

J. PETITOT

Sur le modèle historique de Thom-Pomian

Mathématiques et sciences humaines, tome 64 (1978), p. 43-70

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__64__43_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE MODELE HISTORIQUE DE THOM-POMIAN

J. PETITOT

Si la T.C. permet d'approfondir, à travers une doctrine générale et cohérente, la compréhension d'un nombre assez considérable de phénomènes physiques déjà formalisés, si elle fournit le cadre mathématique naturel de théories classiques comme celle de l'équilibre économique, elle prétend aussi intervenir de façon conséquente dans les sciences biologiques et humaines. A l'autre extrême du spectre de ses applications, l'on rencontre un certain nombre de modèles analogiques très hétérogènes, de degrés d'élaboration très variables et dont le statut épistémologique n'est pas toujours très évident. Ce sont ces derniers qui ont déclenché les polémiques les plus vives. C'est que la question qu'ils posent est en effet cruciale, car, dans la mesure où l'on arriverait à la conclusion que cette nouvelle stratégie modélisatrice est inacceptable, la T.C. se trouverait annulée en tant que telle et réduite aux mathématiques qui la fondent.

Il est donc nécessaire de s'interroger sur l'intervention catastrophiste dans le champ de l'anthropologie générale. Parmi toutes les façons qu'il y aurait de le faire, la plus pertinente me semble être de discuter un exemple concret. J'ai choisi à cette fin le modèle historique de Thom-Pomian.

Ce choix n'est pas dû au hasard. La T.C. entretient les plus grands rapports avec le *concept* même d'histoire. On peut même dire que son projet est de proposer *les premiers modèles mathématiques pour l'historicité en général*. Or, on sait que le concept d'histoire - *qui est celui du temps comme principe morphogène* - est resté irréductible à toute description dynamique. Cette obstruction a une cause profonde qui engage l'ensemble de l'option "galiléenne". Comme le remarque K. Pomian ⁽¹⁾, un des axiomes des sciences

(1) Article "catastrophe" de l'Encyclopédie Einaudi repris dans *Libre* n° 73-4.

"dures" (sciences naturelles exactes) est l'axiome "de conservation de la continuité" affirmant que la continuité des causes implique une continuité des effets. Or il se trouve violé par des phénomènes aussi familiers que ceux de transition de phases et de morphogénèse biologique. De Hegel à Marx ces phénomènes ont servi de paradigme pour l'évolution historique. Maxwell a été le premier à penser qu'ils devaient être abordés à partir d'une analyse de la stabilité structurelle et de la théorie des singularités. Depuis, le paradigme s'est enrichi. En particulier par l'introduction des structures dissipatives d'I. Prigogine et, à travers elles, des notions de structure, de fonction et d'histoire dans la thermodynamique. Mais ce n'est qu'avec la T.C. que le programme de Maxwell a trouvé un début de réalisation. A partir d'une analyse *mathématique* de la stabilité structurelle et de la théorie des singularités, elle a dégagé l'Idée sous-jacente au paradigme, à savoir celle de *bifurcation*. Il devient désormais plausible de faire l'hypothèse que le temps comme principe morphogène se réduit à des séquences de bifurcations. Une telle hypothèse permet de "nouer" ensemble le "phylum" de la physique et le "phylum" de la dialectique, c'est-à-dire de mener à sa forme mathématique ce que recouvre l'intuition quelque peu opaque et confuse d'une "dialectique" de la nature. Il est donc intéressant de voir comment ce "bouclage" théorique peut opérer *effectivement* dans la modélisation de phénomènes historiques concrets. D'où l'intérêt épistémologique du modèle de Thom-Pomian.

Avant que d'y venir quelques remarques préliminaires sont indispensables.

1. REMARQUES PRELIMINAIRES.

1.1. Ce qui frappe au prime abord dans l'usage des modèles catastrophiques, c'est qu'ils sont locaux, qualitatifs et non prédictifs et ne satisfont donc pas apparemment à ce que l'on est en droit d'attendre d'un modèle. Et, pourtant, comme nous l'avons vu à propos des caustiques, ils peuvent intervenir de façon décisive dans des théories physiques globales, quantitatives et prédictives.

Si l'on réfléchit à cette ambivalence profonde, l'on est conduit à remarquer que ce qui assure l'aspect global, quantitatif et prédictif des théories physiques, se ramène toujours d'une façon ou d'une autre à deux conditions essentielles :

i) les espaces introduits dans la description des phénomènes sont dérivés de la structure de l'espace-temps de base et de son groupe d'invariance ;

ii) le passage du local au global repose sur des propriétés d'analyticité.

Dans ce contexte l'infrastructure catastrophique des phénomènes critiques devient en général *dérivable* (au prix d'un formalisme approprié) de leur physique.

Mais on peut légitimement se demander si tout phénomène est, de droit et de fait, réductible à un cadre satisfaisant à ces deux conditions et s'il n'existe pas *un universum* de phénomènes critiques admettant pour espaces de base non pas l'espace-temps, mais des "espaces sémantiques". Telle est du moins *l'hypothèse* de la T.C. La T.C. s'autorise :

- i)* à considérer des espaces de base munis d'une structure "pauvre" (différentiable) ;
- ii)* à modéliser les phénomènes critiques qu'y induisent des contraintes dynamiques d'optimisation ;
- iii)* à interpréter sur ce mode les données phénoménologiques.

L'on voit donc que la véritable question n'est pas celle (naïvement métaphysique) de la "scientificité", supposée ou déniée, de la T.C., mais celle des espaces de base *admissibles*. Si l'on accepte, en droit et en fait, la labilité sémantique de ces derniers, alors non seulement les modèles catastrophiques deviennent légitimes, mais leurs "limites" apparentes ne deviennent que l'expression de leur pertinence même :

- i)* les modèles sont locaux et qualitatifs parce que la structure de base est seulement différentiable ;
- ii)* les modèles sont non prédictifs parce qu'il n'y intervient pas de propriétés d'analyticité ;
- iii)* les modèles sont analogiques par transfert des espaces de base.

Qui plus est la stratégie catastrophiste, précisément parce qu'elle transgresse le cadre spatio-temporel constituant l'objet d'expérience et prétend à la modélisation d'un universum morphologique que les formalisations réductionnistes laissent inentamé, ouvre à l'enjeu théorique qui serait sans elle informulable, *de la "descente" du sémantique dans le spatio-temporel*.

L'on peut donc dire qu'en dernière instance, loin de dénier l'implication des mathématiques dans le réel en regressant à une quelconque poétique "prégaliléenne", la T.C. maintient au contraire cet impératif, mais en l'enrichissant d'une façon telle, qu'elle y *réactive* une dimension de l'être oubliée par la science. Il est naturel que ce faisant, elle entre en conflit avec d'autres stratégies.

Considérons par exemple les stratégies combinatoires (graphes, automates

treillis, matroïdes, etc...). On peut s'interroger sur le statut de leur intervention dans les sciences morphologiques ⁽¹⁾. Ces approches structurales prennent en général pour éléments de base (composants) un corpus de champs morphogénétiques expérimentalement repérables et leur appliquent une "grammaticalité" étrangère aux processus de régulation assurant leur existence. Elles reposent sur un usage non critique des ressources les plus élémentaires de la symbolisation et hypostasient la stabilité de ces champs dans l'identité matérielle des symboles littéraires qui les représentent. Cela permet certes une maîtrise raffinée de la complexité, mais cela interdit *a priori* de penser un concept de *causalité structurale*. En revanche, la T.C. si elle se heurte d'emblée aux problèmes de la complexité combinatoire et de l'itération, produit justement un tel concept. Ce conflit (se situant jusqu'ici dans l'idéologie) entre les stratégies algébrique-combinatoires et catastrophistes en sciences humaines renvoie sans doute à une *complémentarité* profonde, encore inexplorée.

L'on peut aussi évoquer le cas des méthodes d'analyse factorielle. On peut faire l'hypothèse que de façon très générale, les "nuages" qu'elles traitent s'accumulent avec une plus ou moins grande dispersion sur des hypersurfaces dont la morphologie est un aspect crucial de l'information. Il est clair cependant que cette morphologie est détruite dans l'analyse spectrale des matrices.

L'information minimale dont on peut disposer à propos d'un phénomène complexe est une distribution statistique. Soit σ la multivariable $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dont dépend celle-ci et $P(\sigma)$ sa densité. Le graphe de $P(\sigma)$ définit une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$ (un "relief" de base $\mathbb{R}^n$). En général il existe une séparation *naturelle* entre variables internes et variables externes (de contrôle). Soit $\sigma = (x, c)$ cette décomposition. $P(\sigma)$ est donc une famille $P_c(x)$ de distributions paramétrée par c . Comme ce sont les maxima des $P_c(x)$ (états les plus probables) qui sont phénoménologiquement fondamentaux, il est *naturel* de considérer l'hypersurface Σ (de dimension égale à celle de l'espace externe) de $\mathbb{R}^n(x, c)$ qu'ils engendrent, ainsi que sa projection sur l'espace externe. L'on retrouve la description catastrophiste qui privilégie la compétition des états, accentue la multi-modélisation des distributions et recherche les paramètres conflictuels.

(1) Je pense ici essentiellement aux linguistiques post-chomskiennes, aux travaux de l'école de Lindenmayer en biologie (théorie des L-systèmes) et aux divers néomécanismes "cybernétiques".

1.2. J'ai utilisé plus haut l'expression "d'infrastructure catastrophique". Elle recouvre une question délicate. Les phénomènes naturels sont souvent *contraints* par une situation catastrophique sous-jacente dont la modélisation fournit en quelque sorte le *degré zéro* d'intelligibilité. Lorsque d'autres niveaux de description sont modélisables, ce degré zéro qui les contraint conduit souvent à les réinterpréter de façon originale ⁽¹⁾. Mais pour l'immense majorité des phénomènes naturels (en particulier biologiques et sociaux) *la complexité implique que seul le niveau catastrophique soit effectivement modélisable*. Comme le remarque très bien Zeeman : "In such models there are often several levels of structure, just as in a geometry problem there can be several levels of structure, for instance the topological, differential, algebraic, and affine, etc. And, just as in geometry the topological level is generally the deepest and may impose limitations upon the higher levels, so in applied mathematics, if there is a catastrophe level, then it is generally the deepest and likely to impose limitations upon any higher levels, such as the differential equations involved, the asymptotic behaviour, etc. Again, in geometry the complexity of the higher levels may render them inaccessible, so that they can only be handled implicitly rather than explicitly, while at the same time the underlying topological invariants may even be computable. Similarly in applied mathematics the complexity of the differential equations may sometimes render them inaccessible (even to computers), so that they can only be handled implicitly rather than explicitly, while the underlying catastrophe can be modeled, possibly even to the extent of providing quantitative prediction" ⁽²⁾.

Le parallèle établi par Zeeman entre T.C. et topologie est épistémologiquement très éclairant. La rupture thomiste est en effet du même ordre d'importance que la rupture riemanienne dégageant les invariants topologiques sous-jacents aux fonctions analytiques. De même que Riemann, en brisant la légalité géométrique absolue ayant dominé d'Euclide à Kant, interprète les périodes des intégrales abéliennes par les propriétés topologiques (phénoménologiquement les plus simples) des courbes algébriques complexes (elliptiques) sous-jacentes, de même Thom, en brisant la légalité "galiléenne" (ce qui en fait un post-galiléen réactivant effectivement un vaste ensemble de questions prégaliléennes, platoniciennes et aristotéliennes), interprète les morphologies naturelles par les propriétés catastrophiques (phénoméno-

(1) Cf. encore une fois, le cas des caustiques.

(2) Zeeman [1974]. Dans cet article Zeeman introduit, sur la base du niveau catastrophique, les niveaux successifs de l'homéostasie, du développement, du feedback, du bruit et de la diffusion.

logiquement les plus manifestes) des dynamiques internes implicites supposées les engendrer.

Il y a là un problème de philosophie des sciences encore largement impensé. Tout se passe en effet comme si, loin d'être de simples gestes d'idéalisation par passage de l'approximatif au rigoureux, les actes fondateurs des grandes ruptures scientifiques étaient des actes *forclusifs* scotomisant une strate réelle de l'être au profit d'une élaboration symbolique.

Dans le cadre d'une pratique symbolique constituée en légalité, il faut évidemment attendre très longtemps pour que ce qui s'y trouvait originellement forclos puisse éventuellement faire retour. Il aura fallu par exemple attendre Riemann, Poincaré, Weyl etc, pour que *l'imagination* d'espaces "flexibles" obtenus par recollement de cartes locales - imaginaire spatial dont on peut faire l'hypothèse qu'il gouverne la pensée "prélogique" (1) - s'introduise à *l'intérieur de la géométrie elle-même*. De même, il aura fallu attendre Thom pour que les notions de forme naturelle, de conflit et d'évènement fassent retour dans les formalismes ayant assuré la légalité de la physique fondamentale.

1.3. On critique souvent la T.C. parce que ses modèles sont en trop grand rapport de proximité avec la langue naturelle. Mais cette disqualification du langage - outre le fait qu'elle a pour fonction idéologique de maintenir l'instance "surmoïque" d'une formalisation distanciatrice - méconnaît un des aspects essentiels de la T.C.

Comme "physique" *phénoménologique*, la T.C. repose sur l'hypothèse que *la description d'un phénomène en langue naturelle est une approximation naturelle de son infrastructure catastrophique*. Elle se propose d'élaborer des équivalents géométriques de situations conceptuelles. Ce projet (immense et encore à peine esquissé) a un double intérêt :

- i) prendre en compte au coeur même de l'intervention formelle l'impossibilité de disjoindre les sciences du sol linguistique ;
- ii) de géométriser le concept, de rétablir une continuité sous-jacente là où la langue en a perdu conscience et de réactiver des schémas dynamiques sédimentés dans les automatismes du langage.

Cette stratégie n'est d'ailleurs pas incompatible avec les stratégies réductionnistes puisque - toujours eu égard à sa théorie dialectique des

(1) Cf. *Espace, science et magie* [Thom 1978].

espaces internes et externes - la T.C. peut en principe "remonter" des modèles sémantiques à la physique sous-jacente.

Ainsi la T.C. vise, en dernière instance, à un enrichissement de la langue qui, tout en étant intégralement formalisé, resterait structuré *comme* un langage. Une *Caractéristique* qui modéliserait à la fois les phénomènes et les schèmes conceptuels par lesquels ils s'expriment. Il n'est donc pas étonnant que dans les cas *élémentaires* elle se réduise souvent à un simple *redoublement* de la langue. Un écart ne saurait intervenir que dans les cas *non-élémentaires*, évidemment plus difficiles à investiguer.

Ce qui fait que la question pertinente n'est pas celle de ce redoublement, mais bien plutôt comme l'a remarqué J.C. Milner ⁽¹⁾, celle de "l'harmonie" entre langage et catastrophes. Car, à supposer que celle-ci fasse défaut, la T.C. se réduirait à son "effet ontologique". Dans cette affaire tout dogmatisme serait anticipé.

2. LE MODELE DE THOM-POMIAN (1ère partie).

Ce qui suit est une présentation non pas de l'élaboration définitive (non publiée) du modèle de Thom-Pomian, mais de quelques uns de ses éléments ⁽²⁾. Cette restriction est essentielle. Tel que je le présente ici, le modèle de Thom-Pomian, se trouve réduit à sa plus simple expression. Il n'inclut en particulier aucune prise en compte de la complexité historique réelle des phénomènes invoqués. Pour s'en faire une idée juste, le lecteur devra donc consulter, lorsqu'elle sera parue, la version définitive dont celle-ci n'est qu'une approximation fragmentaire à portée heuristique et à valeur de témoignage.

2.1. Un grand nombre de pays européens ont suivi, avant que d'accéder au régime capitaliste moderne, un scénario de type monarchie-révolution - dictature - restauration. Quelles qu'en soient les variantes, ce scénario, étant donnée sa répétition, est doué de prégnance (stabilité structurelle) et peut donc être considéré comme un champ morphogénétique (une chréode) historique. Mais précisément à cause de sa prégnance conceptuellement trivialement explicitable, il est considéré comme une donnée phénoménologique primaire et sommaire n'ayant en soi aucune valeur théorique. L'historien ne cherchera donc pas en général à analyser *en tant que tel* ce datum à

(1) *Débat sur la T.C.* [Ornicar n°16, 1978].

(2) Exposés par Pomian et Thom au séminaire IHES du 11-12-1976.

l'intelligibilité duquel la langue même fait écran et cherchera plutôt à en analyser à partir de méthodes spécifiques, des causes et des effets.

Pourtant, il suffit d'énoncer la question : comment une "dynamique sociale" (aussi vague soit-elle) peut-elle engendrer une telle chréode ? pour voir que la réponse, bien qu'ancrée dans les concepts utilisés, ne s'y réduit pas pour autant, qu'elle les excède *sans toutefois exiger a priori de sortir de la description phénoménologique pure*. On peut donc légitimement se proposer d'élaborer un modèle heuristique schématisant au degré zéro (cf. 1.2.) une telle infrastructure dynamique.

2.2. La première question est celle du choix de la "dynamique sociale" supposée cause. Faisons l'hypothèse qu'elle repose sur celle *du pouvoir*. Aux trois circuits fondamentaux de l'échange (individus, biens et signes) correspondent les trois pouvoirs (que l'on peut supposer en première approximation "indépendants") de l'autorité, de l'économie et du contrôle, pouvoirs détenus par des groupes "cratiques" soumis à des rivalités et à des conflits internes.

La seconde hypothèse (qui est en fait un constat) est qu'il existe un *lieu central* (pouvoir politique) censé représenter la société dans son ensemble. Ce lieu central d'une part est l'enjeu des groupes cratiques et d'autre part est régulé dans sa stabilité par une adhésion de l'opinion faisant intervenir des facteurs complexes à la fois contractuels et identificatoires.

Par définition, un tel pouvoir doit être légitime : le régime se définit par un *paradigme de légitimité* fixant les prérogatives et les contraintes du lieu central. Cette notion de paradigme permet déjà de départager à un niveau très grossier certains évènements.

- i) une révolution serait une rupture catastrophique du paradigme ;
- ii) une dictature serait une substitution au paradigme d'un pouvoir charismatique personnel ;
- iii) un coup d'état serait une atteinte locale au fonctionnement diachronique du paradigme dont la structure (synchronique) demeurerait invariante ;
- iv) un changement de régime serait un changement périphérique et local de la structure du paradigme.

A l'opposé des facteurs d'adhésion au paradigme interviennent les facteurs de son désinvestissement : l'érosion du pouvoir, la frustration des groupes cratiques ⁽¹⁾, etc...

(1) L'accroissement du pouvoir d'un groupe cratique augmente en général sa frustration (cas du tiers état pour la révolution française).

Aussi simpliste que soit cette étiologie, il est clair que la possibilité de montrer qu'elle *suffit* à engendrer (parmi d'autres) la chréode monarchie-révolution-dictature-restauration (où la monarchie joue le rôle de paradigme initial) est en soi un résultat non trivial.

2.3. Choisissons d'abord un espace de contrôle U (espace externe). Pour des raisons de simplicité, Pomian et Thom ont été conduits à choisir comme "paramètres" l'autorité et le pouvoir sémiologique, plus clairement indépendants entre eux que le pouvoir économique peut l'être d'eux ⁽¹⁾.

HYPOTHESE. *Pour un paradigme de légitimité donné, l'ensemble des régimes peut être paramétré par la position du lieu central (L.C.) dans un espace de configuration abstrait M (espace interne).*

Cette hypothèse signifie entre autre que le paradigme est d'un niveau historico-social supérieur et recouvre à *la fois* le pouvoir et l'opinion. Elle signifie aussi que le lieu central (la politique) *n'est pas a priori repérable dans l'espace de contrôle.*

Cette mise en place d'une dialectique entre l'espace externe U et l'espace interne M a ici une importance tout à fait cruciale puisqu'elle va permettre de prendre en compte l'interaction-intégration *entre deux niveaux*, celui du régime politique global et celui (statistique et psychologique) des opinions individuelles. En effet, on peut représenter chaque individu par un point de l'espace de contrôle repérant sa position réelle (par rapport aux facteurs d'autorité et de pouvoir sémiologique), position pondérée par un facteur psychologique d'adhésion au paradigme. On obtient ainsi un nuage de points qui, au niveau des positions réelles, se disjoint en sous-nuages représentant d'une part les divers groupes cratiques et d'autre part le "demos", mais qui, au niveau des positions pondérées a une plus grande connexité dans la mesure où l'adhésion au paradigme augmente en général chez les individus en proportion de l'absence de pouvoir (prise en compte de l'aliénation idéologique du demos comme facteur de stabilité du régime).

Soit G_{EU} le centre de gravité (opinion moyenne) de cette représentation statistique du "corps social". Il s'agit d'analyser les phénomènes critiques auxquels peut donner lieu le conflit entre la position du L.C. dans M et celle de G dans U .

(1) Il s'agit d'un cas typique du choix d'un "espace sémantique" comme espace de base (cf.1.1.1.). Si l'on montre que ce choix permet d'élaborer un modèle dynamique de la révolution comme chréode, *la véritable question devient dès lors de "redescendre" de cet espace de base aux infrastructures* (subordination de l'histoire événementielle à une théorie du pouvoir).

Pour cela, le plus simple (ce qui ne peut donc être valable qu'en toute première approximation) est d'interpréter la notion historico-sociale vague de "dynamique sociale" comme définissant un modèle statique sur $M \times U$ c'est-à-dire une famille de potentiels $F : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ paramétrée par $u = G(F(m, u) = f_u(m))$. Comme contrainte implicite d'optimisation F résume l'accord entre le régime et l'opinion dominante. La légitimité d'un régime à l'intérieur du paradigme signifie qu'il n'existe qu'un seul minimum de $f_u(m)$ pour u donné. Mais il peut y avoir conflit de régimes, d'où la possibilité de sauts catastrophiques, ceux-ci admettant toujours un certain retard (delay) dans la mesure où les pouvoirs s'accrochent toujours au pouvoir.

Le problème est que les composantes de ce pré-modèle ne sont pas maîtrisables même descriptivement, l'espace de base U parce qu'il faudrait pouvoir en "redescendre" jusqu'aux infrastructures, l'espace interne M et le potentiel F tout simplement parce qu'ils sont inconnus. Cela est particulièrement grave en ce qui concerne la dynamique F d'optimisation *puisque elle est le présupposé abstrait des événements à modéliser.*

2.4. L'art de Thom est ici tout à fait caractéristique. Plutôt que d'abandonner un modèle que son laxisme analogique rend inutilisable Thom va chercher à en utiliser les ressources formelles de façon :

- i) à transformer un manque pratique en question théorique ;
- ii) à en fournir une réponse conjecturale ;
- iii) à transférer sur celle-ci l'interprétation.

Son idée va être d'utiliser la présupposition de F pour induire un plongement de l'espace interne M dans l'espace externe U . Ce faisant le modèle statique $F : M \times U \rightarrow \mathbb{R}$ se trouve remplacé par une "machine à catastrophes" dans U qui servira analogiquement (mais cette fois dans un sens précis) de base au modèle.

Soit donc $F(m, u) = f_u(m)$ le potentiel contrôlé inconnu. Soit $\tilde{F}$ l'espace fonctionnel des potentiels $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. F induit un champ

$$\varphi : U \rightarrow \tilde{F}$$

$$u \rightarrow f_u$$

Soit $m \in M$ et soit $H_m \subset \tilde{F}$ le sous-vectoriel de $\tilde{F}$, de codimension $n = \dim M$, des potentiels f admettant en m un point critique.

CONJECTURE 1. Si $\dim M < \dim U$, φ est génériquement transverse à tous les sous-vectoriels H_m .

Supposons cette conjecture démontrée et soit $\Gamma_m = \sigma^{-1}(H_m)$ l'image

inverse dans U par le champ φ de H_m . Γ_m est l'ensemble des $u \in U$ tels que m soit un point critique de f_u . D'après un théorème général, la condition de transversalité sur φ implique que Γ_m est une sous-variété de codimension n de U . Considérons alors la restriction ψ_m de $F(m, \cdot)$ à Γ_m qui à $u \in \Gamma_m$ associe la valeur critique $f_u(m)$.

HYPOTHESE 2. Pour tout $m \in M$, il existe un et un seul $u \in \Gamma_m$ tel que $f_u(m)$ soit un minimum *absolu* de ψ_m .

Supposons cette hypothèse vérifiée et notons $\mu(m)$ le point de U ainsi défini. On a associé à la dynamique d'optimisation F une application

$$\begin{aligned} \mu : M &\longrightarrow U \\ m &\longrightarrow \mu(m) \end{aligned}$$

CONJECTURE 3. Si $\dim M < \dim U$, μ est génériquement un *plongement*.

Les conjectures 1 et 3 purement mathématiques, supportent la part proprement théorique du modèle. L'hypothèse 2 est une hypothèse sur F c'est-à-dire sur le paradigme. Supposons-les vérifiées toutes trois et essayons d'interpréter conceptuellement le plongement $\mu : M \longrightarrow U$ ainsi défini.

Soit $m \in M$ un régime compatible au paradigme. Γ_m (du moins la partie de Γ_m correspondant à un minimum de $f_u(m)$) est l'ensemble des opinions moyennes adhérentes à m . Quant à $\mu(m) \in \Gamma_m$, défini par une condition de maximisation, c'est l'opinion moyenne limite adhérente à m . Le plongement μ de l'espace interne M dans l'espace externe U revient donc essentiellement à identifier le lieu central, enjeu des conflits de pouvoir, à une *opinion extrême*, à un *état limite admissible* par le paradigme.

La pondération de la position réelle des individus par un facteur psychologique d'adhésion est ici capitale. Déjà le modèle intégrait deux niveaux hiérarchiques, celui du pouvoir politique et celui, statistique, des opinions. Maintenant, il inclut, à travers μ le phénomène *d'identification collective* au lieu central qui permet en particulier de stabiliser le paradigme en délocalisant l'autorité légitime au niveau individuel (cf. par exemple la légitimité paternelle comme relai de la légitimité royale). Définir en effet le lieu central comme état limite revient à le poser comme référent idéal.

Remarque. Accentuant la légitimité au détriment de la légalité, cette version élémentaire du modèle de Thom-Pomian est donc plutôt "adaptée" à la rupture du paradigme monarchique qu'à l'analyse des paradigmes capitaliste et démocratique.

2.5. Dans le cas du contrôle bidimensionnel U , $\mu(M)$ (à supposer qu'il existe) sera *le bord* d'un voisinage de l'origine, l'opinion moyenne $u = G$ s'y trouvant situé, par construction, à l'intérieur. Génériquement, il existera des coordonnées de U pour lesquelles $\mu(M)$ sera une ellipse.

HYPOTHESE 4. On suppose que $\mu(M)$ est déjà une ellipse dans les coordonnées initiales "autorité/pouvoir sémiologique" et que la métrique définie sur U par un isomorphisme local avec $(\mathbb{R}^2, 0)$ a une signification concrète ⁽¹⁾.

Le modèle statique initial qui était inutilisable à cause de sa généralité même, s'est donc considérablement précisé puisqu'il se réduit maintenant à une "machine à catastrophe" où :

- i) le lieu central L.C. optimal *déterminé* par $u = G$ est le pied de la plus courte normale abaissée de G sur $\mu(M)$ (c'est ici qu'intervient la métrique) ;
- ii) le conflit entre L.C. et G devient catastrophique lorsque G traverse l'enveloppe K des normales de $\mu(M)$.

Nous sommes ainsi ramenés, par une succession d'hypothèses et de conjectures *explicites*, à un *analogon mécanique* ⁽²⁾ du problème initial et à l'analyse de l'enveloppe K comme ensemble de bifurcation.

3. DIGRESSION SUR L'EQUILIBRE D'UNE ELLIPSE (d'après Poston).

Avant de montrer comment le modèle précédent permet de rendre compte au degré zéro de la chréode monarchie-révolution-dictature-restauration, arrêtons-nous un instant sur son analogon mécanique qui a le double intérêt d'être géométriquement élémentaire et pédagogique. La description en est due à T. Poston [Poston 1976].

Considérons une ellipse M dont l'excentricité est assez faible pour que son évolute K (enveloppe des normales) lui soit intérieure et dont le centre de gravité G peut être contrôlé de façon à occuper n'importe quelle position (intérieure à M). Si M est posée sur la tranche, sur une surface plane T , ses positions d'équilibre sont telles que G soit sur la normale N_p à M en son point de contact P avec T :

(1) Cette hypothèse est peut-être la moins évidente de celles introduites par Thom. En effet, elle munit d'une structure "forte" l'espace externe qui n'est qu'un espace "sémantique".

(2) L'analogie n'est plus ici *sémantique* mais *dynamique*. Elle dérive de la possibilité de changer d'espace de base (cf.1.1.).

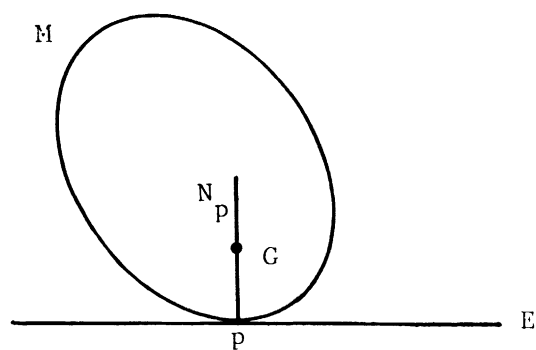


Figure 1.

Si G est à l'extérieur de l'évolute K , on peut mener de G deux normales à M et le système sera susceptible de deux équilibres, l'un stable, l'autre instable :

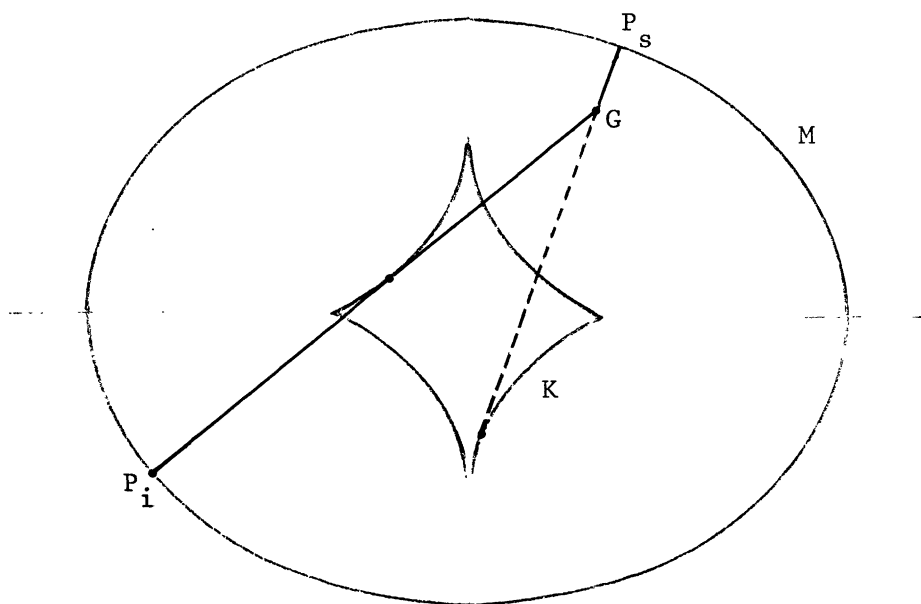


Figure 2.

Si G est à l'intérieur de K , on peut mener de G quatre normales à M et le système sera susceptible de quatre équilibres, deux stables et deux instables :

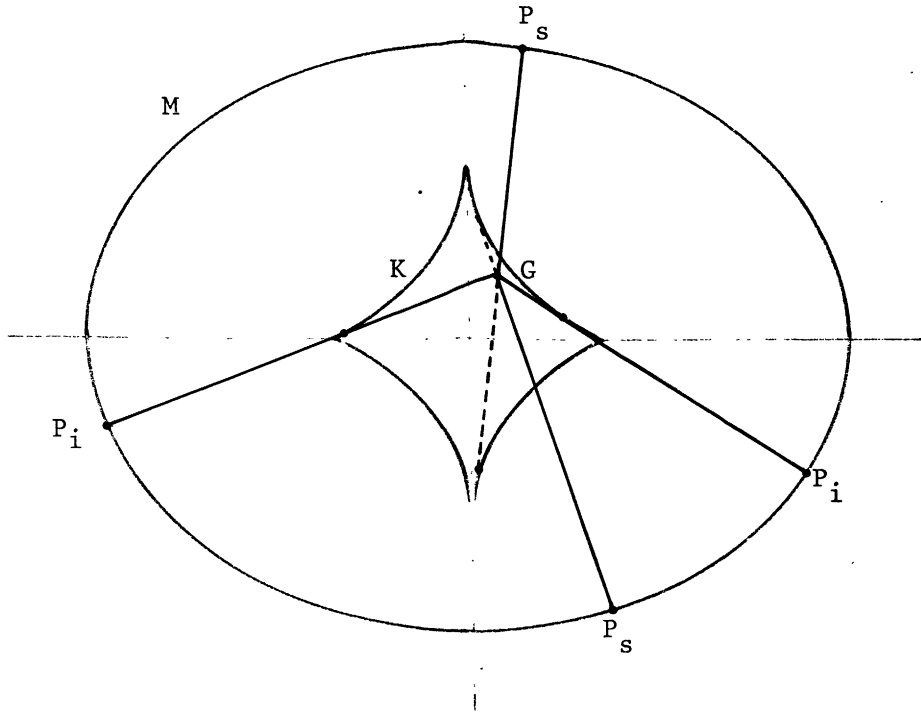
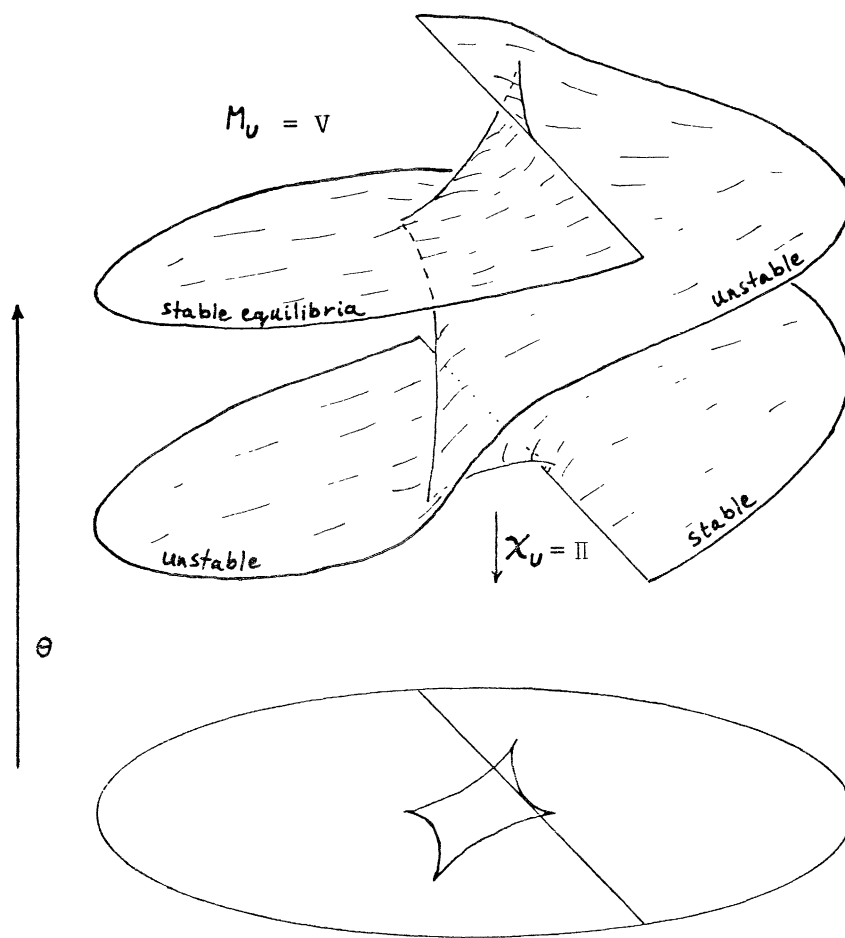


Figure 3.

Les positions stables sont celles pour lesquelles le point de tangence de N_p avec K est à l'extérieur du segment GP et les positions instables celles pour lesquelles il est à l'intérieur.

Ce dispositif mécanique élémentaire peut facilement être interprété catastrophiquement si l'on introduit la fonction énergie $E_G(\theta)$ du système définie sur l'espace interne de variable θ (angle repérant la position de M) et paramétrée par la bivariable externe G . Les états d'équilibres stables (resp. instables) de M correspondant aux minima (resp. aux maxima) de l'énergie, la surface des états est la surface critique V de la famille E_G , sous-variété de la variété tridimensionnelle $U \times S^1$ - où U est l'espace externe (intérieur de M) parcouru par G et S^1 l'espace interne (cercle unité parcouru par θ) - dont le lieu critique Σ se projette sur K par la projection canonique $\Pi : U \times S^1 \rightarrow U$ (cf. figure 4.).



(On identifie les bords supérieur et inférieur V_1 et V_2 de V)

Figure 4. D'après Poston

Ceci est un bon exemple du théorème de Whitney. L'astroïde K est un ensemble de bifurcation global obtenu par recollement de quatre modèles locaux de type cusp. En fait sur ces quatre cusps deux sont standard et deux sont des cusps *duaux* dont la nappe stable est la nappe intermédiaire (fonctions énergies de type local, au lieu de $\sqrt{\dots}$). (1)

Si l'on part d'une position stable P et si G décrit la normale N_P , à la traversée du point de tangence de N_P avec K la position devient instable et le système bifurque catastrophiquement vers un autre équilibre. Si d'autre part l'on considère un chemin générique de U intersectant K (nécessairement transversalement), au point de traversée, le couple d'un équilibre stable et d'un équilibre instable apparaît ou disparaît (catastrophe pli).

Montrons sur cet exemple pédagogique - en accord avec la doctrine générale de la T.C. - comment *la seule phénoménologie du processus permet de reconstruire qualitativement la fonction énergie.*

D'abord pour des raisons de symétrie les quatre strates de Maxwell (de conflit) des modèles locaux se recollent en un point O de codimension 2 (intersection transverse de deux strates de conflit) qui est le centre de symétrie de M et correspond à la situation structurellement instable où il y a égalité des valeurs des deux minima et des deux maxima de l'énergie. L'ensemble catastrophique complet (bifurcations et conflits) a donc la forme suivante :

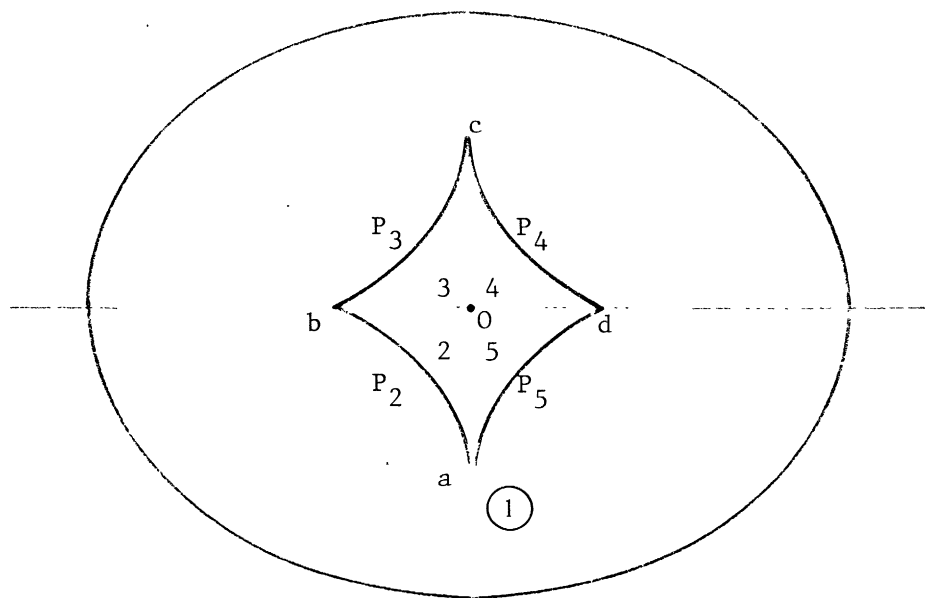
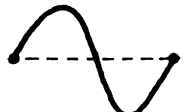


Figure 5.

(1) C'est aussi un autre exemple d'interprétation d'une enveloppe de normales (caustique) comme contour apparent.

Partons d'une position de type 1 extérieure à K . Comme il existe un équilibre stable et un équilibre instable, l'énergie possède un minimum et un maximum et est donc de type E_1 :

E_1  (avec $E_1(0) = E_1(2\pi)$ puisque $E_G(\theta)$ est définie sur S^1 et non pas sur $\mathbb{R}$).

Notons a, b, c, d , les quatre cusps.

A la traversée de a apparaissent deux nouvelles normales N_p et $N_{p'}$, dont les points de tangence avec K sont à l'intérieur des segments respectifs GP et GP' :

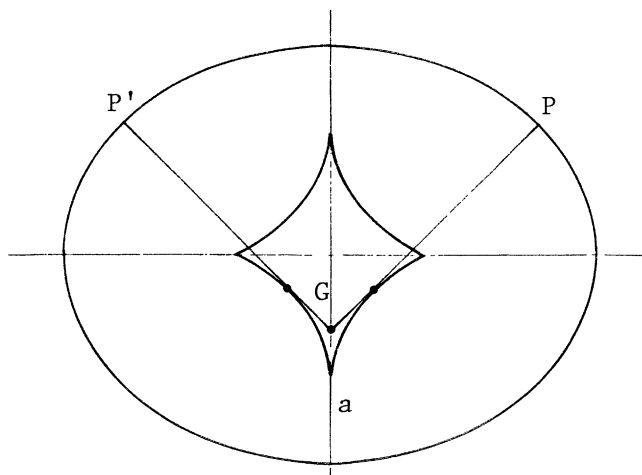
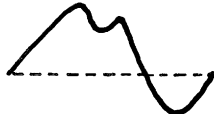
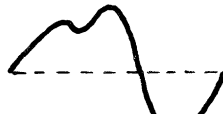
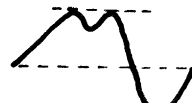
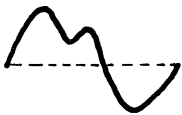
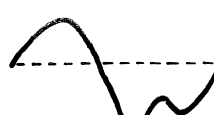


Figure 6.

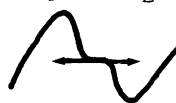
Ces positions nouvelles sont instables et correspondent donc à des maxima de E . Cela montre qu'à la traversée de a c'est le maximum de E_1 qui devient une singularité cusp et que a est un cusp dual engendrant par déploiement dans les zones 2 et 5 les nouveaux types E_2 et E_5 :

E_2  , E_5  ,
séparés par une cuspate de Maxwell 

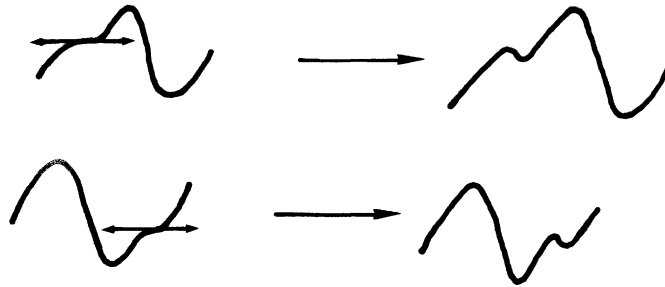
On montre de même qu'en b c'est le minimum de E_1 qui devient un cusp engendrant par déploiement dans les zones 2 et 3 les types :

E'_2  et E_3 

le type E'_2 étant équivalent au type E_2 .

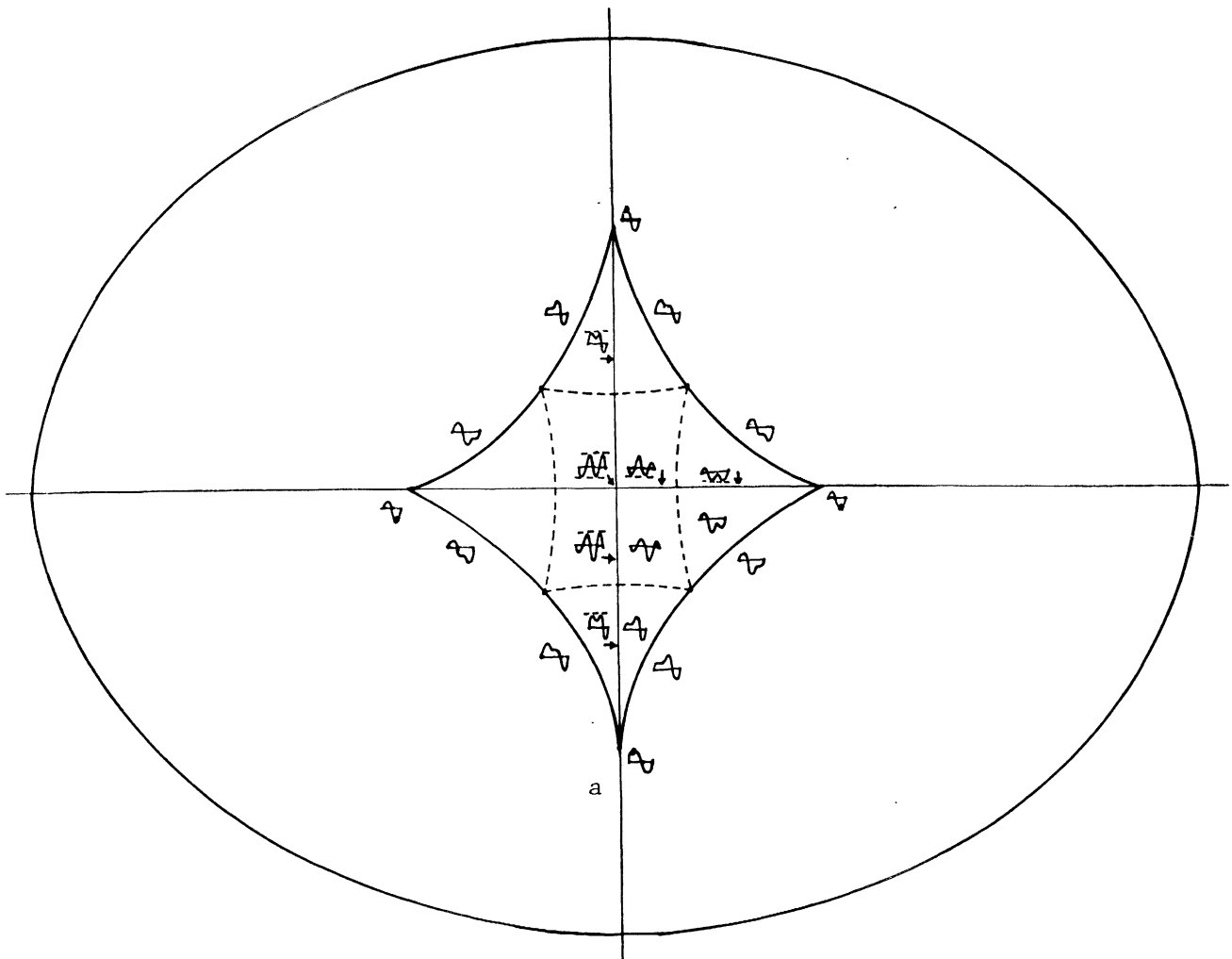
Quant à la transition entre les types E_1 et E_2 elle ne peut se faire que par un point pli p_2 du type suivant . Les autres possibilités

de plis à partir de E_1 se déploieraient en effet suivant les types :



dont aucun ne correspond à E_2 .

On peut ainsi compléter de proche en proche la déduction des types qualitatifs de $E_G(\theta)$ et obtenir la répartition globale de la figure 7.

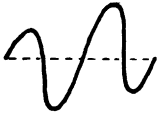


(On a noté $\cap$ et $\cup$ les points cusp)

Seul le cadran inférieur droit est représenté de façon à peu près complète.

Figure 7

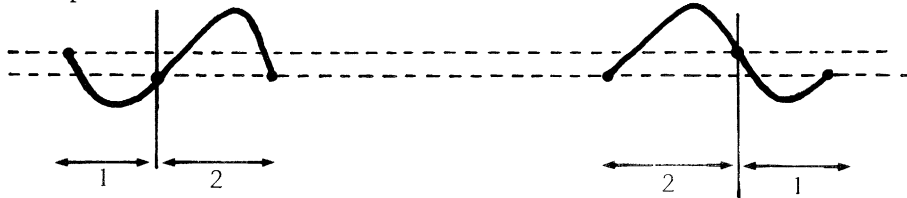
Remarque 1. La complétion précédente exige un minimum de précautions dans la mesure où l'énergie n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur S^1 . Si par exemple, on prolonge directement par continuité de a à b et de b à c la description initiale on aboutit à un type E_4 :

E_4  qui apparemment

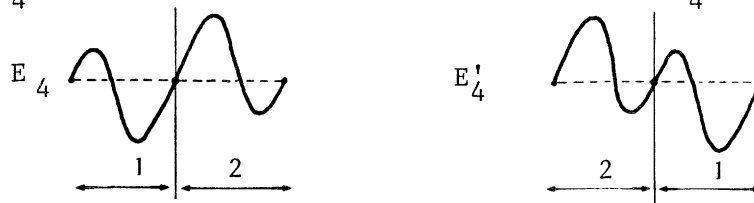
i) ne peut se transformer en type E_1 qu'à condition de *croiser* des valeurs critiques ;

ii) n'est pas équivalent à E_2 alors que cela est exigé par la symétrie du problème.

En fait, comme E est défini sur S^1 on peut appliquer à ses représentations graphiques l'opération schématisée ci-dessous :



Appliquée à E_4 , une telle opération fournit le type E'_4 :



qui est bien équivalent à E_2 .

C'est pourquoi pour rendre plus claire la figure 7 on a figuré en pointillés une astroïde virtuelle matérialisant les points de U où une valeur critique franchit 2π pour revenir en 0.

Remarque 2. Les types qualitatifs de l'énergie E_G sont exactement ceux intervenant dans le déploiement de la singularité queue d'aronde (de codimension 3, de forme normale x^5 et de déploiement universel $x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$). Cela suffit à déduire l'existence d'un troisième contrôle naturel du système, contrôlant des points queue d'aronde et donc des énergies sans points critiques (système sans position d'équilibre).

Tel est bien évidemment le cas. Ce troisième contrôle naturel est l'inclinaison α de la surface T . Si $\alpha \neq 0$ l'énergie $E_{G,\alpha}$ n'est plus périodique et au lieu d'être définie sur S^1 devient définie sur $\mathbb{R}$. L'augmentation de α de 0 à $\frac{\pi}{2}$ transforme K de la façon suivante (cf. Poston).

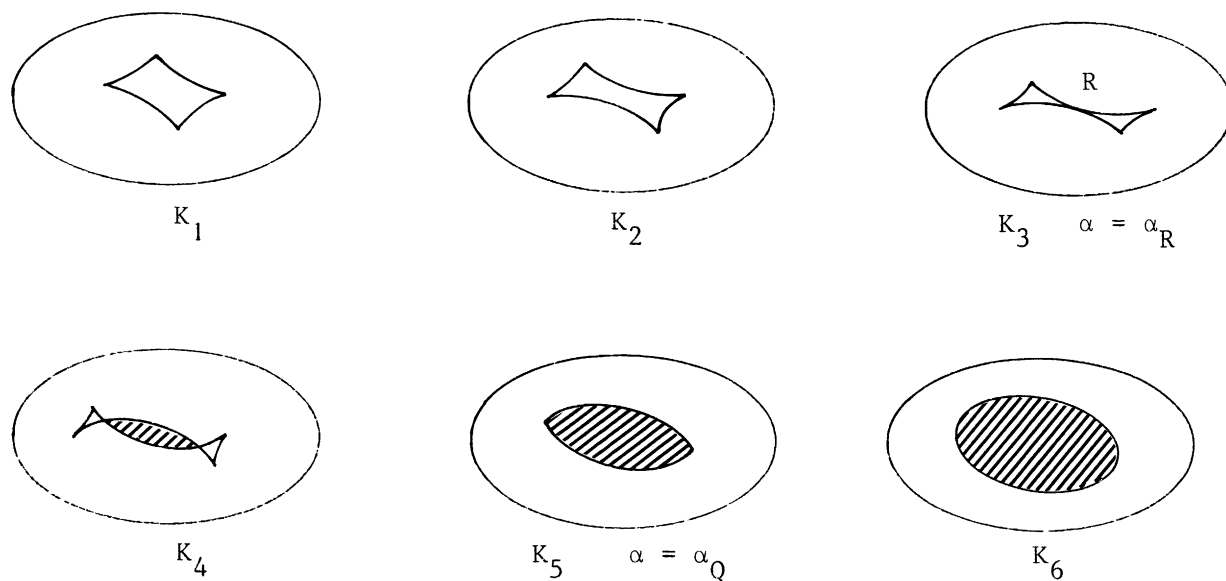


Figure 8.

A partir de K_4 les zones hachurées sont les zones où le système est sans équilibre (ni stable, ni instable). On remarquera qu'interviennent des points pli-pli (K_4) et deux types de points de codimension 3 : les points queue d'aronde Q_1 et Q_2 pour $\alpha = \alpha_Q^{(K_5)}$ et le point R de tangence de deux lignes plis (deux points d'inflexion de même hauteur) pour $\alpha = \alpha_R^{(K_3)}$.

Dans l'espace externe $U \times I$ (où I est l'intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$ parcouru par α) on obtient l'ensemble global de bifurcation représenté à la figure 9. En le complétant par les strates de Maxwell, il devient facile de déduire comme précédemment de la pure phénoménologie, la répartition des types qualitatifs de l'énergie $E_{G;\alpha}$. Ce peut être un bon exercice que de s'y essayer.

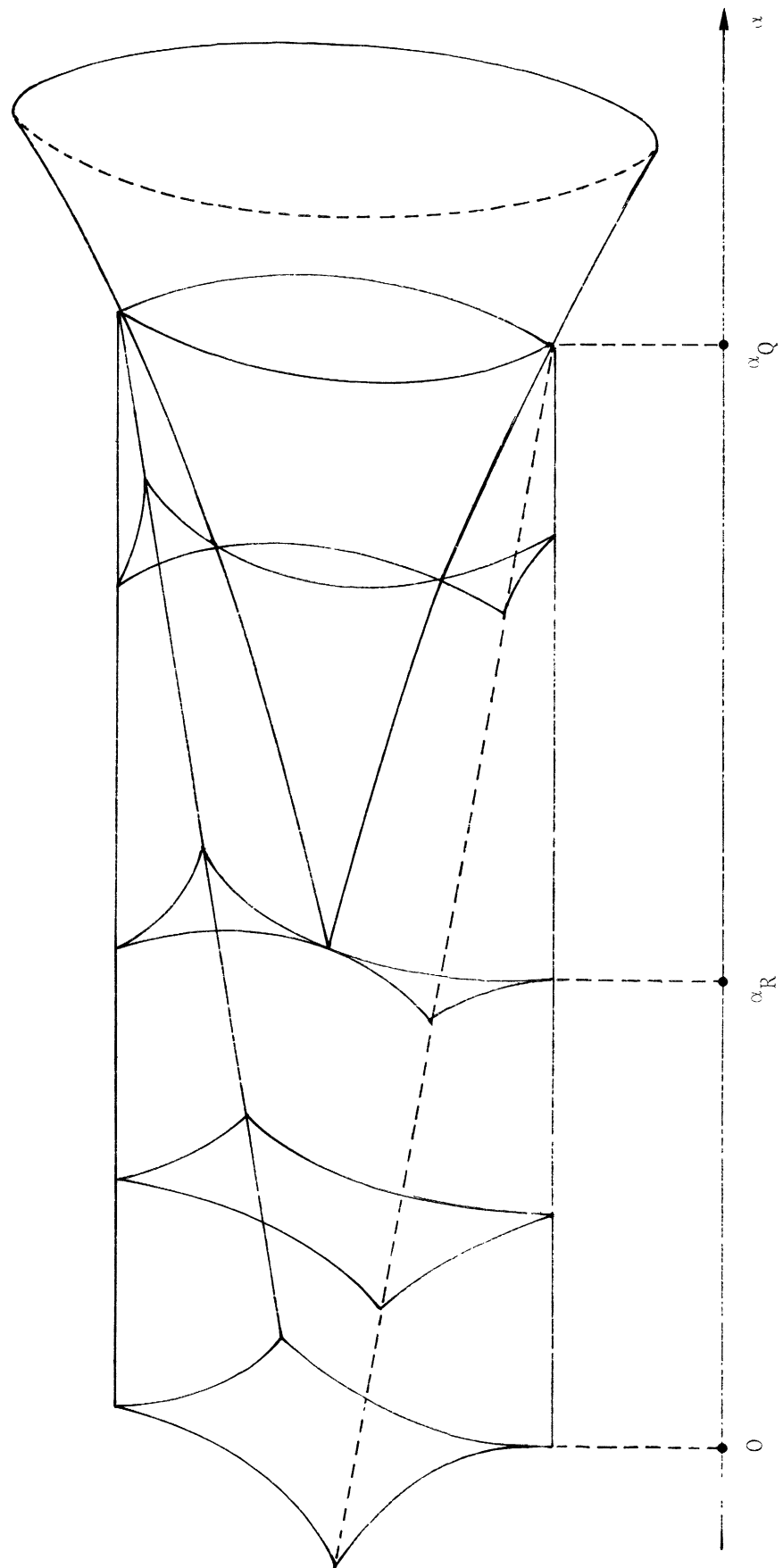


Figure 9

4. LE MODELE DE THOM-POMIAN (2ème partie).

4.1. Partons d'une situation initiale de légitimité. L'opinion moyenne G est située à l'extérieur de K dans le cadran positif, et L.C. est le pied de la normale N_{LC} qui correspond à l'équilibre stable.

De façon dominante, la société adhère à la fois à l'autorité (A) et au pouvoir sémiologique (S) et s'identifie au lieu central comme à un référent idéal qui par délocalisation dans sa structure (introjection) la légitime.

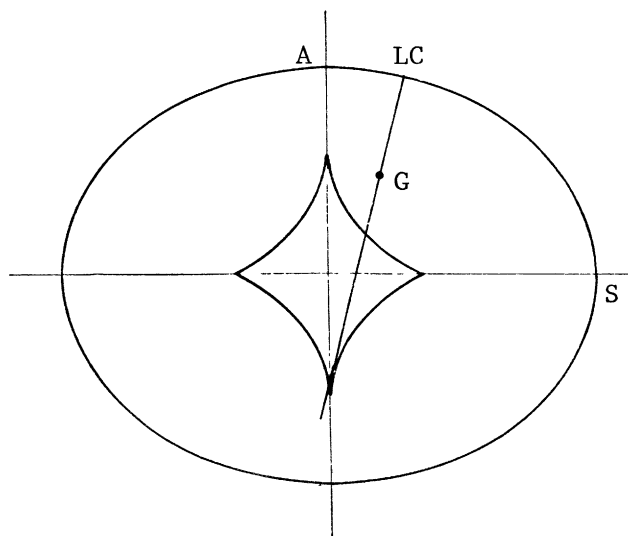


Figure 10.

Dans la mesure où il détient initialement une autorité légitime, le lieu central est dans un premier temps (sur une période longue) inamovible. Il continue à être visé comme valeur de référence. Mais l'autorité étant comme telle impopulaire, l'opinion moyenne G se déplace sur la normale N_{LC} le cas limite étant représenté par le point C_3 (figure 11). A la traversée de K (point C_1) apparaît un nouveau lieu central LC_v compatible à G , *plus* légitime sémiologiquement et d'autorité "négative", c'est-à-dire libéral et permissif. Mais tant que G reste dans le cadran positif LC_v demeure *virtuel* (utopique). En revanche lorsque G franchit le point C_2 de l'axe S et passe dans le cadran de l'autorité négative (contestation de l'autorité et refus d'en assurer le relai et la reproduction à l'intérieur du "tissu" social), LC perd son adéquation à G au profit de son symétrique LC' . G et LC rentrent donc *en conflit* (apparition d'une bimodalisation), conflit qui se solde par un changement de régime sur le mode d'une libéralisation de LC en LC' . En fait comme le primat du politique sur l'autorité demande toujours un certain délai, la bifurcation se produira en un point C situé entre C_2 et C_3 et correspondra à un nouveau lieu central LC'' maximale

libéral mais sémiologiquement *moins* légitime que LC. A partir de là G évolue sur la normale $N_{LC''}$ et sort de K.

Mais un excès de libéralisme étant tout aussi impopulaire qu'un excès d'autorité, G, par un processus inverse, va entrer à nouveau dans K et induire un nouveau lieu central autoritaire LC_1 . On modélise ainsi une première chréode socio-politique, celle de l'alternance à l'intérieur d'un consensus sémiologique (d'un système de valeurs) entre un pouvoir fort et un pouvoir permissif. Mais cette oscillation qui a pour fonction de pallier l'usure du pouvoir a pour conséquence une *érosion* de la légitimité sémiologique.

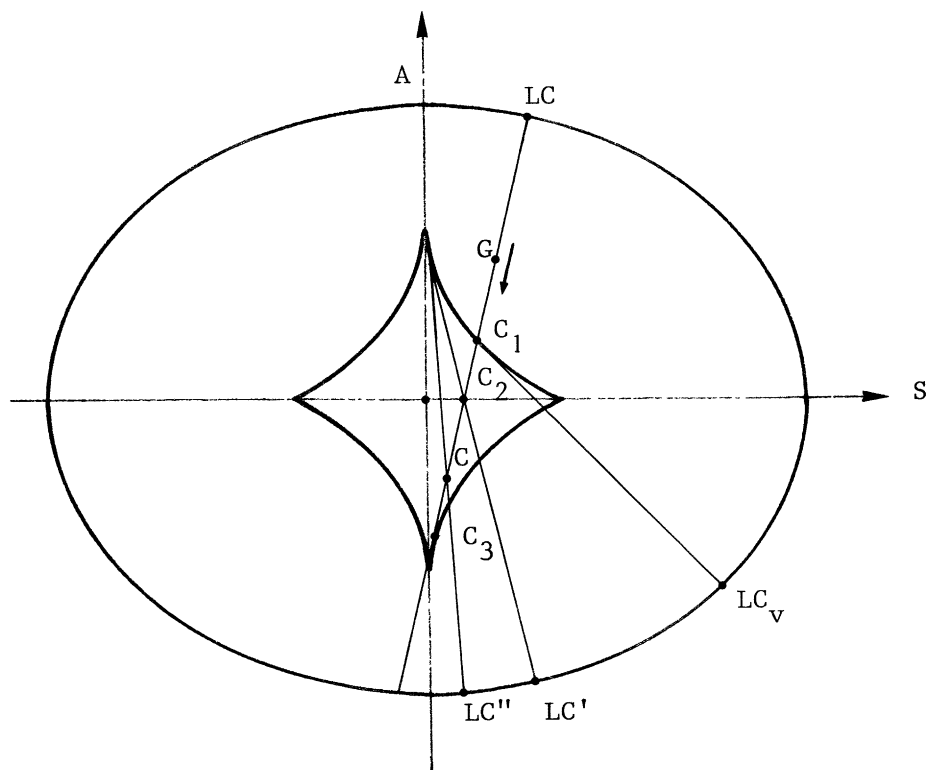
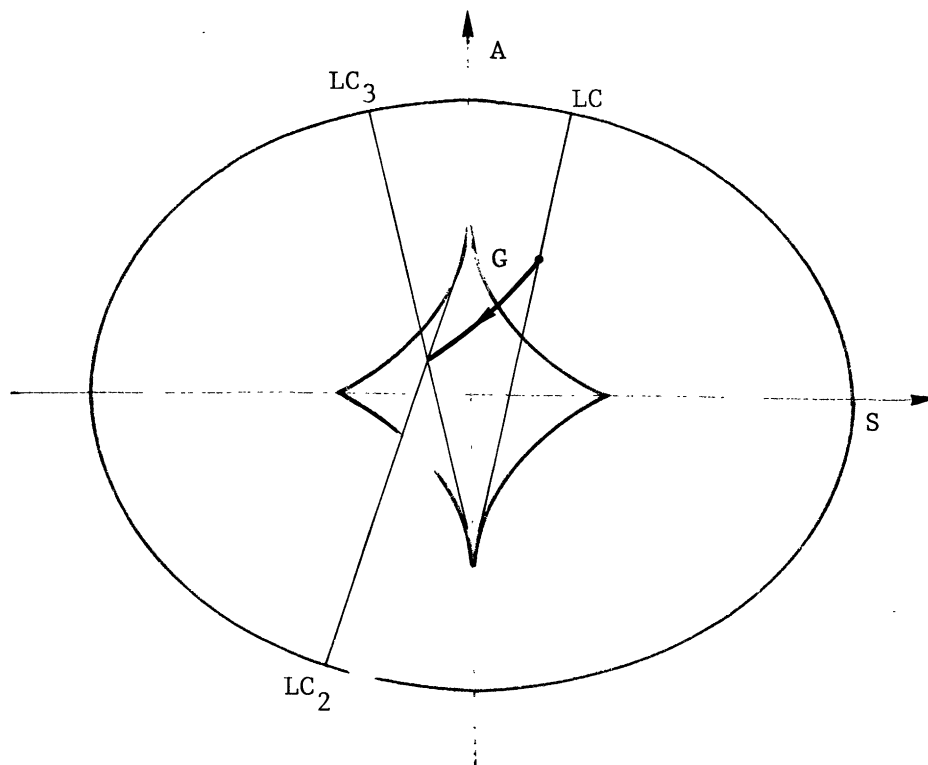


Figure 11.

4.2. Ce processus d'érosion peut s'amplifier d'une façon telle que G franchisse brutalement l'axe A et passe dans le cadran du pouvoir sémiologique négatif. C'est à ce franchissement catastrophique clivant le "corps social" que Thom et Pomian assimilent la rupture révolutionnaire. Celle-ci serait donc d'abord due à une désupposition *sémiologique* du régime au profit d'un référent idéal (LC_2) qui - dans l'isotopie du paradigme de légitimité initial - n'est défini que *négativement* (la liberté comme transgression).



A partir de cette rupture rendant *vacant* le pouvoir, trois développements historiques peuvent s'engendrer :

- i) Soit (et cela n'est pas inscriptible dans ce modèle élémentaire) il y a changement réel de paradigme et stabilisation dans une nouvelle isotopie du nouveau lieu central LC_2 ;
- ii) Soit par un processus inverse à celui conduisant de LC à LC'' , l'exigence d'autorité transforme la révolution en dictature (LC_3), la dictature (autorité illégitime) étant la conséquence d'un échec sémiologique de la révolution au départ légitime par négation et la restauration un effet inéluctable de reterritorialisation de la légitimité initiale ;
- iii) Soit la vacance du pouvoir déporte les groupes cratiques vers L : contre-révolution et clivage du "corps social" (guerre civile).

4.3. Le modèle qui précède est *global* et procède du niveau psychologique au niveau politique. On peut le compléter par un modèle *local* (de type modèle de l'agression de Zeeman) procédant inversement du niveau politique au niveau psychologique. Il s'agit d'un modèle d'archétype cusp, de facteur normal l'autorité et de facteur de splittage un facteur psychologique de tension

gratification/frustration (1). Le corps social y est représenté par un nuage sur la surface fronce.

Lorsqu'une partie du demos franchit une des branches du cusp, cette chute brutale d'adhésion clive le "corps social" et engendre un cycle de Zeeman révolution-dictature-restauration.

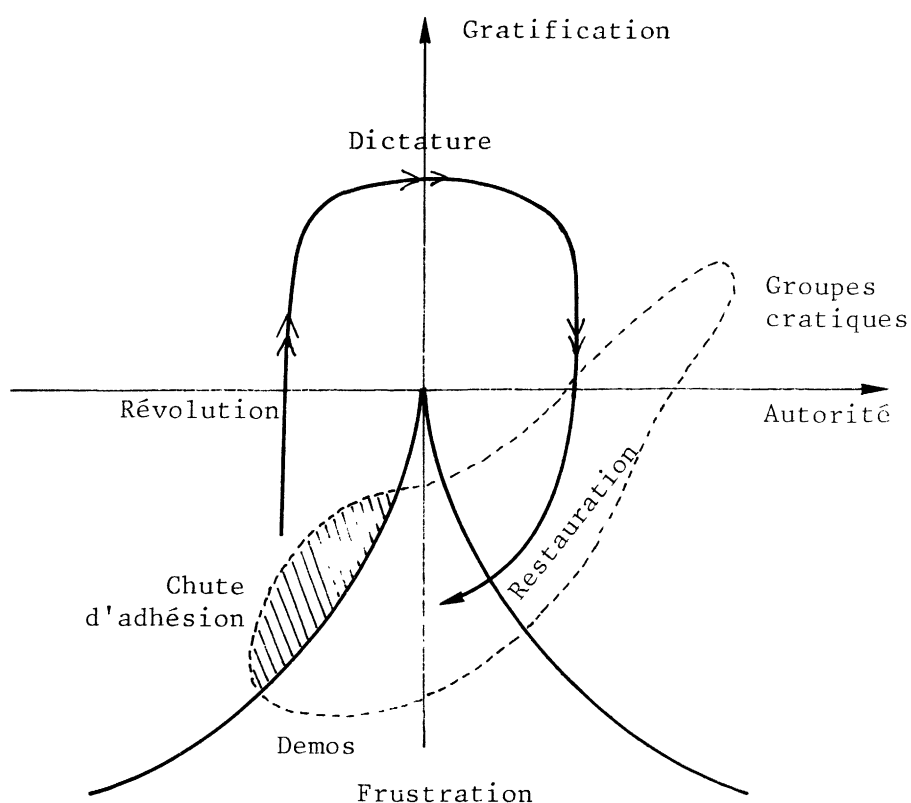


Figure 13.

Un modèle local du même ordre a été utilisé dernièrement par Colin Renfrew pour expliquer par des causes *endogènes* et non exogènes (de type cataclysme ou invasion) la désagrégation de sociétés hautement civilisées et leur dispersion en groupes peu intégrés socio-politiquement. La variable interne est un degré de centralisation, le facteur normal l'exigence que la collectivité fait peser sur les producteurs (paysans)

(1) On remarquera que ces facteurs sont hétérogènes le premier étant plus "objectif" que le second. Cela fait que ce modèle local est plus vague que le modèle global.

et le facteur de splitting un facteur d'adhésion à une autorité charismatique. Les cycles de Zeeman décrivent alors l'alternance entre une modalité centrée et une modalité acentrée, celles-ci constituant bien une bimodalité dans la mesure où elles peuvent coexister sur le même territoire.

Renfrew introduit même sur cette base la catastrophe papillon pour rendre compte de l'état d'intégration intermédiaire des chefferies (le troisième facteur de contrôle étant celui de la parenté).

4.4. Pour tenter brièvement en conclusion de cerner d'abord les limites, ensuite l'intérêt, enfin le statut du modèle heuristique de Thom-Pomian, l'on peut faire les remarques suivantes :

i) Ses limites sont assez évidentes. Elles sont dues à son aspect élémentaire (par exemple à la non prise en compte des infrastructures économiques), à la question laissée ouverte du choix des instances de pouvoir comme espace sémantique de base, à l'introduction ad hoc d'un infléchissement de l'évolution de G , etc. Mais, étant donnée la façon dont il est élaboré, on peut faire l'hypothèse que ces limites sont inscriptibles *dans le modèle lui-même* à condition de le raffiner.

ii) Quant à l'intérêt il est non moins évident. Ce modèle montre en effet comment, une fois choisi l'espace sémantique de base, un modèle catastrophique - en tant qu'analogie (non sémantique) *maîtrisée* - permet de *géométriser* un corpus de concepts (cf.1.3.) sans se borner au simple redoublement d'une description en langue naturelle. On aura en effet remarqué comment une constellation de notions de niveaux différents et faisant partie d'un même lexique disciplinaire s'est trouvée traduite de façon naturelle et par là même passer de la simple signification à l'intelligibilité.

iii) Quant au statut épistémologique il pose une question plus délicate. Peut-être est-il abordable à partir de la remarque suivante. On peut se demander si l'histoire (ainsi d'ailleurs que les sciences humaines dans leur ensemble) ne fait pas partie des sciences *dont l'objectivité se réduit à la description*. Or dans le champ de notre rationalité il existe un *conflit irréductible* entre objectivité et description conceptuelle. La résolution de ce conflit (à laquelle la crise de la légitimité scientifique confère une certaine urgence) exige de réaliser *effectivement* l'opération phénoménologique bien précise qui consiste à dégager derrière l'écran du langage une *objectivité structurale* qui ne se réduise ni au cadre spatio-temporel constituant l'objet d'expérience, ni à l'abstraction "systémique".

Dans la mesure où une telle effectuation fait défaut on se trouve

contraint à errer de façon plus ou moins plausible dans le champ plus ou moins intégré des trois stratégies suivantes :

- i) l'analyse statistique des archives ;
- ii) la reconduction des phénomènes à une cause matérielle qui en est *disjointe* (autre scène infrastructurelle) ;
- iii) l'analyse et/ou la simulation structurale logico-combinatoire (informationnelle, cybernétique, etc...).

Mais aucune de ces trois stratégies ne suffit à dégager une *objectivité* (et donc une causalité) *structurale*. La première parce que, comme fait, un événement n'est pas objectif (il n'est pas constitué comme tel à partir d'a priori apodictiques). La seconde parce que la cause matérielle supposée reste non falsifiable tant qu'elle n'est pas *formellement* lisible dans la structure. La troisième pour la raison duale qu'elle ne peut remonter d'elle-même à une cause matérielle.

Dans ce contexte, la T.C. ouvre à une nouvelle stratégie *complémentaire* et authentiquement structurale, *constituant la description en objectivité*. Mais elle paye son frayage d'abord par une complexité mathématique qui devient vite redoutable, ensuite par une certaine difficulté à maîtriser les analogies qu'elle manipule et à éviter leur chute dans une herméneutique "géométrique" imaginaire.

BIBLIOGRAPHIE

- T. POSTON and I. STEWART, *Taylor expansions and catastrophes*, London and San Francisco, Pitman, 1976.
- R. THOM, "Espace, science et magie", *Circé*, n°8-9, Ed. Lettres Modernes, 1978.
- R. THOM, A. CULIOLI et al., "Entretien sur les catastrophes", *Ornicar ?*, 1978.
- E.C. ZEEMAN, "Levels of structure in catastrophe theory", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver, 1974.