $\delta_G(Y, X - Y) = \delta_G(Y)$.

$D_G = \{D \subseteq U / (\exists Y \subset X) \delta(Y) = D\}$ est l'ensemble des *cocycles* de G . Un cocycle peut être vu comme une "coupe" de X . Soient $x, y \in X$, et $D \in D_G$. S'il existe $Y \subset X$ tel que $y \in Y$, $x \in X - Y$ et $D = \delta_G(Y)$, D est un cocycle séparant x et y . On note $D_G(x, y)$ l'ensemble des cocycles de G séparant x et y .

Un cocycle D est *élémentaire* s'il est minimal dans D_G pour l'inclusion. Si G est connexe, ceci équivaut à ce que, si $D = \delta_G(Y) = \delta_G(X - Y)$, les deux sous-graphes G_Y et G_{X-Y} soient connexes (cf. Berge [5] p.12).

I.1.3. Soient G un graphe connexe, un arbre $A \in A_G$ et deux arêtes $a = \{x, y\} \in A$, $b \in U - A$. On a alors un cycle $C_G(A, b) \subseteq A(b) \cup \{b\}$, et un cocycle $D_G(A, a)$ défini comme suit : on pose $X_x = \{x' \in X / a \notin A(x, x')\}$ et X_y défini de même.

$\{X_x, X_y\}$ est une bipartition de X et $D_G(A, a) = \delta_G(X_x) = \delta_G(X_y)$. Les cycles $C_G(A, b)$, $b \in U - A$, et $D_G(A, a)$, $a \in A$ sont tous élémentaires, et l'on a :

$$a \in C_G(A, b) \iff b \in D_G(A, a) \iff A - \{a\} \cup \{b\} \in \mathbf{A}_G \quad (\text{I.1.2.})$$

Si $A \in \mathbf{A}_G$, $D \in \mathbf{D}_G$ et $A \cap D = \{a\}$, alors $D = D_G(A, a)$. De même $C \in \mathbf{C}_G$ et $C - A = \{b\}$ entraîne $C = C_G(A, b)$. Il s'agit là de l'application aux graphes d'une propriété des matroïdes (cf. Welsh [65], p.24 et p.35).

I.1.4. Notons $\pm$ l'opération ensembliste de différence symétrique sur les parties de U (ou de X) : $\forall V_1, V_2 \subset U$, $V_1 \pm V_2 = (V_1 \cup V_2) - (V_1 \cap V_2) = (V_1 - V_2) \cup (V_2 - V_1)$. $(\mathbf{P}(U), \pm)$ et $(\mathbf{P}(X), \pm)$ sont des groupes abéliens (avec $\emptyset$ pour neutre) et même des vectoriels sur le corps de Galois à deux éléments $GF(2)$. δ_G est une application de $\mathbf{P}(X)$ dans $\mathbf{P}(U)$ en posant $\delta_G(X) = \delta_G(\emptyset) = \emptyset$.

Considérons l'application de bord $\partial_G = \mathbf{P}(U) \rightarrow \mathbf{P}(X)$, définie par :

$$(\forall \{x, y\} \in U) \quad \partial_G\{x, y\} = \{x, y\}, \quad \text{et} \quad (\forall V \subseteq U) \quad \partial_G(V) = \pm \{\partial_G(u) / u \in V\}$$

Alors ∂_G et δ_G sont deux applications linéaires transposées. Le noyau $\mathbf{C}_G \cup \{\emptyset\}$ de ∂_G et l'image $\mathbf{D}_G \cup \{\emptyset\}$ de δ_G sont des sous-vectoriels orthogonaux mais non complémentaires en général de $\mathbf{P}(U)$, donc sont stables pour la différence symétrique. Leur orthogonalité se traduit par :

$$(\forall C \in \mathbf{C}_G) (\forall D \in \mathbf{D}_G) \quad |C \cap D| \equiv 0 \pmod{2} \quad (\text{I.1.3.})$$

I.1.5. D'autres relations entre les familles de parties de U définies précédemment nous seront utiles :

$$(\forall A \in \mathbf{A}_G) (\forall D \in \mathbf{D}_G) \quad A \cap D \neq \emptyset \quad (\text{I.1.4.})$$

$$(\forall S \in \mathbf{S}_G(x, y)) (\forall D \in \mathbf{D}_G(x, y)) \quad S \cap D \neq \emptyset \quad (\text{I.1.5.})$$

I.1.6. Le graphe que nous considérerons principalement ici sera le graphe complet $K_X = (X, P)$, en notant pour abrégier P (comme "paires") pour $\mathbf{P}_2(X)$. Alors $\mathbf{S}, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \dots$ seront les ensembles des chaînes, cycles, arbres, ... de K_X . Tous les éléments de $\mathbf{D}$ sont des cocycles élémentaires et l'on a $D \in \mathbf{D}(x, y) \iff \{x, y\} \in D$. (I.1.4.) devient

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^t \quad (\text{I.1.4.})'$$

La notation $\mathbf{D}^t$, empruntée à Edmunds et Fulkerson [14], signifie que (I.1.4.) est vraie et que les familles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont de Sperner, c'est-à-dire que deux éléments de $\mathbf{A}$ (resp. de $\mathbf{D}$) sont incomparables pour l'inclusion. Par symétrie $(\mathbf{D}^t)^t = \mathbf{A}^t = \mathbf{D}$. De même, en notant $\mathbf{S}^*(x, y)$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{S}(x, y)$ minimaux pour l'inclusion (les chaînes élémentaires entre x et y), on a :

$$(\forall \{x,y\} \in P) \quad \mathbf{S}^*(x,y) = (\mathbf{D}(x,y))^t \quad (\text{I.1.5.})'$$

Un graphe simple $G = (X,U)$ n'est autre que le graphe partiel $K_X(U)$, et l'on a :

$$(\forall x,y \in X) \quad \mathbf{S}_G(x,y) = \{S \in \mathbf{S}(x,y) / S \subseteq U\} \quad (\text{I.1.6.})$$

$$\mathbf{C}_G = \{C \in \mathbf{C} / C \subseteq U\} \quad (\text{I.1.7.})$$

$$\mathbf{A}_G = \{A \in \mathbf{A} / A \subseteq U\} \quad (\text{I.1.8.})$$

$$(\forall \{x,y\} \in P) \quad \mathbf{D}_G(x,y) = \{D \cap U / D \in \mathbf{D}(x,y)\} \quad (\text{I.1.9.})$$

$$\mathbf{D}_G = \{D \cap U / D \in \mathbf{D}\} \quad (\text{I.1.10.})$$

I.2. Découpes

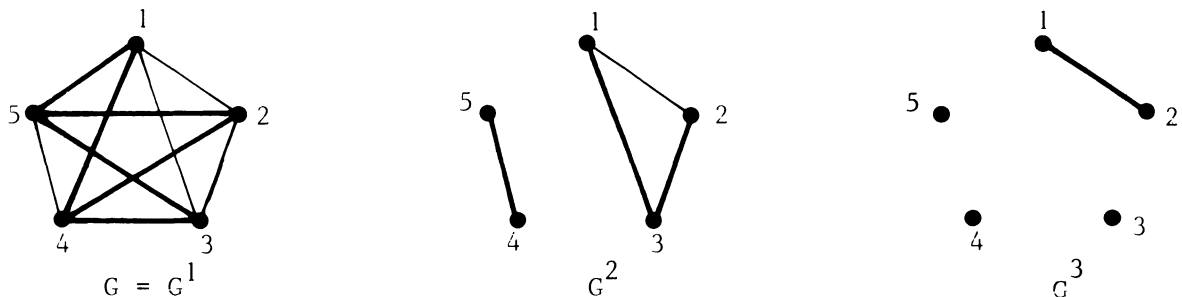
L'intérêt du concept de découpe provient de ce que les coupes, où leurs surpartitions ordonnées, sont les objets qui, pour les arêtes d'un graphe, correspondent aux classifications hiérarchiques des sommets de ce graphe.

I.2.1. Définition : une *découpe* (resp. *découpe fine*) d'un graphe $G = (X,U)$ connexe est une suite $\Delta = (D^1, \dots, D^k)$ de parties de U telle que $\{D^1, \dots, D^k\}$ est une partition de U et que, pour tout $i = 1, \dots, k$, D^i est un cocycle (resp. un cocycle élémentaire) du graphe partiel $G^i = G(U - \bigcup_{j=1}^{i-1} D^j)$.

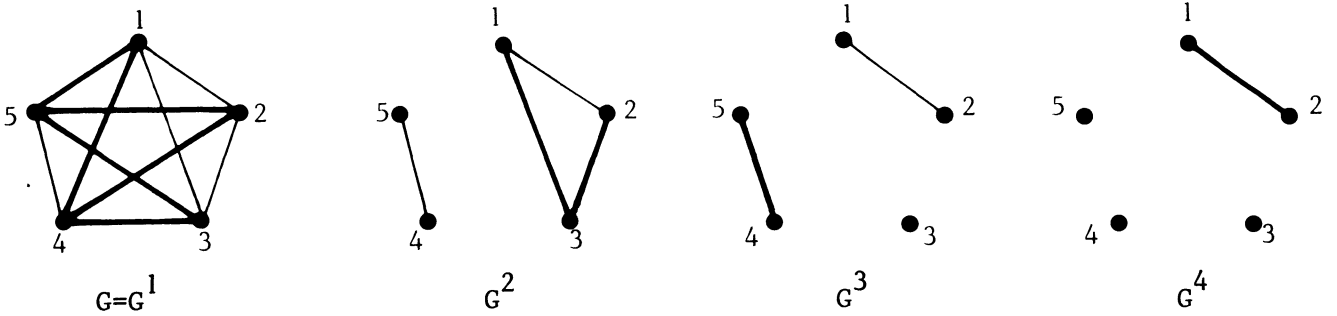
Par découpe, nous traduisons le mot "slicing" utilisé par Matula [45,46] qui est, à notre connaissance, le premier à avoir introduit formellement ce concept, sous-jacent dans de nombreux travaux (cf. ci-dessous par III.3.). Le mot découpe est adéquat si l'on pense à la découpe d'une volaille : les morceaux n'en sont pas quelconques et ne sont pas produits dans un ordre quelconque. Les coupes fines sont celles qui ont le plus de morceaux. Nous avons préféré ce terme à la traduction littérale de "minimal slicing" utilisé par Matula.

Chaque élément D^i d'une découpe Δ correspond à une bipartition opérant sur une ou plusieurs classes connexes de $G^i = G(U - \bigcup_{j=1}^{i-1} D^j)$. Si Δ est une découpe fine, D^i (cocycle élémentaire de G^i) bipartitionne une seule classe de G^i et les deux parties obtenues engendrent des sous-graphes connexes.

I.2.2. Exemple : deux coupes de K_X , où $X = \{1,2,3,4,5\}$; les arêtes renforcées figurent le cocycle D^i dans le graphe G^i . Tout d'abord :



Cette découpe n'est pas fine, car D^2 n'est pas un cocycle élémentaire de G^2 .
Le second exemple montre une découpe fine :



I.2.3. Les découpes d'un graphe $G = (X, U)$ sont liées aux recouvrements de U par des cocycles de G . Soit $R = \{D_1, \dots, D_i, \dots, D_k\}$ un tel recouvrement. Supposons le minimal, c'est-à-dire tel qu'aucun des D_i n'est inclus dans la réunion de tous les autres. Alors, par l'analogue de (I.1.10.), pour tout $i=1, \dots, k$, $D^i = \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j$ est un cocycle de $G^i = G(U - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j)$ et $\Delta = (D^1, \dots, D^k)$ est une découpe. La découpe obtenue dépend de l'ordre dans lequel ont été indicés les D_i . Réciproquement, si $\Delta = (D^1, \dots, D^k)$ est une découpe de G , à tout cocycle D^i de G^i correspond un cocycle au moins D_i de G tel que $D^i = D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j$ et les D_i forment un recouvrement minimal de U . Cette correspondance, multivoque dans les deux sens en général, va permettre de caractériser les découpes fines et de les lier aux arbres de G .

Proposition I.1.

Soient $G = (X, U)$ un graphe connexe, et R un recouvrement minimal de U par des cocycles de G . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $|R| = n - 1$
- (2) $(\exists A \in \mathcal{A}_G) \quad R = \{D(A, a) \mid a \in A\}$
- (3) $(\forall R' \subset R) \quad (\forall D_0 \in R - R') \quad D_0 - \bigcup \{D \in R'\}$ est un cocycle élémentaire de $G(U - \bigcup \{D \in R'\})$

□ (1) $\Rightarrow$ (2). R étant minimal, on peut sélectionner dans chaque $D \in R$ une arête $u(D) \in D$ telle que $D' \in R - \{D\} \Rightarrow u(D) \notin D'$. Posons $A = \{u(D) \mid D \in R\}$.

Soit $C \in \mathcal{C}_G$ tel que $C \subseteq A$ et $D \in R$ tel que $u(D) \in C$. On a alors $|D \cap C| = 1$, ce qui est exclu. Donc A ne contient pas de cycle et, comme $|A| = n-1$, $A \in \mathcal{A}_G$. Alors les éléments de R sont les $D(A, a)$, $a \in A$ (cf. ci-dessus (I.1.3.), (I.1.1.) et par. I.1.3.).

(2) $\Rightarrow$ (3). Si R est de la forme définie en (2), le graphe partiel $G(U - \bigcup \{D \in R'\})$ a $|R'| + 1$ classes connexes, comme le graphe partiel $G(A_1)$ où $A_1 = A - \{a \in A \mid D(A, a) \in R'\}$. Soit $D_0 \in R - R'$. De même $G(U - \bigcup \{D \in R'\} - D_0)$ a $|R'| + 2$ composantes

connexes, ce qui équivaut à ce que $D_0 - \bigcup \{D \in R'\}$ est un cocycle élémentaire de $G(U - \bigcup \{D \in R'\})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). D'après (3), $G(U - \bigcup \{D \in R'\})$ a $|R'|+1$ classes connexes exactement. Et comme $G(U - \bigcup \{D \in R'\}) = G(\emptyset)$ a n classes connexes, on a $|R'| = n - 1$.

Ce résultat est à rapprocher de celui de Buneman [7] qui montre que tout ensemble de k bipartitions deux à deux non croisées (i.e. pour deux quelconques de ces bipartitions, $\{X_1, X_2\}$ et $\{X'_1, X'_2\}$, l'une au moins des quatre parties $X_1 \cap X'_1$, $X_1 \cap X'_2$, $X_2 \cap X'_1$, $X_2 \cap X'_2$ est vide) est représentable par un arbre à $k+1$ sommets définis par les bipartitions.

Proposition I.2.

Soit $\Delta = (D^1, \dots, D^k)$ une découpe de G . Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Δ est une découpe fine.

(2) $k = n - 1$

(3) Il existe $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \in \mathbf{A}_G$ tel que pour $i = 1, \dots, n-1$,

$$D^i = D(A, a_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} D(A, a_j).$$

(4) Pour tout $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ tel que $a_i \in D^i$, $i=1, \dots, n-1$, on a : $A \in \mathbf{A}_G$ et

$$D^i = D(A, a_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} D(A, a_j).$$

□ (4) $\Rightarrow$ (3) est immédiat, (3) $\Rightarrow$ (1) est une conséquence de la partie ((2) $\Rightarrow$ (3)) de la proposition I.1., et (1) $\Rightarrow$ (2) se montre de manière analogue à la partie ((3) $\Rightarrow$ (1)) de la proposition I.1.

(2) $\Rightarrow$ (4) Soient $D_1, D_2, \dots, D_{n-1} \in \mathbf{D}_G$ tels que, pour $i = 1, \dots, n-1$, on a

$$D^i = D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j = D_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j^j,$$
 et soit $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ tel que $a_i \in D^i$, $i=1, \dots, n-1$. On a $a_j \in D_i \Rightarrow j < i$. Soient j, i tels qu'on ait $j < i$, $a_j \in D_i$ et que j soit minimal avec ces propriétés. On peut alors remplacer D_i par $D'_i = D_j \pm D_i$. On vérifie que $a_{j'} \notin D'_i$ pour $j' < j$ et que

$$D'_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j = D^i.$$
 Répétant cette substitution autant de fois qu'il est nécessaire, on se ramène au cas où $a_j \in D_i \Rightarrow j = i$.

La suite est identique à la partie ((1) $\Rightarrow$ (2)) de la proposition I.1. □

La caractérisation (3) montre que les découpes fines correspondent aux familles de cocycles associées aux arbres, et la caractérisation (4) qu'une même découpe fine $\Delta = (D^1, \dots, D^{n-1})$ s'obtient de cette manière à partir de $\prod_{i=1}^{n-1} |D^i|$ arbres distincts (ordonnés). Comme une découpe quelconque se transforme en découpe fine par partition des cocycles non élémentaires en cocycles élémentaires, on voit que toute découpe est associée à une famille d'arbres.

II. ULTRAMETRIQUES

II.1. Généralités

II.1.1. Soit E un ensemble totalement ordonné (une *échelle*), son ordre étant noté $\leq$. On suppose que E a un plus petit élément 0, et il pourra parfois être utile que E soit une partie de $\mathbb{R}$.

On considère une valuation $d : P \rightarrow E$ (i.e. $d \in E^P$), interprétée comme indice de distance, ou de différence, dissimilarité, ... Si $u = \{x, y\} \in P$, on écrira pour alléger $d(x, y)$ au lieu de $d(\{x, y\})$, et on prolongera d à $X \times X$ en posant, pour tout $x \in X$, $d(x, x) = 0$. Pour $U \subseteq P$, on notera d_U la restriction de d à U . (K_X, d) est le graphe K_X valué par d .

A d , on associe un préordre total $\underline{d} \subseteq P \times P$ (*préordonnance* totale sur X).

$$(\forall \{x, y\}, \{x', y'\} \in P) (\{x, y\}, \{x', y'\} \in \underline{d} \iff d(x, y) \leq d(x', y') \quad (\text{II.1.1.})$$

C'est-à-dire x' et y' sont au moins aussi dissemblables (distants, différents, ...) entre eux que x et y entre eux.

On notera encore $\leq$ l'ordre induit sur E^P par l'ordre $\leq$ sur E :

$$(\forall d, d' \in E^P) [d \leq d' \iff (\forall u \in U) d(u) \leq d'(u)] \quad (\text{II.1.2.})$$

C'est un ordre de treillis distributif (cf. Barbut et Monjardet [1], t.1, ch. IV) dont on notera $\vee$ (resp. $\wedge$) le supremum (resp. l'infimum) :

$$(\forall d, d' \in E^P) (\forall u \in P) [(d \vee d')(u) = \max(d(u), d'(u)) \text{ et } [(d \wedge d')(u) = \min(d(u), d'(u))]$$

A tous $d \in E^P$, $\alpha \in E$, correspond une relation sur X , réflexive et symétrique, $W(d, \alpha) = \{(x, x') \in X \times X / d(x, x') \leq \alpha\}$. On a :

$$\alpha \leq \alpha' \Rightarrow W(d, \alpha) \subseteq W(d, \alpha') \quad (\text{II.1.3.})$$

$$d \leq d' \Rightarrow W(d, \alpha) \supseteq W(d', \alpha) \quad (\text{II.1.4.})$$

Pour d donnée, $x \in X$, $\alpha \in E$, la *boule* $H_d(x, \alpha)$ sera définie comme usuellement :

$$H_d(x, \alpha) = \{y \in X / d(x, y) \leq \alpha\}.$$

II.1.2. La notion d'*ultramétrie* apparaît naturellement lorsqu'on demande à d d'avoir de fortes propriétés classificatoires. Les ultramétriques (E-ultramétriques s'il faut préciser) sur X seront les éléments de E^P vérifiant l'une des conditions suivantes :

Proposition II.1.

Soit $d \in E^P$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout $\alpha \in E$, $W(d, \alpha)$ est une équivalence sur X.
- (2) $(\forall x, y, z \in X) \quad d(x, z) \leq \max (d(x, y), d(y, z))$.
- (3) $(\forall \{x, y\} \in P) \quad (\forall S \in \mathcal{S}(x, y)) \quad d(x, y) \leq \max \{d(u) / u \in S\}$.

□ (1) $\Rightarrow$ (2) s'obtient en prenant $\alpha = \max (d(x, y), d(y, z))$. (2) $\Rightarrow$ (3) par récurrence sur $|S|$. (3) $\Rightarrow$ (1) est immédiat. □

(1) exprime que d est classificatoire, (2) est l'inégalité ultramétrique, qui est purement ordinale, (3) en est une extension aux chaînes de K_X .

Soit $\mathbf{R}$ l'ensemble des ultramétriques sur X ($\mathbf{R}(X, E)$ s'il faut préciser).

A partir de la condition (2) précédente, on voit immédiatement que $\mathbf{R}$ est stable pour le supremum dans E^P :

$$(\forall r, r' \in \mathbf{R}) \quad r \vee r' \in \mathbf{R} \quad (\text{II.1.5.})$$

(2) entraîne aussi, si $E \subseteq \mathbb{R}$, que tout $r \in \mathbf{R}$ vérifie l'inégalité triangulaire des distances.

$$(\forall r \in \mathbf{R}) \quad (\forall x, y, z \in X) \quad r(x, z) \leq r(x, y) + r(y, z).$$

Pour que les éléments de $\mathbf{R}$ soient tous des distances, il faudrait se restreindre à ceux vérifiant $r(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, ce que nous ne ferons pas, et les ultramétriques seront ici des *écarts* au sens de Bourbaki (on trouve ailleurs le terme de *pseudo-distances*).

II.1.3. $\mathbf{H}_r = \{H_r(x, \alpha) / x \in X, \alpha \in E\}$, ensemble des boules associées à r, est aussi l'ensemble des classes des partitions $W(r, \alpha)$, $\alpha \in E$, et vérifie :

$$(\forall H, H', H'' \in \mathbf{H}_r) \quad [H \subseteq H' \cap H''] \Rightarrow [H' \subseteq H'' \text{ ou } H'' \subseteq H']$$

Pour l'inclusion, l'ensemble des majorants dans $\mathbf{H}_r$ de tout H est totalement ordonné. Comme P est fini, d a un maximum sur P et $X \in \mathbf{H}_r$.

Avec ces propriétés ($\mathbf{H}_r, \subseteq$) est un sup-demi-treillis arborescent (un *arbre de parties*, suivant Benzécri [3]). Ses éléments minimaux sont les classes de la partition $W(r, 0)$. Dans le cas où $r(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, pour tous $x, y \in X$, on a $\{\{x\} / x \in X\} \subseteq \mathbf{H}_r$ et $\mathbf{H}_r$ est une *hiérarchie* de parties.

II.2. Ultramétries élémentaires

II.2.1. A tous $\alpha \in E$, $D \in \mathbf{D}$, on associe $\alpha D \in E^P$:

$$(\forall x, y \in X) \quad \alpha D(x, y) = \alpha \quad \text{si } \{x, y\} \in D \\ = 0 \quad \text{sinon} \quad (\text{II.1.6.})$$

En appliquant (I.1.3.) aux triangles on voit que αD vérifie l'inégalité ultramétrique, c'est-à-dire que $\alpha D \in \mathbf{R}$. Avec $D = \delta(Y)$, il est immédiat que

$H_{\alpha D} = \{X, Y, X-Y\}$. Puisque $\mathbf{R}$ est stable pour le supremum, tout élément de E^P de la forme $\bigvee_{i=1}^k \alpha_i D_i$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in E$, $D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}$, est une ultramétrie.

De plus, les ultramétries αD sont V-irréductibles :

Proposition II.2.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in E$, $D_0, D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}$ tels que $\alpha_0 D_0 = \bigvee_{i=1}^k \alpha_i D_i$.

Alors $D_i \neq D_0 \Rightarrow \alpha_i = 0$.

□ Car sinon, on aurait $D_i \subset D_0$. Or les cocycles de K_X sont tous élémentaires. □

On verra plus loin, par.III.2., que toute ultramétrie est supremum d'ultramétries αD , $\alpha \in E$, $D \in \mathbf{D}$. On appellera celles-ci *ultramétries élémentaires*.

II.2.2. Soit une application $\rho : \mathbf{D} \rightarrow E$. On lui associe une ultramétrie

$r_\rho = \bigvee \{\rho(D)D \mid D \in \mathbf{D}\}$, soit :

$$(\forall \{x, y\} \in P) \quad r_\rho(x, y) = \max \{\rho(D) \mid D \in \mathbf{D} \text{ et } \{x, y\} \in D\} \quad (\text{II.1.7.})$$

Si $\rho(D)$ est une mesure du pouvoir séparateur de D (de la qualité classificatoire de la bipartition de X associée à D), $r_\rho(x, y)$ est la mesure de la meilleure séparation de x et de y . On verra en IV.1.2. que toute ultramétrie est de ce type.

Cette méthode générale pour définir et, si possible, calculer des ultramétries a été proposée par Hubert [33], avec une série d'exemples correspondant à diverses applications $\rho \in E^{\mathbf{D}}$ construites elles-mêmes à partir d'une application $d \in E^P$.

II.2.2.1. Soit $\rho_k(D)$ la k -ième plus petite valeur prise par d sur D .

Hubert montre que $r_{\rho_k}(x, y)$ est le plus petit $\alpha \in E$ tel qu'il y a k chaînes disjointes dans le graphe-seuil $G_\alpha = (X, U_\alpha)$, où $U_\alpha = \{u \in P/d(u) \leq \alpha\}$.

C'est aussi, d'après une variante du théorème de Menger (cf. Harary, [29], ch.5), le plus petit α tel que pour tout $D \in \mathbf{D}$ contenant $\{x, y\}$, on ait $|D \cap U_\alpha| \geq k$. (Cf. I.1.10.)

Dans tout graphe G , $\lambda_G(x, y)$, nombre maximum de chaînes disjointes entre deux sommets x et y , se calcule par un algorithme de flot maximum (Cf. Ford et Fulkerson [19]).

Un cas particulier fondamental est $\rho_1(D) = \min \{d(u)/u \in D\}$. L'ultramétrie r_{ρ_1} est la sous-dominante (inférieure maximale) de D (Hubert, *op. cit.*, Hansen et Delattre [28], Leclerc [40]). Son rôle central apparaîtra aux paragraphes IV et V.

Il serait particulièrement intéressant de pouvoir calculer une ultramétrie associée à une valuation de cocycles, $\rho_{\text{med}}(D)$ qui affecterait à tout cocycle D une médiane des valeurs prises par d sur D .

II.2.2.2. On peut considérer $\rho_{\Sigma}(D) = \sum_{u \in D} d(u)$, mais le calcul de $r_{\rho_{\Sigma}}$ est, d'après Karp [36], NP-complet (il ne peut y avoir d'algorithme en temps polynomial pour l'obtenir. Cf. Reingold, Nievergelt et Deo [50]). Par contre le calcul est possible en partant, dualement, d'une *similarité* d' sur X pour aboutir à une ultrasimilarité r' vérifiant, pour tous $x, y, z \in X$, $r'(x, z) \geq \min(r'(x, y), r'(y, z))$, d'où l'on tirera une ultramétrie par une transformation convenable. On value les cocycles par $\rho'_{\Sigma} = \sum_{u \in D} d'(u)$ et on obtient l'ultrasimilarité $r'_{\rho'_{\Sigma}}$ définie par :

$$(\forall \{x, y\} \in P) \quad r'_{\rho'_{\Sigma}}(x, y) = \min \{ \rho'_{\Sigma}(D) / D \in \mathbf{D}(x, y) \}.$$

$r'_{\rho'_{\Sigma}}$ est aussi la valeur d'un flot maximum entre x et y . Le fait que $r'_{\rho'_{\Sigma}}$ est une ultrasimilarité apparaît déjà dans l'ouvrage cité de Ford et Fulkerson. On y trouve aussi le calcul global de $r'_{\rho'_{\Sigma}}$, repris de Gomory et Hu [22] (Cf. aussi Gondran et Minoux [25]). Hubert [32] s'est ρ'_{Σ} le premier intéressé à l'application de ce résultat à la classification et Gondran [24] a souligné une propriété intéressante de $r'_{\rho'_{\Sigma}}$: pour tout $k = 2, \dots, n$, $r'_{\rho'_{\Sigma}}$ minimise $\sum r'(x, y)$, $x \in H_1$, $y \in H_2$, pour tous H_1, H_2 classes de la k -partition associée à r' .

Pour la classification, on peut trouver que $\rho'_{\Sigma}(D)$ (comme $\rho_{\Sigma}(D)$) dépend trop de $|D|$, sauf dans certains cas où il y a beaucoup d'arêtes u telles que $d'(u) = 0$. Il serait sans doute plus intéressant de savoir calculer $r_{\rho_{\text{moy}}}$ à partir de $\rho_{\text{moy}}(D) = \frac{\sum d_{\Sigma}(D)}{|D|}$. Il est ici équivalent de partir d'une dissimilarité ou d'une similarité (en posant $d'(x, y) = \max \{d(u)/u \in P\} - d(x, y)$).

II.2.2.3. Un cas particulier de $r'_{\rho'_{\Sigma}}$ est celui où E est l'échelle à deux éléments $\{0 < 1\}$. Deux sommets distincts x et y ρ'_{Σ} peuvent être semblables ($d(x, y) = 0$, $d'(x, y) = 1$) ou dissemblables ($d(x, y) = 1$, $d'(x, y) = 0$). Posant $U = P - U_0 = \{u \in P / d'(u) = 0\}$, on aboutit à $r'_{\rho'_{\Sigma}}(x, y) = \lambda_G(x, y)$, où $G(X, U)$.

On en déduit une ultramétrie r_G définie par $r_G(x, y) = |U| - \lambda_G(x, y)$ qui est ainsi associée à tout graphe simple G .

On retrouve un problème classique de graphes, celui de l'équilibrage, en généralisant ce qui précède de la façon suivante : on se donne une partie U de P et une partie V de U . Le graphe $G = (X, U)$ est alors dit *signé*. Les éléments de V sont traditionnellement appelés arêtes négatives, ceux de $U-V$ arêtes positives. L'appartenance de $\{x, y\}$ à V traduit une opposition (une dissimilitude) entre x et y , celle à $U-V$ une alliance (une similitude). Le graphe est dit équilibré ssi $V \in \mathbf{D}_G$. Sinon, le problème de l'équilibrage de G (NP-complet en général) peut être posé de diverses façons, la plus générale étant de trouver un cocycle $D_0 \in \mathbf{D}_G$ tel que $|V \pm D_0| = \min \{|V \pm D| \mid D \in \mathbf{D}_G\}$. Plus généralement, on peut définir une fonction $\rho_{U,V}$ définie pour tout $D \in \mathbf{D}$ par $\rho'_{U,V}(D) = |(D \cap U) \pm V|$ et l'ultrasimilarité $r'_{\rho_{U,V}}$, associée. Avec $V = U$, on retrouve le cas précédent.

La nature classificatoire du problème de l'équilibre n'apparaît pas toujours dans la volumineuse littérature qui lui est consacrée. On pourra lire le point sur la question fait récemment par Roberts [51,52], qui mentionne de nombreuses applications à la psychologie, à la sociologie, aux sciences politiques et juridiques, mais non les avancées théoriques de Flament [15], Tomescu [62,63], Sozanski [58], Katai et Iwai [37]. Signalons aussi une application à l'anthropologie de Hage [27]. Un article de vulgarisation de Toulouse et Vannimenus [64] sur la notion liée de frustration utilisée dans les sciences physiques, suggère la diversité des champs d'application du problème.

II.2.2.4. Ces quelques exemples donnent une idée des possibilités de définir et d'étudier des ultramétriques (ou ultrasimilarités) à partir de (II.1.7.) (ou dualement).

Le véritable problème est d'en trouver qui aient des propriétés intéressantes et qui soient effectivement calculables. A ce sujet il est à noter que si on sait trouver, pour une fonction $\rho \in E^{\mathbf{D}}$, un cocycle D_0 maximisant $\rho(D)$ dans $\mathbf{D}$ on sait généralement, en itérant, déterminer la classification hiérarchique descendante associée à ρ , dont le calcul est donc de la même difficulté que celui de r_ρ .

III. CHAINES ET ARETES MINIMAX

III.1. Une intermédierité

III.1.1. On considère le graphe valué (K_X, d) . Pour tout $\{x, y\} \in P$, on se propose de rechercher une suite d'intermédiaires entre x et y relativement à la dissimilarité d , c'est-à-dire une suite de sommets $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_k = y$ (k n'étant pas fixé à l'avance) tels que les $d(x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \dots, k$, soient

les plus petits possibles. Parmi les diverses formulations possibles de cette propriété, nous retiendrons celle consistant à minimiser le maximum des $d(x_{i-1}, x_i)$, donc à rechercher des chaînes entre x et y du type suivant :

Définition : une chaîne $S_0 \in \mathcal{S}(x, y)$ sera dite *chaîne minimax* ssi :

$$\max_{u \in S_0} d(u) = \min_{S \in \mathcal{S}(x, y)} \max_{v \in S} d(v) \quad (\text{III.1.1.})$$

Si $S_0 = \{u\}$, l'arête u sera dite *arête minimax*.

Le problème de la recherche des chaînes minimax (ou, dualement, maximin) est classique et peut être considéré comme résolu. Il s'agit par exemple de chercher, dans un réseau routier, un itinéraire de largeur maximum (pour un convoi hors gabarit...). La longueur d'un itinéraire est celle de sa portion la plus étroite. Fulkerson [20] évoque aussi l'itinéraire choisi par un voyageur qui craint l'altitude. Il est bien connu aussi que la résistance d'une chaîne est celle de son maillon le plus faible. Des algorithmes de recherche des chaînes minimax s'obtiennent à partir des algorithmes classiques de recherche des chaînes de longueur minimale par substitution de l'opération maximum à celle de somme (ce qui a, semble-t-il, été remarqué d'abord par Pollack [48]).

III.1.2. Dans l'optique d'intermédiarité qui est la nôtre, on ne se borne pas à considérer l'arête de valuation maximale de chaque chaîne, mais on demande que, dans la suite d'intermédiaires $(x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y)$ entre x et y , toute sous-suite $(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell)$ de sommets consécutifs soit aussi une suite d'intermédiaires entre x_j et x_ℓ . On va donc considérer les chaînes du type plus restrictif suivant :

Définition : Une chaîne minimax $S_0 \in \mathcal{S}(x, y)$ est dite *totalement minimax* (abrégé : *t-minimax*) ssi $S'_0 \in \mathcal{S}$ et $S'_0 \subseteq S_0 \Rightarrow S'_0$ est une chaîne minimax.

Nous notons $\mathcal{S}_m$ et U_m ($\mathcal{S}_m(d)$ et $U_m(d)$ s'il faut préciser) les ensembles des chaînes t-minimax et des arêtes minimax de (K_X, d) . On a immédiatement :

$$[u \in U_m] \iff [\{u\} \in \mathcal{S}_m] \iff [(\exists S \in \mathcal{S}_m) u \in S].$$

La condition (3) de la proposition II.1. lie ce qui précède aux ultramétries : d est une ultramétrie ssi toute arête est minimax.

Proposition 3.1. : $[d \in \mathbf{R}] \iff [U_m(d) = P].$

III.2. Arbre minimum

III.2.1. Un arbre minimum A d'un graphe $G = (X, U)$ valué par la restriction d_U est un arbre vérifiant l'une des conditions équivalentes (cf. Rosenstiehl [53], Flament [16]).

(III.2.1.) Pour tout $A' \in \mathcal{G}$, il existe une bijection $\beta : A \rightarrow A'$ telle que, pour tout $a \in A$, on ait $d(a) \leq d(\beta(a))$.

(III.2.2.) $(\forall a \in A) \quad d(a) = \min \{d(u) / u \in D_G(A, a)\}$

(III.2.3.) $(\forall b \in U-A) \quad d(b) = \max \{d(u) / u \in C_G(A, b)\}$

Un tel arbre existe toujours (il est unique si d_U est injective). La revue théorique des nombreux algorithmes permettant d'en construire un a été faite par Rosenstiehl [53]. On trouvera un point récent sur la compétitivité de ces algorithmes dans Reingold, Nievergelt et Deo [50]. Les plus intéressants semblent être celui de Prim [49] et Dijkstra [11], et celui de Yao [66], qui est une reformulation de l'algorithme historique de Choquet [10] et Steinhaus [59] (où l'on relie d'abord chaque sommet à son plus proche voisin).

L'algorithme A de Kruskal [39] a également un grand intérêt par sa simplicité et par le fait qu'il a été le premier exemple d'algorithme glouton ("greedy algorithm", cf. Welsh [65], ch. 19). L'algorithme de Roux [54] permet de ne prendre que n arêtes (parmi les $|U|$ arêtes de G) en considération à chaque étape.

On notera A_m ($A_m(d)$ s'il faut préciser) l'ensemble des arbres minimums de (K_X, d) . Comme C. Flament, nous utiliserons l'expression "arbres minimums" et nous réservons ailleurs le terme "arbres minimaux" à certains arbres définis de façon analogue dans le cas où E est un ensemble partiellement ordonné. On voit que les arbres minimums sont les arbres appartenant à la classe minimum du préordre sur A défini par (III.2.1.).

III.2.2. Soient $A \in A_m$ et $\{x, y\} \in P$. On considère une arête $a \in A(x, y)$ telle que $d(a) = \max \{d(u) / u \in A(x, y)\}$. Pour tout $S \in \mathcal{S}(x, y)$, il existe une arête $u_0 \in S \cap D(A, a)$ (par (I.1.4.)) et l'on a $\max_{v \in S} d(v) \geq d(u_0) \geq d(a) = \max_{u \in A(x, y)} d(u)$.

D'où :

Proposition III.2. (Hu [31], Kalaba [35]). Toute chaîne incluse dans un arbre minimum est t -minimax.

Ce résultat a deux réciproques. La première, qui découle de (III.2.3.), donne une caractérisation des arbres minimums :

Proposition III.3. Un arbre A est minimum ssi toute chaîne incluse dans A est t -minimax.

La seconde réciproque caractérise les chaînes t -minimax :

Proposition III.4. ([40]). Une chaîne S est t -minimax ssi S est incluse dans un arbre minimum.

□ Il reste à montrer que toute chaîne S t -minimax est incluse dans un arbre minimum. Montrons le par récurrence sur $|S|$. Si $|S| = 1$, $S = \{u\}$ avec $u \in U_m$.

Alors, pour tous $A \in \mathbf{A}_m$ et $a \in A(u)$ avec $d(a) = \max \{d(v) / v \in A(u)\}$, on a $d(a) = d(u)$, car les chaînes $\{u\}$ et $A(u)$ sont toutes deux des chaînes minimax. Puisque $a \in C(A, u)$, $A - \{a\} \cup \{u\} \in \mathbf{A}_m$, par (I.1.2.) et (III.2.1.) et la proposition est vraie pour $|S| = 1$ (Roux [54]). Supposons la vraie pour $|S| < k$, et soit une chaîne t-minimax $S = \{u_1, \dots, u_\ell, \dots, u_k\}$, avec $u_1 = \{x_{i-1}, x_i\}$. Il existe $A \in \mathbf{A}_m$ tel que $\{u_2, \dots, u_k\} \subset A$. Si $u_1 \in A$, on a bien $S \subseteq A$. Sinon, la chaîne t-minimax $A(x_1, x_0)$ est de la forme $\{u_2, \dots, u_\ell, u'_1, \dots, u'_m\}$, où $\ell \leq k$ ($\{u_2, \dots, u_\ell\}$ peut être vide), $m \leq |X| - k$, et $u'_j \in S$ pour $j = 1, \dots, m$. On a donc deux chaînes t-minimax $S_1 = \{u_1, \dots, u_\ell\}$ et $S_2 = \{u'_1, \dots, u'_m\}$ entre x_0 et x_ℓ . Puisque $d(u_1) = \max \{d(u) / u \in A(x_0, x_1)\}$ et $\max \{d(u) / u \in S_1\} = \max \{d(u) / u \in S_2\}$, il existe $u_0 \in S_2 = A(x_0, x_1) - S$ telle que $d(u_0) = d(u_1)$. L'arbre minimum $A - \{u_0\} \cup \{u_1\}$ contient S . $\square$

Une conséquence de la proposition III.4. est qu'il y a toujours au moins une chaîne t-minimax entre deux sommets distincts quelconques, et une exactement si $|\mathbf{A}_m| = 1$. On trouve très tôt dans la littérature consacrée à l'arbre minimum l'intuition que ses chaînes possèdent une propriété particulière (cf. Florek *et al* [18], Steinhaus (op. cit.)). Nous avons complété dans [40] le premier résultat de Kalaba et Hu en ce sens.

Remarque : Montrées ici dans (K_X, d) , les propositions III.2. à III.4. restent vraies dans un graphe valué (G, d) ; à condition de remplacer $\mathbf{S}(x, y)$ par $\mathbf{S}_G(x, y)$ dans la définition des chaînes minimax.

III.2.3. Une autre conséquence de la proposition III.4. (avec la proposition III.1.) est une caractérisation des ultramétriques par leurs arbres minimums :

Corollaire III.5. d est une ultramétrique ssi toute arête appartient à un arbre minimum (i.e. $d \in \mathbf{R} \iff \cup \mathbf{A}_m(d) = \mathbf{P}$).

Ce résultat est l'un de ceux qui font apparaître la profondeur du lien entre les notions d'ultramétrique et d'arbre minimum. Si on lui associe la proposition II.1. on voit que la couverture de $\mathbf{P}$ par $\mathbf{A}_m(d)$ équivaut à ce que les $W(d, \alpha)$ soient une chaîne des treillis de partitions. C'est un cas très particulier d'un théorème de plongement entre deux treillis donné dans [41]. Le corollaire III.5. est aussi le point de départ de l'étude du treillis des ultramétriques abordée dans [42] (cf. ci-dessous, paragraphe V.1.).

Soit r une ultramétrique et $A \in \mathbf{A}_m(r)$. Pour toute arête $u \in \mathbf{P}$, $\{u\}$ et $A(u)$ sont les chaînes t-minimax et l'on a $r(u) = \max \{r(a) / a \in A(u)\}$. r est donc parfaitement déterminée par la donnée d'un de ses arbres minimums A et de la restriction r_A de r à A . Puisque $a \in A(u)$ équivaut à $u \in D(A, a)$:

$$(\forall u \in U_0) \quad r(u) = \max \{r(a) / u \in D(A, a)\},$$

et l'on écrit l'ultramétrie r comme supremum de $n-1$ ultramétries élémentaires (Hubert [33]) :

$$(\forall A \in \mathbf{A}_m(r)) \quad r = \bigvee_{a \in A} r(a) \quad D(A, a) \quad (\text{III.2.4.})$$

Ces considérations introduisent une analogie entre les ultramétries et les tensions dans un graphe orienté : une tension élémentaire est une valuation des arcs, constante sur un cocycle, nulle ailleurs. Une tension quelconque est une *somme* de tensions élémentaires (cf. Berge [4], ch. 5). Ghouila-Houri [21] a montré que pour tout arbre A *quelconque*, la tension t est parfaitement définie par sa restriction t_A . Les ultramétries (que l'on généralise aisément à des graphes quelconques) sont des *supremums* d'ultramétries élémentaires, mais ne sont bien définies que par leurs restrictions à des *arbres minimums*.

III.2.4. Réciproquement, soit $A \in \mathbf{A}$ et $r_A : A \rightarrow E$. Il existe une façon unique d'étendre r_A à une ultramétrie $r \in \mathbf{R}$, de sorte que $A \in \mathbf{A}_m(r)$. C'est de poser :

$$(\forall u \in U - A) \quad r(u) = \max \{r(a) / a \in (u)\} \quad (\text{III.2.5.})$$

De sorte que tout arbre valué définit une ultramétrie. Certaines méthodes de classification à partir d'une dissimilarité d se ramènent à choisir un arbre valué par d parmi tous les possibles. C'est le cas du "lien simple" évidemment, mais aussi par exemple du "lien complet". Une étude en ce sens a été effectuée par Hubert [32].

III.3. Ouverture ultramétrique

On définit une application $\varphi : E^P \rightarrow E^P$ de la façon suivante : pour tout $d \in E^P$, on considère un arbre minimum $A \in \mathbf{A}_m(d)$, et on pose :

$$(\forall \{x, y\} \in P) \quad \varphi(d)(x, y) = \min_{S \in \mathbf{S}(x, y)} \max_{u \in S} d(u) = \max_{a \in A(x, y)} d(a) \quad (\text{III.3.1.})$$

Proposition III.6. L'application φ possède les propriétés suivantes :

01. $\varphi(d) \leq d$ (φ est *restrictive*, ou *anti-extensive*).
02. $(\forall u \in P) \quad \varphi(d)(u) = d(u) \iff u \in U_m(d)$.
03. $\varphi(d) = d \iff d \in \mathbf{R}$.
04. $(\varphi(d))_A = d_A$ et $A \in \mathbf{A}_m(\varphi(d))$.
05. $\varphi(E^P) = \mathbf{R}$.
06. $\varphi(\varphi(d)) = \varphi(d)$ (φ est *idempotente*).
07. $(\forall d' \in E^P) \quad d' \leq d \Rightarrow \varphi(d') \leq \varphi(d)$ (φ est *monotone non décroissante*).

□ 01 et 02 sont immédiates. 02 entraîne d'une part 03 d'après la proposition 3.1. et d'autre part la première partie de 04 d'après la proposition 3.2.. La seconde partie de 04 vient de ce que si $\{x,y\} \notin A$, $\varphi(d)(x,y) = \max \{d(a)/a \in A(x,y)\} = \max \varphi(d)(u) / u \in C(A, \{x,y\})$ et A vérifie (III.2.3.) dans $(K_X, \varphi(d))$. 04 et (III.2.4.) impliquent alors que $U_m(\varphi(d)) = P$, donc que $\varphi(d)$ est une ultramétrique, ce qui, avec 03, donne 05, puis 06. Enfin 07 vient de ce que, si $d' \leq d$, on a :

$$(\forall u \in P) \varphi(d')(u) \leq \max \{d'(a)/a \in A(u)\} \leq \max \{d(a)/a \in A(u)\} = \varphi(d)(u). \quad \square$$

01, 06 et 07 signifient que φ est une *ouverture*, dans l'ensemble ordonné $(E^P, \leq)$ (Cf. Barbut et Monjardet [1], ch. V, t.2). L'ensemble des ouverts étant celui des ultramétriques sur X, il serait naturel d'appeler $\varphi(d)$ l'ouverture ultramétrique de d. Cependant $\varphi(d)$ possède déjà plusieurs appellations courantes: ultramétrique *sous-dominante* de d, ou *inférieure maximale*. Cette dernière se rapporte à la propriété des ouvertures (conséquence de 07) :

$$(\forall d \in E^P) (\forall r \in R) \quad r \leq d \Rightarrow r \leq \varphi(d).$$

On trouve aussi l'appellation "distance du plus grand saut" qui provient de (III.2.4.) et de ce que l'inégalité triangulaire ultramétrique implique celle des distances. Il est notoire que $\varphi(d)$ est associée à la plus simple méthode de classification hiérarchique ascendante à partir de d, celle du lien simple ("single linkage" ; cf. Jardine et Sibson [34], ch.7, Gower et Ross [27]).

IV. ENSEMBLES D'ARETES ASSOCIES A L'OUVERTURE ULTRAMETRIQUE

IV.1. Cocycles maximin

IV.1.1. Soient $d \in E^P$ et A un arbre minimum de (K_X, d) . L'ouverture ultramétrique $\varphi(d)$ s'écrit, à partir de (IV.2.4.) et de 04 :

$$\varphi(d) = \bigvee_{a \in A} d(a) D(A, a) \quad (\text{IV.1.1.})$$

Dans ce paragraphe IV, les arêtes de $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ seront indicées de sorte que $d(a_1) \geq d(a_2) \geq \dots \geq d(a_{n-1})$. Pour abréger, on notera, pour $i=1, \dots, n-1$,

$$D_i = D(A, a_i), \quad U^i = P - \bigcup_{j=1}^{i-1} D_j \quad (\text{avec } U^1 = P), \quad G^i = (X, U^i), \quad D^i = D_i \cap U^i.$$

Δ_A sera la découpe $(D^1, D^2, \dots, D^{n-1})$. C'est la découpe fine associée à A en prenant les cocycles $D(A, a_i)$ dans l'ordre des indices i. On a, d'après (IV.1.1.) :

$$(\forall u \in P) \quad u \in D^i \Rightarrow \varphi(d)(u) = d(a_i) \quad (\text{IV.1.2.})$$

Et même $u \in D^i \iff \varphi(d)(u) = d(a_i)$ si d_A est injective : $d(a_1) > d(a_2) > \dots > d(a_{n-1})$.

IV.1.2. L'ouverture φ , définie au paragraphe III.3. à partir des chaînes minimax, peut l'être aussi en termes de cocycles : à toute arête $u \in P$, associons une arête $A_u \in A(u)$ telle que $d(A_u) = \max \{d(a) / a \in A(u)\}$. On déduit des propriétés des arbres minimums, ou du théorème du goulot d'Edmunds et Fulkerson [14] (à partir de (I.1.4.)' et (I.1.5.)') les deux séries d'égalités :

$$\varphi(d) \quad a_1 = d(a_1) = \max_{a \in A} d(a) = \min_{A' \in \mathbf{A}} \max_{a' \in A'} d(a') = \max_{D \in \mathbf{D}} \min_{u' \in D} d(u') = \min_{u \in D_1} d(u) \quad (\text{IV.1.3.})$$

Et, pour tout $\{x, y\} \in P$:

$$\begin{aligned} \varphi(d)(x, y) = d(a_{\{x, y\}}) &= \max_{a \in A(x, y)} d(a) = \min_{S \in \mathbf{S}(x, y)} \max_{u \in S} d(u) = \max_{D \in \mathbf{D}(x, y)} \min_{v \in D} d(v) = \\ &= \min_{w \in (A, a_{\{x, y\}})} d(w) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.4.})$$

(IV.1.4.) a été signalée d'abord par Fulkerson [20]*. Elle permet d'écrire :

$$\varphi(d) = V \{ \rho_1(D) \mid D \in \mathbf{D} \}, \quad (\text{IV.1.4.})$$

où, pour tout $D \in \mathbf{D}$, $\rho_1(D) = \min \{d(u) / u \in D\}$.

C'est l'égalité, annoncée en II.2.2.1., $\varphi(d) = r \bullet \varphi(d)$ est l'ultramétrique associée à ρ_1 , l'écriture "minimale" de $\varphi(d)$ comme $\sup_{\rho_1}$ de $n-1$ ultramétriques élémentaires étant donnée par (IV.1.1.).

IV.1.2. Les séries d'égalités (IV.1.4.) et (IV.1.3.) établissent que $D(A, a_{\{x, y\}})$ maximise ρ_1 dans $\mathbf{D}(x, y)$ et, en particulier, que $D_1 = D(A, a_1)$ maximise ρ_1 dans $\mathbf{D}$ et correspond donc à une bipartition optimale (pour ρ_1) de X .

Définitions : Un cocycle $D \in \mathbf{D}$ sera dit *cocycle maximin* ssi il existe $\{x, y\} \in P$ tel que $D \in \mathbf{D}(x, y)$ et $\rho_1(D) = \max \{ \rho_1(D') / D' \in \mathbf{D}(x, y) \}$. D sera dit *cocycle maximin principal* ssi $\rho_1(D) = \max \{ \rho_1(D') / D' \in \mathbf{D} \}$.

D_1 est donc un cocycle maximin principal et, pour $a \in A$, il suffit de prendre $a = \{x, y\}$ pour voir que $D(A, a)$ est un cocycle maximin. Il peut cependant, lorsque d n'est pas injective exister des cocycles maximin (même principaux) qui ne sont associés à aucun arbre minimum. Nous allons établir deux propriétés de la découpe Δ_A :

Proposition IV.1. : Soit H une classe connexe de G^i et $G_H^i = (H, U_H)$ la composante connexe de G^i correspondante. $A \cap U_H$ est un arbre minimum de G_H^i valué par la restriction de d à U_H .

□ On remarque d'abord que G^i a i composantes connexes et que $G_H^i = K_H$,

* Son intérêt pour la classification a été découvert simultanément par Delattre et Hansen [28], Hubert [33] et Leclerc [40].

c'est-à-dire $U_H = P_2(H)$. Soient $H_1, H_2, \dots, H_i$ les classes connexes de G^i et écrivons U_j^i pour $P_2(H_j)$. $A \cap U_j^i = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ne contient pas de cycle, d'où $|A \cap U_j^i| \leq |H_j| - 1$ et $|A \cap U_j^i| = \sum_{j=1}^i |A \cap U_j^i| \leq \sum_{j=1}^i (|H_j| - 1) = n - i$. L'égalité étant vraie, $|A \cap U_j^i| = |H_j| - 1$ et $A \cap U_j^i$ est un arbre de $G_{H_j}^i$.

Pour toute classe connexe H de G^i , pour tout $a_k \in A \cap U_H$, considérons les cocycles $D_k^i = D_k \cap U_H$. Puisque $D_k^i \cap (A \cap U_H) = \{a_k\}$, les D_k^i sont les cocycles de K_H associés à l'arbre $A \cap U_H$. De plus $d(a_k) = \min\{d(u) / u \in D_k^i\}$ ce qui montre que $A \cap U_H$ vérifie (III.2.2.) dans G_H . $\square$

Proposition IV.2. Pour $i=1, \dots, n-1$, soit H^i la classe connexe de G^i telle que D^i est un cocycle de K_{H^i} . Alors D^i est un cocycle maximin principal de K_{H^i} valué par la restriction de d .

$\square$ En effet, $d(a_i) = \max \{d(a) / a \in A \cap U_{H^i}\}$ et, d'après le lemme, $A \cap U_{H^i}$ est un arbre minimum de K_{H^i} . $\square$

D^i est aussi cocycle maximin principal de G^i , car il est optimal parmi les cocycles maximin principaux des graphes (H_j, U_j^i) , $j=1, \dots, i$. Ce que montre la proposition IV.2., c'est que $\varphi(d)$ est l'ultramétrie descendante correspondant à la distance entre classes ρ_1^* définie, pour tous $X_1, X_2 \subset X$ tels que $X_1, X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, par :

$$\rho_1^*(\delta(X_1, X_2)) = \min (d(u) / u \in \delta(X_1, X_2)),$$

dont ρ_1 est la restriction aux cocycles. En même temps, la proposition IV.1. (qui correspond à ce que $\varphi(d)$ est aussi l'ultramétrie ascendante associée à ρ_1^*) montre que les boules $H_d(x, \alpha)$, $x \in X$, $\alpha \in E$ associées à l'ultramétrie $\varphi(d)$ satisfont à un critère de cohésion interne : si x_1 et x_2 appartiennent à une de ces boules H , H contient une chaîne t -minimax entre x_1 et x_2 .

IV.2. Découpe associée à une ultramétrie

IV.2.1. Avec les notations du paragraphe précédent, on considère maintenant une ultramétrie $r \in \mathbb{R}$, un arbre minimum $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ de (K_X, r) et la découpe $\Delta_A = (D', \dots, D^{n-1})$ associée. r est constante sur chaque D^i .

$$(\forall u \in P) \quad u \in D^i \Rightarrow r(u) = r(a_i) \quad (\text{IV.1.5.})$$

De plus, si la restriction r_A est injective (i.e. $|r(P)| = n-1$), on a :

$$(\forall u \in P) \quad u \in D^i \iff r(u) = r(a_i) \quad (\text{IV.1.5.})'$$

La découpe Δ_A associée à l'ultramétrie r est alors unique (elle ne dépend pas de A).

Une *préordonnance ultramétrique* (ou *ultrapréordonnance*) sur X est un préordre

total $\underline{t}$ sur P vérifiant :

$$(\forall x, y, z \in X \text{ (distincts)}) \quad (\{x, y\}, \{y, z\}) \in \underline{t} \text{ et } (\{y, z\}, \{x, z\}) \in \underline{t} \Rightarrow (\{x, z\}, \{y, z\}) \in \underline{t}$$

Ce sont les préordonnances $\underline{r}$ associées aux ultramétriques $r \in \mathbf{R}$ (cf. II.1.1. ci-dessus).

$\underline{t}$ est une ultrapréordonnance *binnaire* si de plus $\underline{t}$ a $n-1$ classes exactement. Les ultrapréordonnances binnaires correspondent aux ultramétriques r prenant $n-1$ valeurs distinctes. Dans ce cas l'ultrapréordonnance $\underline{r}$ est directement liée à la découpe Δ_A :

$$\underline{r} = \{(u, u') \in P^2 / u \in D^i, u' \in i', i \geq i'\}.$$

L'égalité est à remplacer par $\supseteq$ dans le cas général.

Les problèmes de classification ont été souvent abordés en termes de recherche d'une ultrapréordonnance à partir d'une préordonnance donnée (cf. Lerman [44] ch. 1,2,3). Schader [56,57] a donné la solution optimale pour une distance entre préordonnances correspondant à la structure semi-latticielle de l'ensemble des préordonnances. Les classes d'arêtes sur lesquelles r est constante, c'est-à-dire en fait les découpes Δ_A définies ci-dessus, jouent également un rôle important dans certains travaux sur les ultramétriques, par exemple celui de Chandon, Lemaire et Pouget [9] sur l'ultramétrie la plus proche d'une dissimilarité au sens des moindres carrés.

I4.2.2. Le corollaire III.4. ci-dessus caractérise les ultramétriques comme étant les éléments de E^P pour lesquels l'ensemble des arbres minimums couvre P . L'étude de l'ensemble $A_m(r)$ des arbres minimums de (K_X, r) peut être abordée à partir de Δ_A .

Proposition IV.3. Soit $r \in \mathbf{R}$, $A \in A_m(r)$ et $\Delta_A = (D^1, \dots, D^{n-1})$ comme ci-dessus.

Soit $A' = \{a'_1, \dots, a'_{n-1}\}$ tel que $a'_i \in D^i$, pour $i = 1, \dots, n-1$. Alors $A' \in A_m(r)$.

Si de plus r_A est injective, tous les arbres minimums de (K_X, r) sont de cette forme.

□ C'est l'équivalence des conditions (3) et (4) de la proposition I.2. qui nous assure que A' est bien un arbre. Le reste est évident. □

Une ultramétrie a donc toujours beaucoup d'arbres minimums. On en a même le nombre exact $e(r)$ si r_A est injective (une borne inférieure sinon) :

$$e(r) = \prod_{i=1}^{n-1} |D^i|. \text{ Ce nombre s'exprime aussi en fonction des cardinaux des boules}$$

$H(x, \alpha)$, éléments de l'arbre de parties H_r (cf. II.1.3. ci-dessus). On peut sans perte de généralité supposer $r(u) > 0$ pour tout $u \in P$ (H_r est une hiérarchie de parties). Chaque D^i sépare un élément $H^i \in H_r$ en deux éléments H_1^i et H_2^i , avec $|D^i| = |H_1^i| + |H_2^i|$. H_r a au total $2n-1$ éléments, dont X lui-même.

Indiquons $\{H_0 = X, H_1, \dots, H_{2n-1}\}$ ces éléments. On a :

$$e(r) = \prod_{k=1}^{2n-1} |H_k| = \frac{1}{n} \prod_{k=0}^{2n-1} |H_k|$$

On trouvera par ailleurs [43] le calcul de $e(r)$ dans le cas général et certaines propriétés de cet indice descripteur des ultramétries.

Parmi les arbres minimums de r , il y en a qui sont des chaînes. Il suffit de faire un choix convenable des a'_i dans chaque D^i . Si $A' \cap (P_2(H_1^i))$ et $A' \cap (P_2(H_2^i))$ sont des chaînes entre x_{11} et x_{12} d'une part, entre x_{21} et x_{22} d'autre part, il suffit de prendre $a'_i \in \{\{x_{11}, x_{21}\}, \{x_{11}, x_{22}\}, \{x_{12}, x_{21}\}, \{x_{12}, x_{22}\}\}$ pour que $A' \cap (P_2(H^i))$ soit entre une chaîne. Cette propriété apparaît dans les représentations arborescentes d'une ultramétrie : l'ordre dans lequel les éléments de X (sommets terminaux de l'arborescence) sont rangés correspond à un tel arbre minimum-chaîne. Pour une ultramétrie à $n-1$ valeurs distinctes il y a 2^{n-2} arbres minimums de cette forme (cf. Brossier [67]).

V. TREILLIS D'ULTRAMETRIQUES

V.1. Quelques propriétés

V.1.1. Puisque φ est une ouverture, l'ensemble des ultramétries $R = \varphi(E^P)$, ordonné par $\leq$, est un treillis dont nous noterons $\vee$ et $\wedge$ le supremum et l'infimum. On a (cf. Barbut et Monjardet [1], t.2, ch. V) :

$$(\forall r_1, r_2 \in R) \quad r_1 \vee r_2 = r_1 \vee r_2, \quad r_1 \wedge r_2 = \varphi(r_1 \wedge r_2) \quad (V.1.1.)$$

Pour calculer $r_1 \wedge r_2$, la méthode la plus simple consiste à déterminer d'abord un arbre minimum de $r_1 \wedge r_2$. Si l'on connaît un arbre minimum A_1 de r_1 et un A_2 de r_2 , on peut utiliser le résultat suivant :

Proposition V.1. Soient $d_1, d_2 \in E^P$, A_1 (resp. A_2) un arbre minimum de (K_X, d_1) (resp. (K_X, d_2)). Soit A un arbre minimum du graphe valué $((X, A_1 \cup A_2), d_1 \wedge d_2)$. Alors A est un arbre minimum de $(K_X, d_1 \wedge d_2)$.

□ Soit $u \in P$. Si $u \in A_1 \cup A_2$, on a par définition de A :

$$(d_1 \wedge d_2)(u) = \max \{(d_1 \wedge d_2)(a) / a \in A(u)\}.$$

Si $u \in P - (A_1 \cup A_2)$:

$d_1(u) \geq \max\{d_1(a_1) / a_1 \in A_1(u)\} \geq \max\{(d_1 \wedge d_2)(a_1) / a_1 \in A_1(u)\} \geq \max\{(d_1 \wedge d_2)(a) / a \in A(u)\}$
Et de même $d_2(u) \geq \max\{(d_1 \wedge d_2)(a) / a \in A(u)\}$, d'où $(d_1 \wedge d_2)(u) \geq \max\{(d_1 \wedge d_2)(a) / a \in A(u)\}$, ce qui établit la proposition. □

On peut donc calculer A dans un graphe ayant au plus $2n-2$ arêtes, au lieu de $|P| = \frac{n(n-1)}{2}$. Si deux ultramétries r_1 et r_2 ont été obtenues comme ouvertures $r_1 = \varphi(d_1)$ et $r_2 = \varphi(d_2)$, on retrouve les égalités classiques :

$$r_1 \wedge r_2 = \varphi(d_1) \wedge \varphi(d_2) = \varphi(r_1 \wedge r_2) = \varphi(d_1 \wedge d_2)$$

Lorsque r_1 et r_2 sont des ultramétriques à $n-1$ valeurs distinctes, l'obtention d'arbres minimums A_1 de r_1 et A_2 de r_2 est immédiate, d'après (IV.1.5.) et la proposition IV.3.

V.1.2. Soient $d_1, d_2 \in E^P$. La proposition suivante encadre la comparabilité de $\varphi(d_1)$ et $\varphi(d_2)$ entre deux conditions sur $A_m(d_1)$ et $A_m(d_2)$:

Proposition V.2.

Les conditions suivantes vérifient $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$:

$$(1) (\exists A_2 \in A_m(d_2)) \quad (d_1)_A \leq (d_2)_A$$

$$(2) \varphi(d_1) \leq \varphi(d_2)$$

$$(3) (\forall A_1 \in A_m(d_1)) \quad (d_1)_A \leq (d_2)_A$$

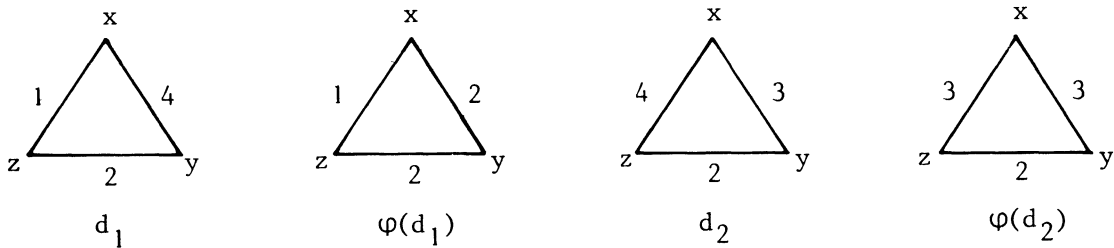
□ $(1) \Rightarrow (2)$ se montre comme la propriété 07 de la proposition III.6. : si (1) est vraie :

$$(\forall u \in P) \quad \varphi(d_1)(u) \leq \max_{a \in A_2(u)} d_1(a) \leq \max_{a \in A_2(u)} d_2(a) = \varphi(d_2)(u).$$

$(2) \Rightarrow (3)$. Si (2) est vraie et $A_1 \in A_m(d_1)$, on a :

$$(\forall a \in A_1) \quad d_1(a) = \varphi(d_1)(a) \leq \varphi(d_2)(a) \leq d_2(a). \quad \square$$

Voici un contre-exemple à $(3) \Rightarrow (2)$ et à $(2) \Rightarrow (1)$: $X = \{x, y, z\}$ $E = \{0, 1, \dots, 4\}$



L'arbre minimum unique $A = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$ de d_2 vérifie $(d_2)_A \leq (d_1)_A$ alors que l'on a $\varphi(d_1) \leq \varphi(d_2)$.

Si d_1 et d_2 sont des ultramétriques, l'équivalence de (2) et (3) est immédiate. Il reste :

Corollaire IV.3. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\exists A \in A_m(r_2)) \quad (r_1)_A \leq (r_2)_A \quad \Rightarrow \quad r_1 \leq r_2.$$

V.1.3. Dans le cas où E est l'échelle binaire $\{0, 1\}$ correspondant à une dichotomie semblable/dissemblable, la relation $W(d, 0)$ est une équivalence ssi d est une

$\{0<1\}$ -ultramétrique (cf. ci-dessus, par. II.1.1.). Notons alors $W(d) = W(d,0)$. La correspondance $r \longleftrightarrow W(r)$ est biunivoque entre les $\{0<1\}$ -ultramétriques d'une part, et les équivalences sur X d'autre part, avec une dualité d'ordre $r_1 \leq r_2 \iff W(r_1) \supseteq W(r_2)$. Le treillis des $\{0<1\}$ -ultramétriques est donc dual du treillis des équivalences sur X , lui-même isomorphe au treillis des partitions de X munies de l'ordre de finesse. A cette dualité près, l'ouverture ultramétrique apparaît dans le cas général (E quelconque) comme une généralisation de la fermeture transitive et les treillis d'ultramétriques comme des généralisations du treillis des partitions. La même généralisation a été présentée sous la forme d'équivalences floues (ce qui présente l'avantage de ne pas comporter de passage à l'ordre dual : on est dans le cas des similarités et ultrasimilarités définies en II.2.2.2. cf. par exemple Ruspini [55], Tamura, Higuchi et Tanaka [61] et Dunn [13]). La présentation matricielle classique de la fermeture transitive débouche sur une présentation matricielle des ultramétriques (Kim et Roush [38], par exemple). Une présentation liée, mais différente, est celle de Gondran [23], où le rôle des arbres minimums apparaît clairement.

Les treillis d'ultramétriques ont d'ailleurs été obtenus comme treillis d'arbres valués, directement à partir du treillis des partitions, par Boorman et Olivier [6]. Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des partitions de X , l'ordre de finesse étant encore noté $\leq$, la partition la plus fine (à n classes) Π_0 , la moins fine Π_X . On considère l'ensemble $\mathbf{T}$ des applications $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{E}$ (arbres valués) vérifiant :

- (i) $(\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}^+) \quad \alpha \leq \alpha' \Rightarrow t(\alpha) \leq t(\alpha')$
- (ii) Pour tout $\Pi \in t(\mathbb{R}^+)$, l'ensemble $t^{-1}(\Pi)$ contient son infimum.
- (iii) $t(0) = \Pi_0$, et $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+) \quad t(\alpha) = \Pi_X$.

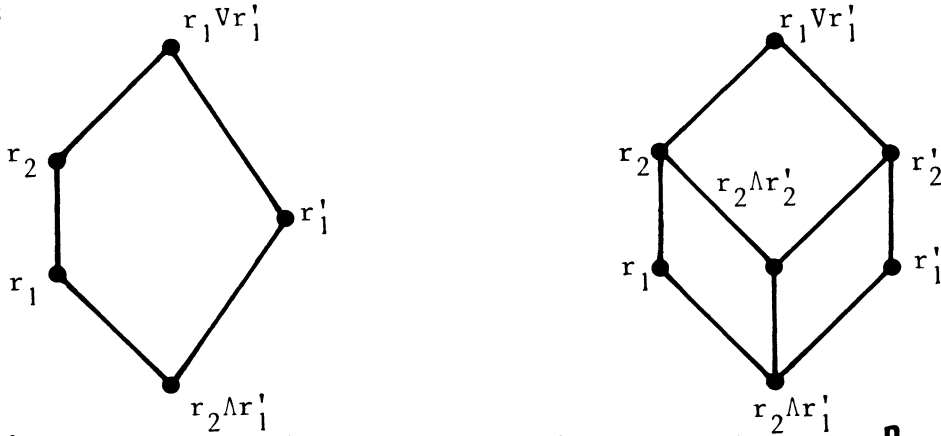
La condition (ii) permet, pour $\{x,y\} \in P$, de définir le réel $r_t(x,y)$, infimum des $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tels que x et y sont dans la même classe de $t(\alpha)$. On voit alors facilement que l'application $r_t : P \rightarrow \mathbb{R}^+$ ainsi définie est une ultramétrique et que la correspondance $t \rightarrow r_t$ est biunivoque et est un anti-isomorphisme d'ordres, l'ordre sur $\mathbf{T}$ étant l'ordre usuel des applications sur un ensemble ordonné. L'infimum $\wedge$ et le supremum $\vee$ du treillis $\mathbf{T}$ sont donc :

$$(\forall t_1, t_2 \in \mathbf{T}) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+) \quad (t_1 \vee t_2)(\alpha) = \max(t_1(\alpha), t_2(\alpha)) \\ \text{et} \quad (t_1 \wedge t_2)(\alpha) = \min(t_1(\alpha), t_2(\alpha))$$

Boorman et Olivier utilisent cette définition pour déduire de toute métrique sur $\mathbf{E}$ une métrique sur $\mathbf{T}$ (donc sur $\mathbf{R}$).

V.1.4. Une propriété importante du treillis des partitions est conservée par les treillis d'ultramétriques : la semi-modularité (supérieure) (Leclerc [42]).

Diverses formes de cette propriété ont été données (cf. Dubreil-Jacotin, Croisot et Lesieur [12], Szasz [60] et, pour les treillis finis, Birkhoff [5] ch.II.). On la comprend bien à partir des figures ci-dessous. Pour tous $r_1, r_2, r'_1 \in \mathbf{R}$, si le sous-treillis engendré par r_1, r_2, r'_1 a la forme représentée à gauche, il existe r'_2 tel que le sous-treillis engendré par r_1, r_2, r'_1, r'_2 ait la forme de droite :



Un intérêt de cette propriété est de fournir une métrique sur $\mathbf{R}$ particulièrement liée à la structure de treillis. On signale dans [42] que, pour $E = \{0 < 1 < \dots < k\}$, la graduation (cf. Barbut et Monjardet [1], t.1, ch.I) du treillis $(\mathbf{R}, \leq)$ est donnée, pour $r \in \mathbf{R}$, par $g(r) = \sum_{a \in A} r(a)$ pour $A \in \mathbf{A}_m(r)$. Pour $k=1$, on retrouve $g(r) = c(r) - 1$, où $c(r)$ est le nombre de classes de la partition $W(r)$.

Le fait que $(\mathbf{R}, \leq)$ est un treillis semi-modulaire entraîne alors (Birkhoff, op. cit., ch.II) que g est une valuation *surmodulaire* (d'après Welsh [65]), ou une *supervaluation* (d'après Boorman et Olivier, op. cit.) ou encore une *quasi-valuation inférieure* (d'après Barthelemy [2], c'est-à-dire que g vérifie :

$$(\forall r, r' \in \mathbf{R}) \quad g(r \vee r') + g(r \wedge r') \geq g(r) + g(r') \quad (\text{V.1.2.})$$

On étend sans peine cette propriété à E quelconque et il en découle (Haskins et Gudder [30] ; cf. Cailliez et Pages [8], ch. XV) une *distance* dg sur $\mathbf{R}$:

$$(\forall r, r' \in \mathbf{R}) \quad dg(r, r') = g(r) + g(r') - 2g(r \wedge r') \quad (\text{V.1.3.})$$

$dg(r, r')$ est une somme de deux différences de "hauteur" (mesurée par g) dans le treillis : entre r et $r \wedge r'$ d'une part, entre r' et $r \wedge r'$ d'autre part. La figure de droite ci-dessus fait bien comprendre que le "plus court chemin" entre r et r' passe par $r \wedge r'$. On trouve dans le numéro 56 (1977) de *Mathématiques et Sciences Humaines* plusieurs articles sur ce type de distances (que l'on pourrait appeler distances latticielles) dans les treillis, les demi-treillis ou les ensembles ordonnés semi-modulaires.

V.2. Valuations d'arêtes et valuations de cocycles

V.2.1. Au paragraphe II.2.2., on a associé à toute valuation des cocycles $\rho \in E^{\mathbf{D}}$ une ultramétrie r_ρ (II.1.7.). On a aussi évalué, à partir d'une similarité $d \in E^P$, le pouvoir séparateur des cocycles par $\rho_1 = \rho^d \in E^{\mathbf{D}}$:

$$(\forall D \in \mathbf{D}) \quad \rho^d(u) = \min\{d(u) / u \in D\} \quad (\text{V.2.1.})$$

L'ouverture ultramétrique définie au paragraphe III.3. est la composée de ces deux opérations. D'après (III.3.1.), $\varphi(r) = r_\rho d$. Ceci suggère de les composer dans l'autre sens et d'étudier cette correspondance entre valuations d'arêtes et valuations de cocycles. Le lemme suivant établira que nous sommes à une dualité près, dans le cadre classique des correspondances de Galois (cf. Birkhoff, op. cit., ch.III, Barbut et Monjardet, op. cit., t.2, ch.V).

Lemme V.3.

Soient X_1, X_2 deux ensembles finis, $R \subseteq X_1 \times X_2$, $(T, V, \wedge)$ un treillis. On considère les applications $h : T^{X_1} \rightarrow T^{X_2}$ et $h' : T^{X_2} \rightarrow T^{X_1}$ définies par :

$$(\forall t_1 \in T^{X_1}, t_2 \in T^{X_2}, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2) \quad \begin{aligned} h(t_1)(x_2) &= \wedge \{t_1(x_1) / x_1 \in Rx_2\} \\ h'(t_2)(x_1) &= V \{t_2(x_2) / x_2 \in x_1 R\}, \end{aligned}$$

où l'on note $Rx_2 = \{x_1 \in X_1 / (x_1, x_2) \in R\}$ et $x_1 R = \{x_2 \in X_2 / (x_1, x_2) \in R\}$. Alors le couple (h, h') est une correspondance de Galois entre $(T^*)^{X_1}$ et T^{X_2} (où T^* est le treillis dual de T).

□ Il faut montrer les propriétés suivantes : h et h' sont monotones non décroissantes, $h \circ h'$ est extensive, $h' \circ h$ est restrictive. Ceci est immédiat, car pour tous $t_1, t'_1 \in T^{X_1}$, $t_2, t'_2 \in T^{X_2}$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, on a :

$$t_1 \geq t'_1 \Rightarrow h(t_1)(x_2) = \wedge \{t_1(x'_1) / x'_1 \in Rx_2\} \geq \wedge \{t'_1(x'_1) / x'_1 \in Rx_2\} = h(t'_1)(x_2).$$

$$h' \circ h(t_1)(x_1) = V_{x'_2 \in x_1 R} \wedge_{x'_1 \in Rx'_2} t_1(x'_1) \leq t_1(x_1).$$

De même $t_2 \geq t'_2 \Rightarrow h'(t_2) \geq h'(t'_2)$ et $h \circ h'(t_2) \leq t_2$. □

En conséquence, on a les trois propriétés :

(G1) $h' \circ h$ est une ouverture dans T^{X_1} .

(G2) $h \circ h'$ est une fermeture dans T^{X_2} .

(G3) L'ensemble $h'(T^{X_2}) = h' \circ h(T^{X_1})$ des ouverts dans T^{X_1} et l'ensemble $h(T^{X_2}) = h \circ h'(T^{X_1})$ des fermés dans T^{X_2} sont, avec les restrictions des ordres sur T^{X_1} et T^{X_2} , des treillis isomorphes par les restrictions de h et de h' .

* En particulier, comme annoncé en II.2.2., pour tout $r \in \mathbf{R}$, $r = r_\rho r$.

Remarque En prenant $T = \{0 < 1\}$ et en assimilant t_1 et t_2 à des parties de X_1 et X_2 :

$t_1 = \{x_1 \in X_1 / t_1(X_1) = 1\}$, $t_2 = \{x_2 \in X_2 / t_2(X_2) = 1\}$, et en posant

$t'_1 = X_1 - t_1$, $R' = (X_1 \times X_2) - R$,

on a :

$h(t_1) = \{x_2 \in X_2 / Rx_2 \subseteq t_1\} = \{x_2 \in X_2 / t'_1 \subset R'x_2\} = \cap \{x_1 R' / x_1 \in t'_1\}$

$h'(t_2) = \{x_1 \in X_1 / x_1 R \cap t_2 \neq \emptyset\} = X_1 - \{x_1 \in X_1 / t_2 \subseteq x_1 r'\} = X_1 - \cap \{R'x_2 / x_2 \in t_2\}$.

C'est-à-dire, en posant $k(t'_1) = h(t_1)$ et $k'(t_2) = X_1 - h'(t_2)$,

$k(t'_1) = \cap \{x_1 R' / x_1 \in t'_1\}$ et $k'(t_2) = \cap \{R'x_2 / x_2 \in t_2\}$. On retrouve la correspondance de Galois (k, k') associée à la relation R' (Barbut et Monjardet, op. cit., t.2, ch.V), dont l'étude des applications à l'analyse des données a été relancée récemment par Flament [17] et Polat et Flament [47].

V.2.2. Appliquant le lemme en prenant $T = E$, $X_1 = P$, $X_2 = \mathbf{D}$ et $u \in \mathbf{D}$ pour $(x_1, x_2) \in R$, on retrouve l'ouverture ultramétrique $h' \circ h = \varphi$ et on voit que $\varphi' = h \circ h'$ est une fermeture dans $E^{\mathbf{D}}$, et que l'ensemble des fermés $\Sigma(E^{\mathbf{D}}) = h \circ h'(E^{\mathbf{D}})$, ordonné par $\leq$, est un treillis isomorphe à $\mathbf{R}$ par les restrictions à $\mathbf{R}$ de h et à Σ de h' . Il reste à caractériser les éléments de Σ .

Proposition V.4. Soit $\rho \in E^{\mathbf{D}}$. On a $\rho \in \Sigma$ ssi ρ vérifie la condition :

$$(\forall D, D_1, D_2, \dots, D_k \in \mathbf{D}) \quad D \subseteq \bigcup_{i=1}^k D_i \Rightarrow \rho(D) \geq \min_{i=1, \dots, k} \rho(D_i) \quad (\text{V.2.2.})$$

□ La condition est nécessaire. Si $\rho \in \Sigma$, il existe $d \in E^{\mathbf{P}}$ tel que $\rho = h(d)$.

Soient alors $D, D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}$ tels que $D \subseteq \bigcup_{i=1}^k D_i$. On a $h(d)(D) = \min\{d(u) / u \in D\} \geq \min\{d(u) / u \in \bigcup_{i=1}^k D_i\} = \min_{i=1, \dots, k} \min\{d(u) / u \in D_i\} = \min_{i=1, \dots, k} h(d)(D_i)$.

La condition est suffisante. Supposons que $\sigma \in E^{\mathbf{D}}$ la vérifie. A toute arête

$u = \{x, y\} \in P$, associons un cocycle $D_u \in \mathbf{D}(x, y)$ tel que $h'(\sigma)(u) = \max\{\sigma(D) / D \in \mathbf{D}(x, y)\}$. On a évidemment, pour tout $D \in \mathbf{D}$, $D \subseteq \bigcup_{u \in D} D_u$.

D'où $\varphi'(\sigma)(D) = \min_{u \in D} \max_{D' \ni u} \sigma(D') = \min_{u \in D} \sigma(D_u) \leq \sigma(D)$.

Comme φ' est une fermeture, on a aussi $\varphi'(\sigma) \geq \sigma$ et finalement $\varphi'(\sigma) = \sigma$. □

Remarques

1. La caractérisation des fermés de la proposition V.4. provient directement des conditions du lemme V.3. Elle peut donc être étendue à d'autres choix de X_1, X_2 et R , notamment à celui où $E = X^2$ (valuations non forcément symétriques) et où X_2 est l'ensemble des *cocircuits* de X^2 c'est-à-dire des ensembles d'arcs de la forme $\{(x, y) \in X^2 / \exists Y_1, Y_2 \subset X : Y_1 \cup Y_2 = X, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, x \in Y_1, y \in Y_2\}$.

On trouve comme ouverts les duals des *préordres flous* (ou *valués*) (cf. Defays [10a], Jacquet-Lagrèze [33a]), comme fermés les valuations de cocircuits vérifiant une condition analogue à celle de la proposition V.4.

2. Avec $E = \{0 < 1\}$, on a d'un côté les équivalences (par. V.1.3.), de l'autre les familles de cocycles $\mathbf{D}'$ vérifiant, pour tous $D, D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}$:

$D \subseteq \bigcup_{i=1}^k D_i$ et $D \in \mathbf{D}' \Rightarrow (\exists i \in \{1, \dots, k\}) D_i \in \mathbf{D}'$. La famille $\mathbf{D}'$ correspondant à une équivalence W est celle des cocycles d' "intersection" non vide avec W .

V.2.3. Pour tous $\alpha \in E$, $D \in \mathbf{D}$, $h(\alpha D)$ est la valuation des cocycles définie par $h(\alpha D)(D) = \alpha$ et, si $D' \neq D$, $h(\alpha D)(D') = 0$. Il est immédiat que $h(\alpha D)$ vérifie (V.2.2.). Dotons E d'un plus grand élément, noté ω . Σ est stable dans $E^{\mathbf{D}}$ et contient des analogues des ultramétriques élémentaires. Ce sont les éléments $\alpha u \in E^{\mathbf{D}}$ qui, pour tous $\alpha \in E$, $u \in P$, sont définis par $\alpha u(D) = \alpha$ si $u \in D$ et $\alpha u(D) = \omega$ sinon.

Ces fermés élémentaires engendrent Σ dans $E^{\mathbf{D}}$ par l'infimum $\wedge$. On a $h'(\alpha u)(u) = \alpha$ et $h'(\alpha u)(u') = \omega$, si $u' \in P - \{u\}$. Les ultramétriques $h'(\alpha u)$, $\alpha \in E$, $u \in P$, sont donc des ultramétriques "anti-élémentaires", mais elles n'engendrent pas $\mathbf{R}$ (qui n'est pas stable pour $\wedge$) dans E^P . Ceci correspond au fait que si les treillis $\mathbf{R}$ et Σ sont isomorphes, ils sont obtenues l'un par une ouverture dans $(E^P, \leq)$, l'autre par une fermeture dans $(E^{\mathbf{D}}, \leq)$, d'où l'échange des rôles de V et $\wedge$ dans ces deux derniers treillis.

Pour faciliter le passage de l'ultramétrique r à $h(r)$, ou de $\sigma \in \Sigma$ à $h'(\sigma)$, on a le résultat suivant :

Proposition V.5. Soient $r \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \Sigma$ tels que $\sigma = h(r)$ (et donc $r = h'(\sigma)$).

Soit A un arbre minimum de (K_X, r) . Alors :

$$(\forall a \in A) \quad r(a) = \sigma(D(A, a)) \quad (\text{V.2.3.})$$

$$\text{et : } \sigma = \bigwedge_{a \in A} r(a)a \quad (\text{V.2.4.})$$

□ Montrons (V.2.3.). On a $r(a) = D_a \geq \sigma(D(A, a))$, D_a étant choisi comme ci-dessus. Soit $u \in D(A, a)$. $r(u) \geq r(a)$ entraîne $\sigma(D_u) \geq \sigma(D_a)$ et comme $D(A, a) \subseteq \bigcup \{D_u / u \in D(A, a)\}$, on a $\sigma(D(A, a)) \geq \min \{\sigma(D_u) / u \in D(A, a)\} = \sigma(D_a)$. Finalement $\sigma(D(A, a)) = \sigma(D_a) = h'(\sigma)(a) = r(a)$.

Pour montrer (V.2.4.), on va utiliser la structure de vectoriel de $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} \cup \{\emptyset\}$ muni de la différence symétrique $\pm$ (cf. ci-dessus, par. I.1.4.). On rappelle que les $D(A, a)$, $a \in A$ sont une base de $\mathbf{D}^*$ et que tout cocycle D s'écrit $D = \pm \{D(A, a) / a \in A \cap D\}$ (Ghouila-Houri, [21]). D'où $D \subseteq \bigcup \{D(A, a) / a \in A \cap D\}$ et $\sigma(D) \geq \min \{\sigma(D(A, a)) / a \in A \cap D\} = \sigma(D(A, a_0))$, a_0 étant choisi dans $A \cap D$.

Alors $h'(\sigma)(a_0) \geq \sigma(D) \geq \sigma(D(A, a_0)) = h'(\sigma)(a_0) = r(a_0)$ les dernières égalités étant celles de V.2.3., et finalement :

$$\sigma(D) = \min \{r(a) / a \in A \cap D\} \quad (\text{V.2.4.})'$$

Ce qui est équivalent à (V.2.4.). □

On déduit de (V.2.3.), à partir de (3.2.4.) :

$$r = V \{ \sigma(D(A,a)) \mid D(A,a) / a \in A \} \quad (V.2.5.)$$

V.3. Fermeture associée à l'algèbre des cocycles

V.3.1. Dans la démonstration de la proposition V.5., on utilise le fait que la caractérisation (V.2.2.) des éléments de Σ entraîne pour ceux-ci une propriété liée à la structure algébrique de $\mathbf{D}$. Si $\rho \in \Sigma$, on a :

$$(\forall D, D_1, \dots, D_k) \in \mathbf{D} \quad D = \sum_{i=1}^k D_i \Rightarrow \rho(D) \geq \min_i \rho(D_i)$$

En prenant $\rho(\emptyset)$ assez grand ($\max \{ \rho(D) \mid D \in \mathbf{D} \} \leq \rho(\emptyset) \leq \omega$), on étend cette propriété à $D, D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}^*$ et on lui donne la forme équivalente :

$$(\forall D, D' \in \mathbf{D}^*) \quad \rho(D \pm D') \geq \min(\rho(D), \rho(D')) \quad (V.3.1.)$$

Ce qui équivaut à l'implication : $\rho(D) < \rho(D') \Rightarrow \rho(D \pm D') = \rho(D)$.

Posons $\rho(\emptyset) = \omega$, pour tous les $\rho \in E^{\mathbf{D}}$ considérés ici, et identifions les éléments de $E^{\mathbf{D}}$ et ceux de $E^{\mathbf{D}^*}$ ayant cette propriété. Un élément $\rho \in E^{\mathbf{D}}$ vérifiant (V.3.1.) n'appartient pas forcément à Σ , car on peut avoir $D, D_1, \dots, D_k \in \mathbf{D}$ tels que $D \subseteq \bigcup D_i$ et que D n'est pas différence symétrique (combinaison linéaire) de certains D_i . Auquel cas, on peut choisir ρ de sorte que $\rho(D) < \min_i \rho(D_i)$ et donc $\rho \notin \Sigma$, sans que (V.3.1.) ne soit contredite. Un tel contre-exemple peut facilement être construit pour $n = 4$.

Proposition V.6. Soit $\rho \in E^{\mathbf{D}}$ vérifiant (V.3.1.). Il existe une base

$\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_{n-1}\}$ du vectoriel $\mathbf{D}^*$ telle que $D = B_{i_1} + B_{i_2} + \dots + B_{i_k}$ et $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ entraînent $\rho(D) = \rho(B_{i_k})$.

□ Il est facile de voir que $\mathbf{B}$ se construit comme suit : on prend $B_1 \in \mathbf{D}$ tel que $\rho(B_1) = \max \{ \rho(D) \mid D \in \mathbf{D} \}$, puis $B_2 \in \mathbf{D} - \{B_1\}$ tel que $\rho(B_2) = \max \{ \rho(D) \mid D \in \mathbf{D} - \{B_1\} \}$, et on continue de la sorte : soit $\mathbf{D}_k^*$ le sous-groupe de $\mathbf{D}^*$ engendré par les $B_1, B_2, \dots, B_k$ déjà choisis. On prend $B_{k+1} \in \mathbf{D} - \mathbf{D}_k^*$ tel que $\rho(B_{k+1}) = \max \{ \rho(D) \mid D \in \mathbf{D} - \mathbf{D}_k^* \}$. □

Notons Σ' l'ensemble des éléments de $E^{\mathbf{D}}$ vérifiant (V.3.1.). Si $\rho' \in \Sigma'$, on a $\rho \wedge \rho' \in \Sigma'$. A tout $\rho \in E^{\mathbf{D}}$, on peut donc associer $\varphi'(\rho)$, infimum dans $E^{\mathbf{D}}$ des $\sigma' \in \Sigma'$ tels que $\sigma' \geq \rho$. φ' est une fermeture dans $E^{\mathbf{D}}$ et l'on a, pour tout $\rho \in E^{\mathbf{D}}$, $\rho \leq \varphi'(\rho) \leq \varphi(\rho)$.

V.3.2. Soit $\sigma \in \Sigma'$. La condition supplémentaire à imposer à σ pour avoir $\sigma \in \Sigma$ est qu'il y ait une base $\mathbf{B}$ de $\mathbf{D}^*$ vérifiant pour σ la condition de la proposition V.6. et telle qu'aucun élément de $\mathbf{B}$ ne soit inclus dans la réunion des autres, c'est-à-dire, d'après la proposition I.1., que $\mathbf{B}$ soit l'ensemble des cocycles associés à un arbre.

Proposition V.7. Soit $\sigma \in E^D$. Alors $\sigma \in \Sigma$ ssi il existe un arbre $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ tel qu'en posant $B_i = D(A, a_i)$ pour $i=1, \dots, n-1$, la base $B = \{B_1, B_2, \dots, B_{n-1}\}$ obtenue vérifie les conditions de la proposition V.6..

□ La condition est nécessaire, d'après la proposition V.5. : il suffit de prendre A arbre minimum de $h'(\sigma)$ et d'indicer les arêtes $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ de A par valeurs décroissantes de $\sigma(D(A, a))$. La condition est suffisante : si elle est vérifiée, σ s'écrit sous la forme (V.2.4.)' en posant $r(a_i) = \sigma(D(A, a_i))$, $i=1, 2, \dots, n-1$. □

Alors, $r = h'(\sigma)$ s'écrit, en parfaite dualité avec (V.2.4.) :

$$r = \bigvee_{B \in B} \sigma(B) B \quad (V.3.2.)$$

La valuation des cocycles ρ_1 , définie à partir d'une valuation d'arêtes $d \in E^P$, vérifie (V.3.1.). Si cela est le cas pour d'autres valuations de cocycles, et que celles-ci présentent un intérêt pour la classification, les considérations algébriques abordées dans ce paragraphe pourraient avoir des applications algorithmiques.

VI. QUELQUES PROBLEMES POUR CONCLURE

VI.1. Soit $r \in R$. Explorer l'ensemble $A_m(r)$. Contient-il un arbre-étoile (à $n-1$ sommets pendants) ? Quel est le nombre maximal $p(r)$ de sommets pendants d'un élément de $A_m(r)$?

VI.2. Soient $r_1, r_2, \dots, r_k \in R$. Déterminer si $\bigcap_{i=1}^k A_m(r_i) = \emptyset$. Sinon, le sous-treillis d'ultramétriques engendré par les r_i est distributif (cf.[42]). On est dans un cas favorable pour les calculs et pour trouver une médiane des r_i (cf. Barbut [1a]).

VI.3. Plus généralement, à partir de métriques sur R , rechercher et étudier les médianes de $r_1, r_2, \dots, r_k$ (cf. Barthélémy et Monjardet [2a]). On peut s'intéresser en particulier à la métrique d_g du paragraphe V.I.4.. On peut chercher à définir axiomatiquement cette métrique.

VI.4. Etudier la typologie des ultramétriques, par exemple à partir des indices $g(r)$ du paragraphe VI.1.4., $e(r)$ du paragraphe IV.2.2. (ce qui est abordé dans [43]) ou $p(r)$ défini ci-dessus.

VI.5. Compléter l'étude de l'inégalité (V.3.1.).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, tomes 1 et 2, Paris, Hachette, 1970.
- [1a] BARBUT M., "Médianes, distributivité, éloignements", *Math. Sci. hum.* 70 (1980), 5-32.
- [2] BARTHELEMY J.P., *Propriétés métriques des ensembles ordonnés. Comparaison et agrégation des relations binaires*, thèse, Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Franche-Comté, Besançon, 1979.
- [2a] BARTHELEMY J.P., MONJARDET B., "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", *Mathematical Social Sciences*, à paraître en 1981.
- [3] BENZECRI J.P., "Description mathématique des classifications", in : *L'analyse des données. I. La taxonomie*, Paris, Dunod, 1973.
- [4] BERGE C., *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970. Trad. en anglais : *Graphs and Hypergraphs*, Amsterdam, North Holland, 1973.
- [5] BIRKHOFF G., *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications XXV, Providence, American Mathematical Society, 1967.
- [6] BOORMAN S.A., OLIVIER D.C., "Metrics on spaces of finite trees", *J. Math. Psychol.* 10 (1973), 26-59.
- [7] BUNEMAN P., "Filiation of manuscripts", in : Hodson F.R., Kendall D.G., Tautu P., eds., *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, Edinburgh, Edinburgh University Press, 1971.
- [8] CAILLEZ F., PAGES J.P., *Introduction à l'analyse des données*, Paris, SMASH, 1976.
- [9] CHANDON J.L., LEMAIRE J., POUGET J., "Construction de l'ultramétrie la plus proche d'une dissimilarité au sens des moindres carrés", *RAIRO* 14 (mai 1980), n°2, 157-170.
- [10] CHOQUET G., "Etude de certains réseaux de routes", *C.R. Acad. Sci. Paris* 206 (1938), 310.
- [10a] DEFAYS D., "Relations floues et analyse hiérarchique de questionnaires", *Math. Sci. hum.* 55 (1976), 45-60.
- [11] DIJKSTRA E., "Two problems in connections with graphs", *Num. Math.* 1 (1959), 269-271.
- [12] DUBREIL-JACOTIN M.L., LESIEUR L., CROISOT R., *Leçons sur la théorie des treillis*. Cahiers Scientifiques 21, Paris, Gauthier-Villars, 1953.
- [13] DUNN J.C., "A graph theoretic analysis of pattern classification via Tamura's fuzzy relations", *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern.* SCM-4 (May 74), n°3, 61-66.
- [14] EDMUNDS J., FULKERSON D.R., "Bottleneck extrema", *J. Comb. Theory* 8 (1970), 299-306.
- [15] FLAMENT C., "Equilibre d'un graphe, quelques résultats algébriques", *Math. Sci. hum.* 30 (1970), 5-22.
- [16] FLAMENT C., "Arêtes maximales des cocycles d'un graphe préordonné", *Math. Sci. hum.* 51 (1975), 5-12.

- [17] FLAMENT C., "Un modèle des jugements de similitude", *Math. Sci. hum.* 65 (1979), 5-21.
- [18] FLOREK K., LUKASZEWICZ J., PERKAL H., STEINHAUS H., ZUBRZYCKI S., "Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini", *Colloquium Mathematicum* 2 (1951), 282-285.
- [19] FORD L.R., Jr, FULKERSON D.R., *Flows in networks*, Santa Monica, The Rand Corporation, 1962.
Trad. Française : *Flots dans les graphes*, Paris, Gauthier-Villars, 1967.
- [20] FULKERSON D.R., "Flows networks and combinatorial operations research", *Am. Math. Monthly* 73 (1966), n°2. Repris légèrement modifié dans : FULKERSON D.R., *Studies in Graph Theory*, The mathematical Association of America, 1975.
- [21] GHOUILA-HOURI A., *Flots et tensions dans un graphe*, thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1964.
- [22] GOMORY R.E., HU T.C., "Multi-terminal network flows", *J. of SIAM* 9 (1961), n°4, 551-570. Repris : Multi-terminal flows in a network, in : FULKERSON D.R., ed., *Studies in Graph Theory*, The mathematical Association of America, 1975.
- [23] GONDRAN M., "Valeurs propres et vecteurs propres en classification hiérarchique", *R.A.I.R.O. Informatique théorique* 10, n°3 (mars 1976), 39-46. Trad. en anglais : "Eigenvalues and eigenvectors in hierarchical classification" in: J.L. BARRA, et al. eds, *Recent Developments in Statistics*, North Holland, 1977.
- [24] GONDRAN M., *Classification hiérarchique et connexité*, communication aux secondes journées internationales d'analyse des données et informatique de l'IRIA (Versailles 1979).
- [25] GONDRAN M., MINOUX M., *Graphes et algorithmes*, Paris, Eyrolles, 1979.
- [26] GOWER J.C., ROSS G.J.S., "Minimum spanning tree and single linkage cluster analysis", *Applied Statistics* 18 (1969), 54-64.
- [27] HAGE P., "Structural balance and clustering in bushmen kinship relations", *Behavioural Science* 21 (1976), 36-47.
- [28] DELATTRE M., HANSEN P., "Bicriterion cluster analysis", *IEEE Trans. on pattern analysis and machines Intelligence* (1980) à paraître.
- [29] HARARY F., *Graph Theory*, Reading, Mass. Addison-Wesley, 1969.
- [30] HASKINS L., GUDDER S., "Height on posets and graphs", *Discrete Math.* 2 (1972), 357-382.
- [31] HU T.C., "The maximum capacity route problem", *Operation research* 8 (1960), 733-736.
- [32] HUBERT L., "Spanning trees and aspects of clustering", *British J. of Math. and Statist. Psychology* 27 (1974), 14-28.
- [33] HUBERT L., "Data analysis implications of some concepts related to the cuts of a graph", *J. of Math. Psychology* 15 (1977), 199-208.
- [33a] JACQUET-LAGREZE E., *La modélisation des préférences, préordres, quasi-ordres et relations floues*, thèse, Paris, Université René Descartes (PARIS-V), 1975.
- [34] JARDINE N., SIBSON R., *Mathematical taxonomy*, New York, Wiley, 1971.
- [35] KALABA R., "Graph theory and automatic control", in : BECKENBACH E.F., ed. *Applied combinatorial mathematics*, New York, Wiley, 1964.

- [36] KARP R.M., "Reducibility among combinatorial problems". In : MILLER R.E., THATCHER J.W., eds., *Complexity of computer computations*, New York, Plenum, 1972.
- [37] KATAI O., IWAI S., "Studies on the balancing, the minimal balancing and the minimal balancing process for social groups with planar and non planar structures", *J. of Math. Psychology* 18 (1978), 260-269.
- [38] KIM K.H., ROUSH F.W., "Ultrametrics and matrix theory", *J. Math. Psychology* 18 (1978), n°2.
- [39] KRUSKAL J., "On the shortest spanning tree of a graph and a travelling salesman problem", *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 48-50.
- [40] LECLERC B., "An application of combinatorial theory to hierarchical classification", in : BARRA J.L., et al., eds., *Recent developments in statistics*, North Holland, 1977.
- [41] LECLERC B., "Matroïdes sur un ensemble ordonné. Bases minimales, circuits et cocircuits, parties commençantes", *C.R. Acad. Sci. Paris. A-286* (février 1978), 301-304.
- [42] LECLERC B., "Semi-modularité des treillis d'ultramétries", *C.R. Acad. Sci. Paris A-288* (mars 1979), 575-577.
- [43] LECLERC B., *Sur le nombre d'arbres minimums d'une ultramétrie*, note (1981).
- [44] LERMAN I.C., *Les bases de la classification automatique*, Paris, Gauthier-Villars, 1970.
- [45] MATULA D.W., "The cohesive strength of graphs" in : *The many facets of Graph Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1969.
- [46] MATULA D.W., "k-components, clusters and slicings in graphs", *SIAM J. Appl. Math.* 22 (1972), 459-480.
- [47] POLAT N., FLAMENT C., "Applications galoisiennes proches d'une application entre treillis", *Math. Sci. hum.* 70 (1980), 33-49.
- [48] POLLACK M., "The maximum capacity route through a network", *Op. research* 8 (1960), 733-736.
- [49] PRIM R.C., "Shortest connection network and some generalizations", *Bell System techn. J.* 36 (1957), 1389-1401.
- [50] REINGOLD E.M., NIEVERGELT J., DEO N., *Combinatorial algorithms, theory and practice*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1977.
- [51] ROBERTS F.S., *Discrete mathematical models with applications to social, biological and environmental problems*, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice Hall, 1976.
- [52] ROBERTS F.S., *Graph theory and its applications to problems of society*, Philadelphie, Society for industrial and applied mathematics, 1978.
- [53] ROSENSTIEHL P., "L'arbre minimum d'un graphe", in: ROSENSTIEHL P., ed., *Théorie des graphes*, Rome, 1966, Paris, Dunod, 1967.
- [54] ROUX M., "Notes sur l'arbre de longueur minima", *Rev. Statist. Appl.* 23 (1975), n°2, 29-35.
- [55] RUSPINI E.R., "A new approach to clustering", *Information and Control* 15 (1969), 22-32.
- [56] SCHADER M., "Hierarchical analysis : Classification with ordinal object dissimilarities", *Metrika*, 27 (1980), 127-132.
- [57] SCHADER M., "Distance minimale entre partitions et préordonnances dans un ensemble fini", *Math. Sci. hum.* 67 (1979), 39-47.
- [58] SOZANSKI T., "Processus d'équilibration et sous-graphes équilibrés d'un graphe signé complet", *Math. Sci. hum.* 55 (1976), 25-36.

- [59] STEINHAUS H., *Mathematical snapshots*, Oxford University Press, 1960, trad. *Mathématiques en instantanés*, Paris, Flammarion, 1960.
- [60] SZASZ G., "Contributions to the theory of semi-modular lattices", *Publ. Math. Debreczen* 22 (1975) n°3-4, 205-209.
- [61] TAMURA S., HIGUCHI S., TANAKA K., "Pattern classification based on fuzzy relations", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* SCM-1 (1971), 937-944.
- [62] TOMESCU I., "Note sur une caractérisation des graphes dont le degré de déséquilibre est maximal", *Math. Sci. hum.* 42 (1973), 37-40.
- [63] TOMESCU I., "Sur le nombre des cycles négatifs d'un graphe complet signé", *Math. Sci. hum.* 53 (1976), 63-67.
- [64] TOULOUSE G., VANNIMENUS J., "La frustration : un monde semé de contradictions", *La Recherche* 83 (novembre 1977), 980-981.
- [65] WELSH D.J.A., *Matroid theory*, London, Academic Press, 1976.
- [66] YAO A.C.C., "An $O(|E| \log \log |V|)$ algorithm for finding minimum spanning trees", *Info. Proc. let.* 4 (1975), 21-23.
- [67] BROSSIER G., "Représentation ordonnée des classifications hiérarchiques", *Statistique et Analyse des Données* 2 (1980), 31-44.