

O. COGIS

À propos des quasi-ordres - Note

Mathématiques et sciences humaines, tome 72 (1980), p. 107-111

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__72__107_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A PROPOS DES QUASI-ORDRES - NOTE

O. COGIS *

1. INTRODUCTION

Dans "Axiomatiques et Propriétés des Quasi-Ordres", B. Monjardet [4] suggère qu'il pourrait être intéressant de relaxer la contrainte de réflexivité ou d'anti-réflexivité pour certains types de relations qu'il étudie.

Cette note, où sont notamment caractérisées les S-relations de Ferrers, est un élément de réponse au problème soulevé (les définitions et notations utilisées sont celles de l'article cité en référence).

2. UNE PROPRIETE DES RELATIONS DE FERRERS

D'après [1 p. 106, 2], on peut énoncer :

THEOREME 1

Q est une relation de Ferrers sur X ssi il existe deux applications f_1 et f_2 de X dans $\mathbb{R}$ satisfaisant : $\forall x, y \in X \quad x Q y \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$.

Notons T_1 et T_2 les préordres totaux respectivement déterminés sur X par f_1 et f_2 de la manière suivante : pour $i = 1, 2$ et pour tous $x, y \in X$, $x T_i y \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y)$.

On peut alors compléter le résultat précédent :

PROPRIETE 1

Pour les deux applications du théorème 1, on a $T_1 \subseteq T_+$ et $T_2 \subseteq T_-$; de plus, on peut exiger que T_1 (resp. T_2) soit l'un quelconque des préordres totaux inclus dans T_+ (resp. T_-).

*Institut de Programmation, Université Pierre et Marie Curie

démonstration :

rappelons que la condition du théorème 1 signifiant que Q est une relation de Ferrers, on a $T_+ = T_f$ et $T_- = T_c$; il est alors clair que $x T_1 y \Leftrightarrow f_1(x) \geq f_1(y) \Rightarrow x T_f y \Leftrightarrow x T_+ y$;
 de plus, soient f_1 et f_2 deux applications satisfaisant la condition du théorème 1, et $T_3 \subseteq T_+$ et $T_4 \subseteq T_-$ deux préordres totaux sur X ; on peut de plus supposer sans perte de généralité que $f_1(X) \cap f_2(X) = \emptyset$;
 alors à chaque classe C de E_f on peut associer un intervalle α_c de longueur non nulle et tel que $f_1(C) \subseteq \alpha_c$ et $f_2(X) \cap \alpha_c = \emptyset$;
 comme $T_3 \subseteq T_f$, on peut définir une application f'_1 de X dans $\mathbb{R}$ telle que $f'_1(C) \subseteq \alpha_c$ et $T'_1 = T_3$ (i.e, $f'_1(x) \geq f'_1(y) \Leftrightarrow x T_3 y$) ;
 on a alors $f'_1(x) > f_2(y) \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$, et on construit de façon similaire une application f'_2 à partir de f'_1 , f_2 et T_4 (signalons qu'il est aisé de modifier l'algorithme de [2] pour construire directement deux applications f'_1 et f'_2 telles que $T'_1 = T_3$ et $T'_2 = T_4$) ■

3. LES S-RELATIONS DE FERRERS

C'est-à-dire les relations qui sont à la fois des S-relations et des relations de Ferrers (ce sont les "step-type relations" de H. Sharp [5] qui s'y intéresse lorsqu'elles sont transitives). Elles ont été souvent caractérisées dans le cas où elles sont réflexives (les quasi-ordres) ou au contraire anti-réflexives (les ordres quasi-forts). Le résultat suivant en permet une caractérisation dans le cas général :

THEOREME 2

Pour une relation Q sur un ensemble (fini) X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Q est une S-relation de Ferrers
- (2) T est un préordre total
- (3) Q admet un tableau $(Q, 0)$ en escalier
- (4) $T = T_s$
- (5) pour tout ordre total $0 \subseteq T_s$, le tableau $(Q, 0)$ est en escalier
- (6) $T = T_{+-}$ et/ou $T = T_{-+}$
- (7) Q est une relation de Ferrers telle que $T_{+-} = T_{-+}$ (ou, de façon équivalente, $T_{fc} = T_{cf}$)
- (8) il existe deux applications f_1 et f_2 de X dans $\mathbb{R}$ telles que
 - (i) pour tous $x, y \in X$ $f_1(x) \leq f_1(y) \Leftrightarrow f_2(x) \leq f_2(y)$
 - (ii) pour tous $x, y \in X$ $x Q y \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(y)$

démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (6) : on sait que pour toute relation, $T \subseteq T_{+-}$; supposons alors que $x (T)^c y$, c'est-à-dire que $Q(x) \not\subseteq Q(y)$ ou $Q^-(x) \not\subseteq Q^-(y)$; comme Q est une relation de Ferrers, on a $Q(x) \subset Q(y)$ ou $Q^-(x) \supset Q^-(y)$; dans le premier cas on a $d^+(x) < d^+(y)$ et donc $x (T_{+-})^c y$, et dans le second cas, d'une part $d^-(x) > d^-(y)$, d'autre part, puisque Q est une S-relation, on a $Q(y) \supseteq Q(x)$, donc $d^+(x) \leq d^+(y)$, et donc encore $x (T_{+-})^c y$; on en conclut que $T = T_{+-}$;

(6) $\Rightarrow$ (2) : trivial ;

(2) $\Rightarrow$ (1) : il est évident que Q est une relation de Ferrers ; si ce n'est pas une S-relation, il existe x et y tels que $Q(x) \not\subseteq Q(y)$ et $Q^-(x) \not\subseteq Q^-(y)$; donc $Q(x) \subset Q(y)$ et $Q^-(x) \subset Q^-(y)$, et par conséquent $x (T)^c y$ et $y (T)^c x$;

(2) $\Rightarrow$ (4) : si $y T x$, alors $Q(y) \supseteq Q(x)$ et $Q^-(y) \subseteq Q^-(x)$, et donc $d^+(y) \geq d^+(x)$ et $d^-(y) \leq d^-(x)$;

si $x (T)^c y$, alors $y T x$ et l'une au moins des deux inclusions ci-dessus ainsi que l'une au moins des deux inégalités ci-dessus, est stricte ; on en déduit que $d^+(y) - d^-(y) > d^+(x) - d^-(x)$, soit $x (T_s)^c y$;

d'autre part, on sait que $T \subseteq T_s$;

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) : évident ;

(1) $\Rightarrow$ (7) : immédiat puisque (1) $\Rightarrow$ (6) ;

(7) $\Rightarrow$ (8) : immédiat d'après le théorème 1 et la propriété 1 (il suffit d'imposer $T_1 = T_{+-}$ et $T_2 = T_{-+}$) ;

(8) $\Rightarrow$ (1) : d'après le théorème 1, Q est une relation de Ferrers ; soient x et y tels que $Q(x) \not\subseteq Q(y)$; alors il existe $z \in Q(y) - Q(x)$ et on a $f_1(x) \leq f_2(z) < f_1(y)$, donc $f_2(x) < f_2(y)$, soit $Q^-(x) \supseteq Q^-(y)$ ■

4. APPLICATION AUX QUASI-ORDRES ET AUX ORDRES QUASI-FORTS

Rappelons que les relations d'intervalles et les ordres d'intervalles sont les relations de Ferrers qui sont respectivement réflexives et anti-réflexives, tandis que les quasi-ordres et les ordres quasi-forts sont les S-relations de Ferrers qui sont respectivement réflexives et anti-réflexives.

Il apparaît alors que le théorème 5, l'équivalence (1)-(5)-(6) du corollaire 1, le théorème 7 et le théorème 8 de la section 7 de [4] s'obtiennent en réécrivant le théorème 2 de cette note pour des relations réflexives, tandis que le théorème 5bis, l'équivalence (1)-(7)-(8) du corollaire 2, le théorème 7bis et le théorème 8bis s'obtiennent en réécrivant ce même théorème pour des relations anti-réflexives.

D'autre part, l'égalité $\lambda(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ établit une bijection entre les fonctions λ (cf. la section 8 de [4]) et les couples de fonctions

f_1 et f_2 de X dans $\mathbb{R}$ telles que $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout x de X .

Cette dernière condition traduisant l'anti-réflexivité pour une relation de Ferrers lorsque f_1 et f_2 satisfont la condition du théorème 1, l'équivalence (1)-(3) du théorème 9 de la section 8 de [4] est une formulation équivalente au théorème 1 de cette note, écrite dans le cas particulier des relations anti-réflexives, tandis que l'équivalence (1)-(5) du théorème 10 de la section 8 de [4] traduit l'équivalence (1)-(8) du théorème 2 de cette note dans ce même cas particulier (à condition de se rappeler qu'on peut exiger dans le théorème 1, et donc dans la condition (8) du théorème 2, que f_1 et f_2 satisfassent à: pour $i=1,2$ et pour tous $x,y \in X$, $f_i(x) \neq f_i(y)$).

5. UN ECHEC A LA RELAXATION DE LA CONTRAINTE DE REFLEXIVITE

A toute relation R sur X on peut associer un graphe simple (i.e. graphe non orienté, sans boucles ni arêtes multiples) que nous noterons $G_{\text{sym}}(R)$, ayant X comme ensemble de sommets, et tel que deux sommets x et y distincts soient adjacents dans $G_{\text{sym}}(R)$ ssi xRy et yRx .

On définit classiquement un graphe d'intervalles comme un graphe simple G tel qu'on puisse définir une application de l'ensemble de ses sommets dans l'ensemble des intervalles d'un ensemble totalement ordonné de sorte que deux sommets distincts de G sont adjacents dans G ssi leurs intervalles associés ont une intersection non vide.

De cette définition et du théorème 9 de [4], on déduit, en se rappelant que les relations d'intervalles sont les duales des ordres d'intervalles :

THEOREME 3

Un graphe simple G est un graphe d'intervalles ssi il existe une relation d'intervalles R (i.e. une relation de Ferrers réflexive) telle que $G = G_{\text{sym}}(R)$.

Le contre-exemple suivant montre que la condition de réflexivité ne peut être supprimée de l'énoncé du théorème 3: la relation R donnée ci-dessous par sa matrice est une relation de Ferrers (ni réflexive ni anti-réflexive), mais $G = G_{\text{sym}}(R)$ n'est pas un graphe d'intervalles: $acadaeafghijkjlmjba$ est un cycle de G^c , le graphe complémentaire de G , et c'est un cycle impair et sans corde triangulaire (au sens de [3]).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
a	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
b	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
c	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
d	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
e	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
f	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
k	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
l	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
m	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1

(autrement dit, bien que G n'ait pas de carré sans diagonale, ce qui est toujours le cas pour $G_{\text{sym}}(R)$ lorsque R est une relation de Ferrers, G n'est pas un graphe d'intervalles parce que G^c n'est pas un graphe de comparabilité)

6. BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOUCHET A., "Etude Combinatoire des Ordonnés Finis. Applications", *thèse d'état*, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1971.
- [2] COGIS O., "Ferrers Digraphs and Threshold Graphs", *CR n°13, Gr. Rech. CNRS n°22*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1979.
- [3] GILMORE P.C., HOFFMAN A.J., "A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs", *Can. J. Math.*, 16 (1964), 539-548.
- [4] MONJARDET B., "Axiomatiques et Propriétés des Quasi-ordres", *Math. Sc. Hum.*, 63 (1978), 51-82.
- [5] SHARP H., "Enumeration of Transitive Step-type Relations", *Acta Math. Acad. Sc. Hung.*, 22 (1971), 365-371.