Mathématiques et sciences humaines

Yves Balasko

Économie et théorie des catastrophes

Mathématiques et sciences humaines, tome 64 (1978), p. 27-42

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__64__27_0>

Math. Sci. hum. (16^{e} année, n°64, *1978*, p.27-42)

ÉCONOMIE ET THÉORIE DES CATASTROPHES

Yves BALASKO*

Les hypothèses de différentiabilité jouent un rôle essentiel dans plusieurs travaux récents consacrés à l'étude des propriétés de l'équilibre économique. Cet article présente une synthèse aussi élémentaire que possible d'une partie de ces travaux et fait aussi le lien avec la théorie des catastrophes de Thom.

1. INTRODUCTION

Selon** Zeeman [22], la théorie des catastrophes utilise les propriétés des singularités d'applications différentiables pour modéliser la nature. Ainsi, outre un exposé mathématique des principaux aspects de la théorie des catastrophes, on trouve dans le livre de Thom [20] plusieurs exemples d'applications à la morphogénèse et à la linguistique. L'idée sous-jacente à ces applications de la théorie des catastrophes est que lorsque les phénomènes naturels observés sont interprétables sous la forme de singularités de certains processus, on peut alors déduire du théorème de classification des catastrophes élémentaires de Thom (pour une démonstration complète voir Zeeman [23]) un modèle de la nature défini à équivalence topologique près. Cette méthode est particulièrement intéressante lorsqu'il s'agit d'un phénomène naturel dont la complexité est trop grande pour être accessible aux modèles explicites ordinaires mais dont la description sous forme de singularités est aisée.

---

* Ecole Normale Supérieure, Université Paris XII

** Je remercie Monsieur le Professeur Edmond Malinvaud d'avoir autorisé la reproduction de cet article paru dans le n°19 des *Cahiers du Séminaire d'Econométrie*.

Notre intérêt se porte ici vers l'étude des propriétés du marché, étude pour laquelle nous disposons d'un modèle formalisé qui remonte dans sa forme actuelle à Walras [21]. Ce modèle représente l'aboutissement des réflexions de plusieurs générations d'économistes et sa pertinence, pour ce qui est de la description de l'échange, est largement admise (cf. Schumpeter [16] et Blaug [6]). D'autre part, contrairement à ce qui se passe dans les domaines où la théorie des catastrophes a jusqu'ici été appliquée, l'interprétation des phénomènes observés en économie est souvent fort délicate et ne vouloir voir en eux que des singularités est hasardeux. Par conséquent, c'est en restant dans le cadre de la théorie de l'équilibre que nous allons mettre en évidence une application différentiable dont les singularités seront interprétables, par analogie avec le modèle de Thom, comme des catastrophes dont la signification économique permettra d'enrichir, par de nouveaux résultats, la théorie classique de l'équilibre.

L'introduction du point de vue différentiel pour l'étude des propriétés de l'équilibre économique remonte à l'article fondamental de Debreu [8]. On trouvera un exposé particulièrement clair de cette approche dans Debreu [10], ainsi qu'une introduction intuitive aux principaux concepts mathématiques qui sont utilisés dans ces applications de la topologie différentielle. Il est fortement recommandé au lecteur peu familier avec ce type de mathématiques de commencer par lire l'article de Debreu avant d'aborder celui-ci.

2. LE MODELE DE L'EQUILIBRE

Nous allons limiter le problème à l'étude d'un marché, c'est-à-dire à l'étude des phénomènes que l'on observe quand des agents économiques se regroupent pour prendre des décisions d'achat ou de vente au vu d'un système de prix. L'intérêt de ce problème est évident dès qu'une partie de l'allocation des ressources est assurée par l'intermédiaire de marchés, c'est-à-dire par des décisions décentralisées prises au vu de systèmes de prix.

Nous formalisons le marché par une économie d'échanges purs où il y a ℓ biens et m consommateurs (voir par exemple Malinvaud [13]). Un vecteur $x \in \mathbf{R}^{\ell}$ représente un complexe de biens, une quantité positive x^{i} du bien i représente un avoir du bien i tandis qu'une quantité négative est une dette. Le vecteur prix p est un élément du simplexe strictement positif S de $\mathbf{R}^{\ell}$, i.e. $\Sigma p_i = 1$ et $p_i > 0$. La valeur d'un complexe de biens x pour le vecteur prix p est le produit scalaire $w = p.x$.

Le consommateur i est défini par la donnée d'une fonction de demande de classe C^{∞} notée $f_i : S \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\ell}$ qui vérifie la relation de Walras

(W) : $p \cdot f_i(p\,,\,w_i) = w_i$ pour tout couple $(p\,,\,w_i) \in S \times \mathbf{R}$. Avec cette définition l'ensemble de consommation est $\mathbf{R}^\ell$ tout entier, hypothèse technique dont il est possible de s'affranchir au prix de quelques complications inutiles dans un exposé introductif.

Notons $\Omega = (\mathbf{R}^\ell)^m$. Un élément $\omega \in \Omega$ est donc un m-uple $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ où ω_i représente un complexe de biens alloués à l'agent i. Quand les ω_i représentent les ressources des agents avant que le marché ne se mette à fonctionner, nous dirons que ω est le m-uple des ressources initales. Tous les couples $(p\,,\,\omega) \in S \times \Omega$ ne présentent pas le même intérêt. En effet, le vecteur ω_i représentant les ressources initiales de l'agent i, sa richesse est alors égale à $w_i = p\,.\,\omega_i$ et sa demande est donc égale à $f_i(p\,,\,w_i) = f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i)$. La demande totale dans les ℓ biens est $\Sigma f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i)$, qu'il faut comparer à la quantité disponible de tous ces biens égale à $\Sigma\,\omega_i$. Pour qu'il n'y ait pas excédent d'un bien ni insuffisance d'un autre, c'est-à-dire pour qu'il y ait équilibre, il faut donc que :

$$\Sigma f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i) = \Sigma\,\omega_i$$

***Définition 1** : Le couple* $(p\,,\,\omega) \in S \times \Omega$ *est un équilibre si*

$$\Sigma f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i) = \Sigma\,\omega_i\,.$$

Soit E *l'ensemble des équilibres ; la projection de Debreu* $\tilde{\pi} : E \to \Omega$ *est la restriction à* E *de la projection canonique* $\pi : S \times \Omega \to \Omega$.

Si $(p\,,\,\omega)$ *est un équilibre, on dit alors que p est un vecteur prix d'équilibre associé au m-uple des ressources initiales* ω.

L'objectif de la théorie de l'équilibre est l'étude des vecteurs prix d'équilibre en fonction des ressources initiales, des préférences des agents, du nombre de biens, d'agents, etc. Nous allons nous restreindre ici aux variations des ressources initiales. Ceci a l'avantage de simplifier les mathématiques. C'est en outre économiquement justifié par le fait que c'est le paramètre ressources initiales qui varie le plus vite. Enfin, les résultats obtenus dans ce cas limité s'étendent facilement aux cas plus généraux.

Par conséquent, tous les autres paramètres du modèle décrivant le marché (biens, préférences, etc.) sont fixés de sorte que le m-uple de ressources initiales ω est souvent appelé une économie.

On dit qu'il y a catastrophe quand des variations infinitésimales du paramètre ressources initiales ω se traduisent par des discontinuités finies (i.e. non infinitésimales) du vecteur prix d'équilibre.

La théorie de l'équilibre se réduit à l'étude de la projection de Debreu $\tilde{\pi} : E \to \Omega$ pour laquelle la façon naturelle de procéder est l'étude de l'ensemble origine E, de l'ensemble image Ω et enfin de l'application $\tilde{\pi}$ en tant qu'application de E fixé dans Ω fixé. Il n'y a rien à dire de Ω égal à $(\mathbf{R}^\ell)^m$ par définition, ce qui limite l'étude à E et à $\tilde{\pi}$.

3. LA VARIETE DES EQUILIBRES

Théorème 1 : L'ensemble des équilibres est une variété différentielle de dimension $m\ell$ (Delbaen [7], Balasko [3]).

Ce résultat montre que l'ensemble des équilibre E a localement la structure d'espace euclidien de $\mathbf{R}^{\ell m}$. Il en résulte que la projection de Debreu $\widetilde{\pi} : E \to \Omega$ est une application différentielle de classe C^∞, dont l'étude est beaucoup plus aisée que celle d'une application qui ne serait par exemple que continue. En outre, cette propriété de différentiabilité de $\widetilde{\pi}$ justifie l'utilisation locale d'approximations linéaires dans les problèmes concrets.

La structure locale n'est pas la seule à présenter un intérêt économique. En effet, soient $(p\,,\,\omega)$ et (p',ω') deux équilibres distincts ; si la statique comparative se limite à la comparaison de ces deux équilibres, il est néanmoins important de connaître l'ensemble des cheminements équilibrés (i.e. dans E) permettant de passer de la situation $(p\,,\,\omega)$ à la situation (p',ω'). La question mathématique ainsi posée est celle de la connexité de la variété des équilibres E.

Théorème 2 : La variété des équilibres est difféomorphe à $\mathbf{R}^{\ell m}$. (Balasko [3]).

Nous allons donner ici une démonstration de ce résultat valable uniquement pour $\Omega = (\mathbf{R}^\ell)^m$.

Soit $\phi_1 : S \times \mathbf{R}^{\ell m} \to S \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^\ell)^{m-1}$ l'application

$$\phi_1 : (p\,,\,\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_m) \mapsto (p\,,\,w_1 = p\,.\,\omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\ldots\,,\,\omega_m)$$

et soit $\psi : S \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^\ell)^{m-1} \to S \times \mathbf{R}^{\ell m}$ l'application

$$\psi : (p\,,\,w_1\,,\,\omega_2\,,\,\ldots\,,\,\omega_m) \mapsto (p\,,\,f_1(p\,,\,w_1) + f_2(p\,,\,p\,.\,\omega_2) + \cdots + f_m(p\,,\,p\,.\,\omega_m) - \omega_2 - \cdots - \omega_m\,,\,\omega_2\,,\,\ldots\,,\,\omega_m)\,.$$

Soit $\widetilde{\phi}_1$ la restriction de ϕ_1 à E. Il est immédiat que $\psi \circ \widetilde{\phi}_1 = \mathrm{id}_E$, que $\mathrm{Im}\,\psi$ est contenu dans E et que la composée $\widetilde{\phi}_1 \circ \psi$ qui a alors un sens est égale à l'identité de $S \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^\ell)^{m-1}$. Par conséquent, E est difféomorphe à $S \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^\ell)^{m-1}$ qui est difféomorphe à $(\mathbf{R}^\ell)^{m-1}$ puisque S, simplexe strictement positif de $\mathbf{R}^\ell$, est difféomorphe à $\mathbf{R}^{\ell-1}$.

Pour une extension de ce résultat au cas d'ensembles de consommation plus généraux, voir Balasko [3] et Schecter [15].

La structure globale de la variété des équilibres E est si simple que cette variété ne peut être à l'origine de catastrophes qui ne seraient pas des singularités de la projection de Debreu. L'effort principal doit donc porter sur l'application $\widetilde{\pi}$ dont l'étude nécessite des hypothèses supplémentaires sur le comportement des consommateurs, c'est-à-dire sur les fonctions de demande f_i.

4. LES ECONOMIES REGULIERES

Nous commencerons par faire une hypothèse d'insatiabilité des consommateurs :

Soit (p^n) *une suite de vecteurs prix appartenant à* S *et ayant pour limite* $p^\circ \in \partial S$ *; alors, pour tout* $w_i \in \mathbf{R}$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Sigma f_i(p^n, w_i)\| = +\infty .$$

Dire que $(p^n) \to p^\circ \in \partial S$ signifie que le prix d'au moins un des biens tend vers zéro. L'hypothèse faite sera donc vérifiée si la demande totale pour ce bien tend vers l'infini.

La projection de Debreu $\widetilde{\pi} : E \to \Omega$ est alors une application propre, c'est-à-dire telle que l'image inverse de tout compact est un compact. Il existe d'ailleurs des formulations alternatives plus ou moins générales de la propriété d'insatiabilité qui impliquent toutes la propreté de $\widetilde{\pi}$ (voir par exemple Balasko [3]).

On dit que $x = (p, \omega) \in E$ est un équilibre critique si x est un point critique de $\widetilde{\pi}$, c'est-à-dire un point où le rang de l'application linéaire tangente $T_x(\widetilde{\pi})$ n'est pas égal à ℓm. C'est donc un point où le déterminant jacobien de $\widetilde{\pi}$ calculé pour une carte de E (par exemple l'espace $S \times \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^\ell)^{m-1}$ du théorème 2) s'annule : l'ensemble des équilibres critiques est défini par l'annulation d'une fonction continue et est donc un fermé de E.

Un m-uple de ressources initiales $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in (\mathbf{R}^\ell)^m$ est une valeur singulière de $\widetilde{\pi}$ si c'est l'image d'un équilibre critique. Par définition, le complémentaire de l'ensemble Σ des valeurs singulières est l'ensemble R des valeurs régulières.

Définition 2 *: On dit qu'une économie* ω *est une économie régulière (resp. singulière) si c'est une valeur régulière (resp. singulière) de la projection de Debreu.*

Théorème 3 *: L'ensemble des économies régulières* $\mathcal{R}$ *est un ouvert dense de* Ω*. Le nombre d'équilibres est fini et constant au-dessus de chacune des composantes connexes de* R. (Debreu [8]).

L'ensemble des valeurs singulières Σ est l'image d'un fermé par l'application propre $\widetilde{\pi}$, donc Σ est fermé et son complémentaire $\mathcal{R}$ est ouvert. En outre, Σ est de mesure nulle d'après le théorème de Sard (Milnor [14]), donc $\mathcal{R}$ est en particulier dense. L'application $\widetilde{\pi}$ restreinte à $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathrm{R})$ est un difféomorphisme local propre. C'est donc un revêtement de $\mathcal{R}$ à un nombre fini de feuillets, (Milnor [14]) ou Dieudonné [12], section 16). Plus concrètement, cela implique que $\tilde{\pi}^{-1}(\omega)$ est un ensemble fini pour tout ω dans $\mathcal{R}$ et que le nombre d'équilibres est une fonction localement constante sur $\mathcal{R}$. En particulier, le nombre d'équilibres au-dessus de chacune des composantes connexes de l'ensemble des économies régulières $\mathcal{R}$ est constant.

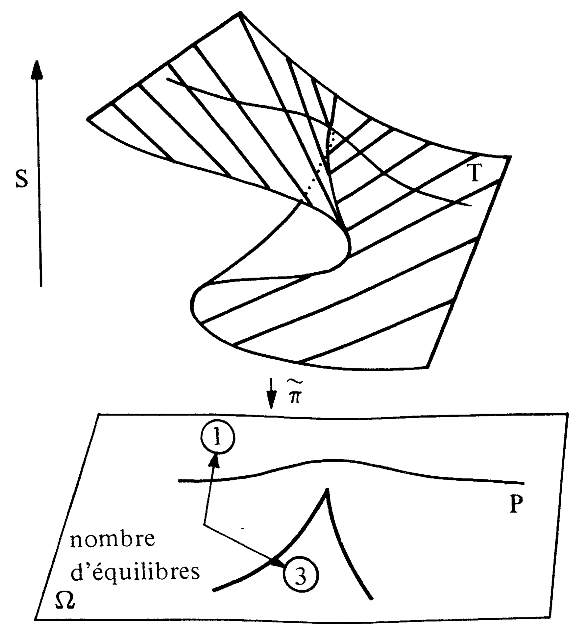

Figure 1

5. LE NOMBRE DES EQUILIBRES

Les résultats précédents sont valables dans un cadre très général puisque très peu d'hypothèses spécifiques sur le comportement des consommateurs ont été nécessaires. Cependant, si le théorème 3 montre qu'une économie régulière n'admet qu'un nombre fini de vecteurs prix d'équilibre, ce nombre peut être nul. En outre, rien n'est dit sur les composantes connexes des économies régulières au-dessus desquelles il n'y a qu'un équilibre. Pour pouvoir compter les équilibres, il paraît souhaitable d'introduire des propriétés des fonctions de demande individuelle dont le contenu économique soit plus substanciel que la seule relation de Walras.

***Définition 3** : On dit que l'agent i est un consommateur rationnel s'il existe une fonction numérique u_i définie sur $\mathbf{R}^\ell$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) u_i est de classe C^∞ ;

(b) u_i est croissante (i.e. $u_i(x + y) > u_i(x)$ si $y \geqslant 0$ coordonnée par coordonnée avec $y \neq 0$) ;

(c) $u_i^{-1}([c, +\infty[)$ est convexe pour tout $c \in \mathbf{R}$;

(d) $u_i^{-1}([c, +\infty[)$ est borné inférieurement pour tout $c \in \mathbf{R}$;

(e) les hypersurfaces $u_i^{-1}(c)$ ont partout une courbure gaussienne $\neq 0$.

En outre, la fonction de demande f_i : $S \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^\ell$ est telle que $f_i(p, w_i)$ soit la solution du problème "max $u_i(x)$ sous la contrainte $p \cdot x \leqslant w_i$".

Les propriétés (a) et (e) sont légèrement plus fortes que la stricte quasi-concavité. L'hypothèse (d) est destinée à compenser le fait de considérer un ensemble de consommation non borné inférieurement.

Notons que les propriétés (a), (b), (c) et (e) impliquent que la fonction de demande f_i est de classe C^∞. Voir par exemple Debreu [9].

On définit alors deux propriétés des fonctions de demande, l'une globale :

$$(G) : \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i(p, w_i) \neq f_i(p', w_i') \\ p \cdot f_i(p', w_i') \leqslant w_i \end{array} \right\} \Rightarrow p' \cdot f_i(p, w_i) > w_i'$$

l'autre locale notée (L). Pour définir (L), nous avons besoin de considérer des dérivées partielles par rapport aux différentes coordonnées p_i du vecteur prix p. Compte tenu de la relation $\Sigma p_i = 1$, il est commode d'introduire des fonctions de demande homogènes de degré zéro $\widetilde{f}_i(p, w_i)$ telles que

$$\widetilde{f}_i(\lambda p, \lambda w_i) = f_i(p, w_i)$$

avec λ réel $\neq 0$.

Pour être en conformité avec la plupart des notations usuelles, notons les coordonnées représentant les différents biens en exposant, alors que les coordonnées représentant les prix des différents biens sont en indice.

Soit

$$m_{kj}^i(p, w_i) = \frac{\partial \widetilde{f}_i^k(p, w_i)}{\partial p_j} + \widetilde{f}_i^j(p, w_i) \frac{\partial \widetilde{f}_i^k}{\partial w_i}(p, w_i) .$$

Soit $M_{\ell,\ell}^i$ la matrice carrée des (m_{kj}^i) où $1 \leqslant k \leqslant \ell - 1$ et $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$. On peut alors définir (L) :

(L) : *la matrice $M_{\ell,\ell}^i$ est symétrique définie négative.*

Théorème 3 : Les propriétés (L) *et* (G) *sont vérifiées pour tout consommateur rationnel.*

La propriété (G) a été mise en évidence par Samuelson. Pour une démonstration, voir par exemple Arrow-Hahn [1] page 101. La propriété (L) est utilisée depuis Slutsky [17].

Pour pouvoir donner une signification économique aux différentes composantes connexes de l'ensemble R des économies régulières, il est nécessaire d'introduire des points de Ω ou de E ayant une signification économique privilégiée.

Définition 4 : On dit que $(p\,,\,\omega) \in \mathrm{E}$ *est un équilibre sans transaction si* $\omega_i = f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i)$ *pour tout* i. *On note* T *l'ensemble des équilibres sans transaction.*

Autrement dit, dans un équilibre sans transaction, le vecteur prix est tel qu'aucun agent économique ne procède à des échanges.

Lemme 1 : L'ensemble T *des équilibres sans transaction est difféomorphe à* $\mathrm{S} \times \mathbf{R}^m$.

En effet, soit $\mathrm{B} = \mathrm{S} \times \mathbf{R}^m$ l'ensemble des prix-revenus. L'application de B dans T définie par

$$(p\,,\,w_1\,,\,w_2\,,\,\ldots\,,\,w_m) \mapsto (p\,,\,f_1(p\,,\,w_1)\,,\,\ldots\,,\,f_m(p\,,\,w_m))$$

et l'application de T dans B définie par

$$(p\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\ldots\,,\,\omega_m) \mapsto (p\,,\,w_1 = p\,.\,\omega_1\,,\,\ldots\,,\,w_m = p\,.\,\omega_m)$$

sont les difféomorphismes cherchés.

Rappelons que le m-uple $\omega = (\omega_1\,,\,\ldots\,,\,\omega_m) \in \Omega$ est un optimum de Pareto s'il n'existe pas de m-uple $\omega' \in \Omega$ tel que :

$$\begin{cases} \Sigma\,\omega_i = \Sigma\,\omega'_i \\ u_i(\omega'_i) \geqslant u_i(\omega_i) \text{ avec inégalité stricte pour au moins un } i. \end{cases}$$

Soit P le sous-ensemble de Ω formé des optimums de Pareto. On a alors le lemme :

Lemme 2 : L'égalité $\widetilde{\pi}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}$ *est vérifiée.*

En effet, si $\omega \in \mathrm{P}$, alors il existe un vecteur prix unique $p \in \mathrm{S}$ supportant l'optimum de Pareto, i.e. tel que $\omega_i = f_i(p\,,\,p\,.\,\omega_i)$ donc $(p\,,\,\omega)$ appartient à T. Vice versa, si $(p\,,\,\omega)$ est un équilibre sans transaction, alors ω est l'allocation d'équilibre associée au vecteur prix $p \in \mathrm{S}$ et à la distribution des richesses $w_i = p\,.\,\omega_i$; c'est donc un optimum de Pareto.

Théorème 4 *: L'ensemble* P *des optimums de Pareto est contenu dans une composante connexe de* R. *Il n'y a qu'un équilibre au-dessus de tout point de cette composante connexe* (Balasko [3]).

On montre d'abord que T ne contient aucun équilibre critique : pour cela, il suffit de calculer le déterminant Jacobien de l'application tangente $T_x(\widetilde{\pi})$ à $\widetilde{\pi}$ calculé en $x \in T$; par des calculs de déterminants, on se ramène au déterminant d'une matrice carrée symétrique M qui est la somme des matrices $M^i_{\ell\ell}$ qui sont définies négatives, donc M est définie négative et $\det M \neq 0$. Pour montrer que P ne contient aucune économie singulière, il suffit alors de vérifier que $\widetilde{\pi}^{-1}(\omega)$ ne contient qu'un élément pour tout $\omega \in P$, résultat prouvé par Arrow-Hurwicz [2] à partir de (G). On trouvera des démonstrations différentes dans Balasko [5] et dans Smale [18]. La démonstration du théorème 4 par Smale est basée sur des propriétés de transversalité qui permettent d'éviter les calculs de déterminants.

Corollaire 1 *: Le nombre de vecteurs prix d'équilibre associés à toute économie régulière* $\omega \in R$ *est impair et il existe toujours au moins un vecteur prix d'équilibre associé à toute économie* $\omega \in \Omega$. (Dierker [11]).

Ces résultats sont une conséquence immédiate du concept de degré d'une application différentiable propre (Milnor [14]). Soit ω une valeur régulière de $\widetilde{\pi}$; on montre que Card $\widetilde{\pi}^{-1}(\omega)$ modulo 2, i.e. la parité de Card $\widetilde{\pi}^{-1}(\omega)$, ne dépend pas du choix de la valeur régulière $\omega \in R$; on dit que c'est le degré (mod 2) de $\widetilde{\pi}$.

Calculons $\deg_2(\widetilde{\pi})$ en un point $\omega \in P$. On a Card $\widetilde{\pi}^{-1}(\omega) = 1$, donc $\deg_2(\widetilde{\pi}) = 1$ et le nombre d'équilibres associés à tout $\omega \in R$ est impair, en particulier différent de zéro.

Il résulte du théorème 4 qu'il ne peut apparaître de catastrophe quand le m-uple des ressources initiales ω se déplace dans la composante connexe U des économies régulières contenant l'ensemble des optimums de Pareto P. Il est donc intéressant d'avoir des indications sur la taille de cette composante U. Ainsi, on montre que plus les préférences des consommateurs sont voisines et proches de vérifier les conditions d'agrégation parfaite, plus la taille de cette composante est grande (Balasko [3]).

Une autre conséquence du théorème 4 est que les situations d'équilibres multiples se produisent pour des vecteurs d'échanges

$$(\omega_1 - f_1(p\,.\,p\,.\,\omega_1)\,,\,\ldots\,,\,\omega_m - f_m(p\,.\,p\,.\,\omega_m))$$

assez grands et qu'elles sont alors la règle.

6. LA THEORIE DES ENVELOPPES

On peut résumer les résultats obtenus jusqu'à présent en disant que du point de vue d'une statique comparative qualitative se limitant à l'étude des seules discontinuités des prix d'équilibre en fonction des ressources initiales, on constate que les prix d'équilibre ne varient pas (i.e. ne sautent pas) quand les ressources initiales se déplacent en restant dans la même composante connexe de l'ensemble des économies régulières. Développer cette statique comparative qualitative nécessite une étude des singularités de la projection de Debreu. Néanmoins, vouloir étudier toutes les singularités possibles conduit à un problème d'une complexité formidable dont une solution complète semble pour le moment hors d'atteinte dans le cadre différentiable. Il n'est d'ailleurs pas sûr que là soit le bon problème. En effet, toutes les singularités ne présentent pas le même intérêt pratique. Ainsi, certaines singularités sont observées beaucoup plus couramment que d'autres et sont donc plus intéressantes. Enfin, beaucoup de singularités sont exceptionnelles en ce sens que, s'il arrive qu'on puisse les observer, des modifications infinitésimales des conditions ambiantes les font disparaître : ce sont des singularités qu'on a envie d'appeler instables, le problème intéressant étant alors celui de l'étude des seules singularités stables. Qualifier ce concept au moyen de l'adjectif stable peut prêter à confusion vu les significations déjà nombreuses du terme stabilité. Aussi préfère-t-on en général utiliser l'adjectif générique quand il s'agit de stabilité au sens précédent : une propriété, en particulier une singularité, est générique si elle ne disparaît pas par une modification arbitrairement petite des conditions ambiantes, définition à laquelle il est aisé de donner un tour mathématique rigoureux.

L'étude des singularités génériques de la projection de Debreu nécessite donc l'explicitation des paramètres du modèle utilisé, c'est-à-dire la définition de la théorie mathématique dans laquelle se posent les questions de généricité. En fait, le cadre naturel pour l'étude de la projection de Debreu d'un point de vue différentiel est la théorie des enveloppes de Thom [19] qui généralise à la fois la théorie usuelle des enveloppes de courbes planes à un paramètre et la théorie mathématique des catastrophes. Cette approche développée dans Balasko [4] et Balasko [5] est relativement technique. Cependant, il est possible de donner une idée de la méthode suivie et des résultats dans le cas le plus simple, celui de $(\ell, m) = (2, 2)$ (i.e. deux biens et deux agents) où la méthode de la boîte d'Edgeworth permet une présentation géométrique élémentaire.

L'ensemble des optimums de Pareto C est formé des points de contact des courbes d'indifférence des deux agents. C'est une courbe connexe et on associe à chaque point de cette courbe la tangente commune aux deux courbes d'indifférence passant par ce point. Ceci définit une famille à un paramètre de droites du plan.

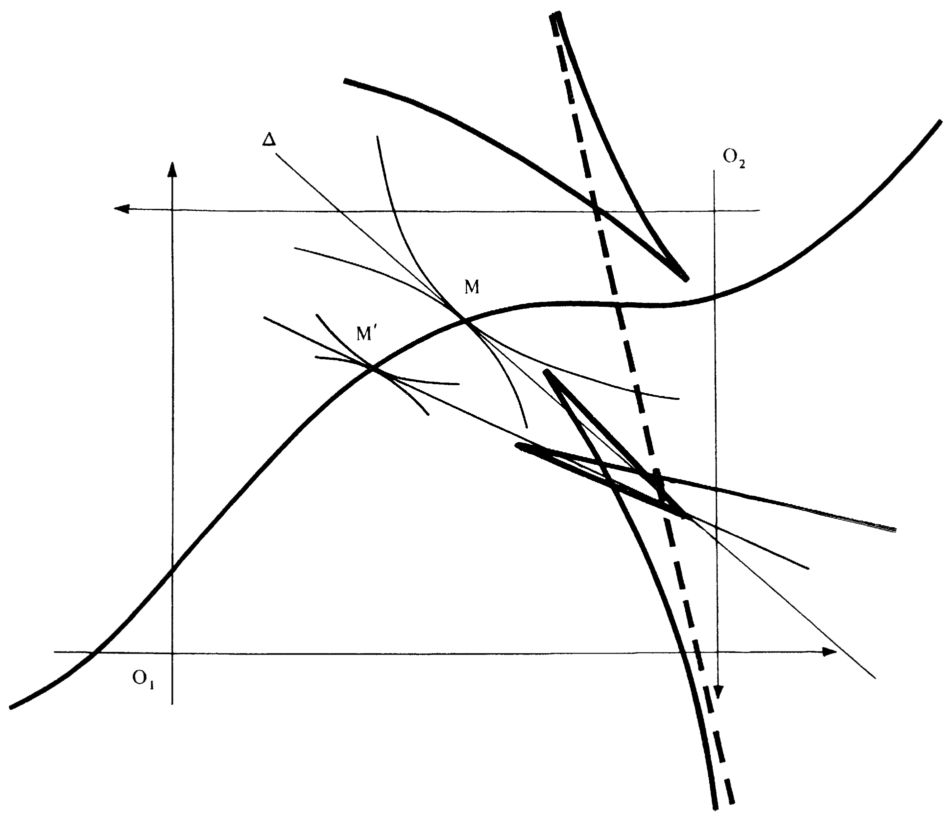

Figure 2

On a alors le résultat suivant.

***Théorème** 5 : Pour* $(\ell, m) = (2, 2)$, *l'ensemble des économies singulières* Σ *est l'enveloppe d'une famille de droites à un paramètre.*

Nous nous contenterons ici de donner une justification intuitive de ce résultat. Le vecteur prix $p \in S$ est un vecteur prix d'équilibre associé à ω s'il existe une droite perpendiculaire à p passant par ω et appartenant à la famille de droites à un paramètre précédemment décrite. En particulier, ω sera une économie singulière s'il existe deux droites infiniment voisines de la famille passant par ω, autrement dit si ω est le point caractéristique d'une des droites de la famille, ce qui montre donc que Σ est l'enveloppe des droites considérées.

Corollaire : Si $(\ell, m) = (2, 2)$, Σ *vérifie les propriétés suivantes :*

1) *En tout point régulier de l'enveloppe,* Σ *est localement la frontière d'un ensemble convexe.*

2) *Le nombre d'équilibres associés au couple de ressources initiales* $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ *augmente de deux unités si* ω *traverse* Σ *en un point régulier en venant de la partie localement convexe pour entrer dans l'autre.*

La première partie du corollaire n'est qu'une des propriétés élémentaires des enveloppes de droites comme on en trouvait dans les cours de mathématiques spéciales ancienne manière. Signalons que cette propriété est rappelée par Thom [19] dans son mémoire très général sur les enveloppes. Elle se déduit facilement du fait qu'une enveloppe de droites peut s'interpréter comme la projection orthogonale du contour apparent d'une surface réglée, dont on sait que la courbure totale est toujours négative.

La deuxième partie du corollaire est évidente une fois que l'on remarque que rechercher les vecteurs prix d'équilibre associés à ω revient à tracer les tangentes à Σ passant par ω. Ainsi, quand ω traverse Σ en un point régulier de l'enveloppe en sortant de la partie convexe définie par Σ dans un voisinage du point de traversée, on peut alors mener de ω deux nouvelles tangentes à cette partie convexe.

Une autre façon d'énoncer cette partie du corollaire est de dire que quand ω traverse Σ en un point régulier de l'enveloppe en entrant dans la partie convexe définie par Σ dans un voisinage du point de traversée, alors le nombre d'équilibres diminue de deux unités. Ce n'est que dans de telles conditions que l'on peut observer des discontinuités d'une sélection d'un prix d'équilibre.

Notons cependant que, si le corollaire donne une image relativement précise de l'ensemble des économies singulières dans le cas de la boîte d'Edgeworth, il ne se généralise pas immédiatement au cas de (ℓ, m) quelconque.

L'étude de la projection de Debreu n'est ainsi qu'un cas particulier de la théorie des enveloppes ce qui nous permet d'obtenir, d'une part une meilleure compréhension géométrique de l'ensemble des économies singulières, d'autre part de préciser les concepts de généricité concernant la projection de Debreu et de ramener l'étude des singularités génériques de la projection de Debreu aux singularités génériques de la théorie des enveloppes, dont l'étude mathématique est d'ailleurs loin d'être achevée.

7. ECONOMIES A EQUILIBRE UNIQUE

La théorie des enveloppes apparaît donc comme le cadre mathématique adapté à l'étude des propriétés génériques de la projection de Debreu. Or, il est bien connu que les enveloppes de droites dans le plan projectif ont aussi des propriétés globales remarquables (voir surtout Thom [19]). Il n'est donc pas absurde d'espérer déduire à partir des propriétés globales des enveloppes des propriétés globales ayant une signification économique de certains sous-ensembles de ressources initiales définis en fonction du nombre d'équilibres associés à des ressources initiales.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 6 *: Si $m = 2$, le sous-ensemble* U *des économies régulières à équilibre unique est connexe par arc.*

Esquissons la démonstration de ce résultat dans le cas de deux biens et de deux agents (voir figure 2). Fixons le point M optimum de Pareto dans la boîte d'Edgeworth. Soit Δ la tangente commune en M aux courbes d'indifférence passant par M. On définit une application continue θ de la courbe C des optimums de Pareto moins le point M dans la droite projective $\Delta \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire la droite Δ complétée du point à l'infini, en associant à tout point M′ différent de M l'intersection de $\Delta \cup \{\infty\}$ avec la tangente commune aux courbes d'indifférence passant par M′. L'application θ admet un prolongement continu $\overline{\theta}$ à C en posant $\overline{\theta}(\mathrm{M})$ = point caractéristique de Δ. (Dans la théorie élémentaire, on montre que le point caractéristique est l'intersection de deux droites infiniment voisines de la famille, d'où la continuité du prolongement $\overline{\theta}$). Il en résulte que Im $\overline{\theta}$, image de C, qui est connexe par arc, par une application continue, est connexe par arc. Or, il est facile de vérifier que si le point ω appartient à Im $\overline{\theta}$, ou bien ω est une économie singulière, ou bien ω est une économie régulière admettant au moins deux vecteurs prix d'équilibre distincts. Par un argument utilisant le degré de la projection de Debreu (Balasko [4]), on montre que le point à l'infini $\{\infty\}$ appartient à l'adhérence de Im $\overline{\theta}$. Par conséquent Im $\overline{\theta} \cup \{\infty\}$ est un intervalle de la droite projective $\Delta \cup \{\infty\}$. La droite projective est homéomorphe au cercle S^1 et par conséquent, le complémentaire de Im $\overline{\theta} \cup \{\infty\}$ qui est l'ensemble des économies régulières de Δ ayant un équilibre unique c'est-à-dire $\mathrm{U} \cap \Delta$, est aussi un intervalle ; comme le point à l'infini n'appartient pas à cet intervalle, il en résulte que si ω appartient à U, le segment $[\omega, \mathrm{M}]$ est contenu dans U. Soit ω' une autre économie régulière appartenant à U, soit p' le vecteur prix d'équilibre unique associé à ω', soit $\mathrm{M}' = (f_1(p', p'.\,\omega_1), f_2(p', p'.\,\omega_2))$; alors, le segment $[\omega', \mathrm{M}']$ et l'arc MM′ de la courbe C permettent de joindre M à M′ dans U, ce qui prouve la connexité de U.

On peut montrer que le théorème 6 est encore vrai dans le cas d'un nombre quelconque d'agents si un certain indice numérique définissant une mesure des différences entre les préférences des différents consommateurs est inférieur à un certain niveau. Cette condition semble d'ailleurs peu restrictive en pratique (Balasko [5]).

8. QUELQUES APPLICATIONS

Les études d'économie appliquée ont été jusqu'à présent basées dans leur quasi-totalité sur le principe de l'unicité et de la stabilité de l'équilibre, le cas contraire ne correspondant dans l'esprit de beaucoup de praticiens qu'à des chimères de théoriciens. Par conséquent c'est tout le domaine de l'économie appliquée qu'il faudrait revoir du point de vue de la théorie des catastrophes, en se limitant à la rigueur, dans une première étape, à la simple question du nombre des équilibres et à ses conséquences. Sans épuiser les applications possibles de la théorie, les exemples qui suivent esquissent quelques conséquences du changement drastique qu'est l'abandon de la croyance en l'unicité et en la stabilité de l'équilibre.

8.1. Equilibres temporaires

Nous avons vu que l'existence de catastrophes est intimement liée aux questions de multiplicité des équilibres. Ainsi, dans le cas d'équilibres temporaires où le vecteur ressources initiales varie d'une période à l'autre, le franchissement de singularités peut se traduire par des catastrophes, i.e. des discontinuités des prix d'équilibres. Il est tentant d'interpréter ainsi certaines variations brutales des prix des produits agricoles ou piscicoles dont l'observation est assez courante. Supposons qu'il existe un organisme stabilisateur des cours. Dans le cas de la figure 3, s'il intervient postérieuresement à l'apparition de la catastrophe, alors son intervention est nécessairement massive pour rétablir les cours à leur ancien niveau. Ceci provient de l'existence d'un cycle d hystéresis.

8.2. Commerce international

En acceptant la formalisation du commerce international que propose la théorie de l'équilibre général, on constate que les pays développés et sous-développés ont des préférences assez peu similaires, de sorte que la taille de U est plutôt réduite. Par contre, l'organisation actuelle des échanges internationaux montre que le vecteur des échanges est important, les pays développés achetant la plupart des matières premières, les pays sous-développés la plupart des produits finis. De là à admettre que l'on est dans une situation d'équilibre multiples, il n'y a qu'un pas que nous allons sauter hardiment. Dans ce cas, on devrait pouvoir observer des catastrophes. N'est-il pas tendant d'interpréter ainsi quelques-unes des nombreuses et importantes variations des cours des matières premières ?

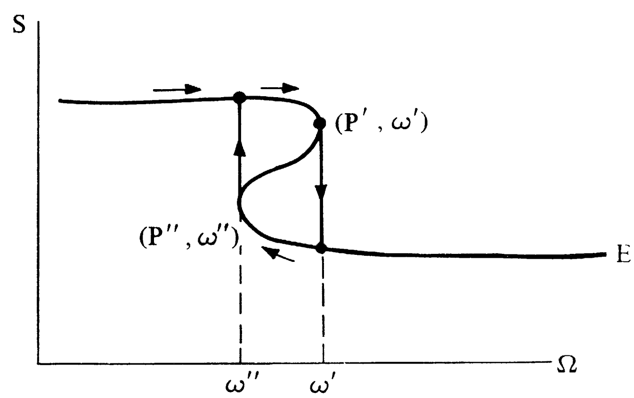

Figure 3

On voit en outre que les arguments classiques justifiant le commerce international peuvent s'appliquer au cas du commerce entre pays similaires, par exemple entre pays industrialisés, pour lesquels la taille de la composante U est vraisemblablement grande. Par contre ces arguments ne s'appliquent plus pour les relations entre pays dissemblables du fait de la multiplicité des vecteurs prix d'équilibre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ARROW K.J. and HAHN F.J. – *General competitive analysis,* Holden Day, San Francisco, California, 1971.

[2] ARROW K.J. and HURWICZ L. – On the stability of the competitive equilibrium I, *Econometrica,* 26, pp. 522-552, 1958.

[3] BALASKO Y. – Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory, *Journal of Mathematical Economics,* 2, pp. 95-118, 1975.

[4] BALASKO Y. – Equilibrium analysis and envelope theory, à paraître dans *Journal of Mathematical Economics.*

[5] BALASKO Y. – *L'équilibre économique du point de vue différentiel,* thèse, Paris IX Dauphine.

[6] BLAUG. – *Economic theory in retrospect,* 1969.

[7] DELBAEN F. – *Lower and upper hemi-continuity of the Walras correspondence,* Thèse, Université libre de Bruxelles, 1971.

[8] DEBREU G. – Economies with a finite set of equilibria, *Econometrica* 38, pp. 387-392, 1970.

[9] DEBREU G. – Smooth preferences, *Econometrica,* 40, pp. 603-615, 1972.

[10] DEBREU G. – Regular differentiable economies, *American Economic Review,* 66, n° 2, pp, 280-287, 1976.

[11] DIERKER E. – Two remarks on the number of equilibria of an economy. *Econometrica,* 40, pp. 951-953, 1972.

[12] DIEUDONNE J. – *Eléments d'analyse,* tome 3, Paris Gauthier-Villars, éd. 1970.

[13] MALINVAUD E. – *Leçons de théorie microéconomique,* Paris Dunod, 3^{e} éd. 1975.

[14] MILNOR J. – *Topology from the differentiable viewpoint,* University of Virginia Press, Charlottesville, Virginia, 1966.

[15] SCHECTER S. – On the structure of the equilibrium manifold, preprint, *Center for Research in Management Science,* Berkeley, 1975.

[16] SCHUMPETER J. – *History of economic analysis,* London Allen and Unwin, ed. 1954.

[17] SLUTSKY E. – Sulla teoria del bilancio del consumatore, *Giornale degli Economisti,* 51, pp. 19-23, 1915.

[18] SMALE S. – Global analysis and economics, VI, *Journal of Mathematical Economics,* 3, 1975.

[19] THOM R. – Sur la théorie des enveloppes, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 41, pp. 177-192, 1962.

[20] THOM R. – *Stabilité structurelle et morphogénèse,* Benjamin, Reading, Massachussetts, 1972.

[21] WALRAS L. – *Eléments d'économie politique pure.* Lausanne, Corbaz 1874.

[22] ZEEMAN E. – Levels of structure in catastrophe theory illustrated by applications in the social and biological sciences. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* Vancouver, Canada, 1974.

[23] ZEEMAN E. The classification of elementary catastrophes of codimension $\leqslant 5$. Notes by D. Trotman. *Mathematics Institute,* University of Warwick, Coventry, 1974.