

J. L. CHANDON

J. LEMAIRE

J. POUGET

Dénombrement des quasi-ordres sur un ensemble fini

Mathématiques et sciences humaines, tome 62 (1978), p. 61-80

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__62__61_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DENOMBREMENT DES QUASI-ORDRES

SUR UN ENSEMBLE FINI

J.L. CHANDON *

J. LEMAIRE **

J. POUGET **

I . INTRODUCTION

L'analyse des données de préférences révèle fréquemment l'intransitivité des jugements d'indifférence. Par exemple, un enseignant pourra, du point de vue de la charge en effectifs, ne pas remarquer une différence entre un groupe de 12 étudiants et un groupe de 15 étudiants ou entre un groupe de 15 étudiants et un groupe de 18 étudiants. Par contre, il risque de protester énergiquement si les groupes d'étudiants passent directement de 12 à 18 étudiants, abandonnant ainsi un jugement d'indifférence au profit d'un jugement de préférence stricte. Dans cet exemple, ce dernier jugement résulte du franchissement d'un seuil compris entre 3 et 6. On retrouve une situation analogue dans le comportement d'un consommateur qui, bien qu'indifférent à une hausse de prix de 180 à 185 Francs, suivie d'une hausse de 185 à 190 Francs, n'admettrait pas une hausse brutale de 180 à 190 Francs.

Le modèle de quasi-ordre¹, introduit par LUCE R.D.(1956), représente bien cette situation. SCOTT D. et SUPPES P.(1958) le définissent ainsi:

* Université de Nice, UER Droit et Sciences Economiques, Bd Emile Henriot, Nice.

** Université de Nice, LASSY-IMAN, 41 Bd Napoléon III, 06041 Nice.

1. Le modèle de quasi-ordre (semiorder en anglais) doit être distingué du modèle de préordre (quasiorder en anglais).

DEFINITION 1: Un quasi-ordre sur un ensemble X fini est défini par une application $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre réel $\sigma > 0$. x est préféré strictement à y si: $u(x) > u(y) + \sigma$. x et y sont indifférents si: $|u(x) - u(y)| \leq \sigma$.

L'ensemble des quasi-ordres sur X est évidemment beaucoup plus riche que celui des ordres ou même des préordres totaux sur X couramment utilisés en analyse des données de préférences. Par exemple, on peut dénombrer lorsque

card(X) = 7:

5 040	ordres totaux
47 293	préordres totaux
763 099	quasi-ordres.

Même pour de faibles valeurs de card(X), l'énumération des quasi-ordres devient rapidement fastidieuse. Nous proposons ici une méthode de dénombrement basée sur deux résultats connus:

- La notion de préordre total associé à un quasi-ordre: LUCE R.D.(1956).
- La forme standard d'un quasi-ordre: MENUET J.(1974), JACQUET-LAGREZE E.(1975).

L'utilisation de ces deux résultats ramène le dénombrement des quasi-ordres sur un ensemble fini à n éléments à celui des "escaliers" sous diagonaux ou strictement sous diagonaux, complets, d'ordre n. Les cardinaux de ces deux ensembles, c_n ou c_n^* , sont reliés aux nombres de Catalan: $b_n = \{2n\}_{n-1}/n!$. Pour remédier au caractère alterné de la liaison trouvée, nous proposons un calcul par récurrence des nombres c_n ou c_n^* . Celui-ci fournit une nouvelle interprétation des "Ballot numbers" généralisés introduit par CARLITZ L.(1969) en termes d'escaliers, strictement sous diagonaux, complets, d'ordre (n,k).

Avant de développer ces résultats, nous tenons à exprimer ici toute notre reconnaissance envers Monsieur G. KREWERAS pour les nombreuses suggestions qu'il a faites à propos de la version initiale de cet article. Nous les avons développées très largement dans cette nouvelle version.

II . NOTATIONS ET RAPPELS

1. Relations sur un ensemble X

X désigne un ensemble fini. Card(X) = n. $D = \{(x,x); x \in X\}$ désigne la diagonale de $X \times X$. Soit R une relation sur X. $(x,y) \in R$ sera aussi noté xRy . S'agissant de préférences, on dira que x est préféré largement à y .

R est réflexive si $D \subset R$ et irréflexive si $D \cap R = \emptyset$

$R^t = \{(x,y); yRx\}$ est la transposée de R.

R est symétrique si $R = R^t$. Dans le cas contraire, on considère la

partie symétrique de R : $I_R = R \cap R^t$. C'est une relation symétrique. Elle est réflexive si et seulement si R est réflexive. R est antisymétrique si $I_R = D$ et asymétrique si $I_R = \emptyset$. Si $x I_R y$, on dira que x et y sont indifférents.

$P_R = R - I_R$ est la partie asymétrique de R . C'est une relation asymétrique et irréflexive. Si $x P_R y$, on dira que x est préféré strictement à y . P_R , I_R , $P_R^t = P_R^t$ sont des relations deux à deux disjointes. R est dite totale si: $X \times X = R \cup R^t = P_R \cup I_R \cup P_R^t$.

Dans ce cas, pour tout couple (x, y) d'éléments de X :

x est préféré strictement à y
ou x et y sont indifférents ("ou" exclusif)
ou y est préféré strictement à x .

De plus, toute relation totale est réflexive. Considérons maintenant deux relations R et S sur X . $x R y S z$ signifie: $x R y$ et $y S z$. RS est la relation: $\{(x, z); \exists y: x R y S z\}$. Une relation est transitive si $R^2 = R R \subset R$.

2. Relation d'équivalence sur X

Une relation d'équivalence est une relation réflexive symétrique et transitive. Pour une telle relation E , l'ensemble des classes d'équivalence est désigné par: X/E . $\bar{x} \in X/E \iff \exists x \in X: \bar{x} = \{y \in X; x E y\}$. Les éléments de X/E constituent une partition de X .

R étant une relation réflexive sur X , lorsque I_R n'est pas transitive, on considère la relation E_R telle que: $x E_R y \iff \forall z \in X: (x I_R z \iff y I_R z)$. C'est une relation d'équivalence contenue dans I_R . Si $x E_R y$ on dira que x et y sont équivalents.

3. Relation d'ordre ou de préordre total sur X

Un préordre total sur X est une relation totale, réflexive et transitive. Un ordre total est un préordre total antisymétrique. Un ordre total sur X peut être noté: $x_1 R x_2 R \dots R x_{n-1} R x_n$. Ce qui signifie que:

$$R = \{(x_i, x_j); 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

Si R est un préordre total sur X , I_R est une relation d'équivalence et R induit un ordre total $\bar{R}$ sur $\bar{X} = X/I_R$ défini par:

$$\bar{x} \bar{R} \bar{y} \text{ si } \exists x \in \bar{x}, \exists y \in \bar{y} : x R y$$

Ainsi, un préordre total pourra être noté: $\bar{x}_1 \bar{R} \bar{x}_2 \bar{R} \dots \bar{R} \bar{x}_{q-1} \bar{R} \bar{x}_q$ ce qui signifie que:

$$R = \{(x, y); x \in \bar{x}_i, y \in \bar{x}_j \text{ et } 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

De plus, l'application $R \mapsto (X, R)$ est une bijection de l'ensemble des préordres totaux sur X sur l'ensemble des couples formés d'une partition de X et d'un ordre total sur ses classes : BARBUT M. et MONJARDET B. (1970).

4. Relation de quasi-ordre sur X

DEFINITION 2: Un quasi-ordre sur X est une relation R sur X totale et telle que: $P_R I_R P_R = P_R$; $P_R^2 \cap I_R^2 = \emptyset$

Cette nouvelle définition équivaut à celle donnée dans l'introduction. S'il est facile de montrer que la définition 1 implique la définition 2, l'implication inverse est beaucoup moins évidente. A ce sujet, on pourra consulter les articles de: SCOTT D. et SUPPES P. (1958), SCOTT D. (1964), FISHBURN P.C. (1970) et la monographie de MENUET J. (1974) pour une axiomatique équivalente. Parmi les propriétés d'un quasi-ordre R sur X , citons la réflexivité et la transitivité de P_R due au fait que: $P_R P_R = P_R$ et $P_R \subset P_R I_R P_R$ et que cette dernière relation est contenue dans P_R par définition. Par contre la relation I_R n'est pas forcément transitive.

Les préordres totaux sont des quasi-ordres à seuil nul. Il est en effet facile de montrer que la relation R est un préordre total sur X si et seulement si il existe une fonction numérique u définie sur X telle que:

$$x P_R y \Leftrightarrow u(x) > u(y) \quad \text{et} \quad x I_R y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$$

5. Introduction au dénombrement

Soient: Q_X l'ensemble des quasi-ordres sur X ,

P_X l'ensemble des préordres totaux sur X ,

$P_{X,k}$ l'ensemble des préordres totaux sur X , à k classes,

O_X l'ensemble des ordres totaux sur X .

Il est facile d'établir que les cardinaux de ces ensembles ne dépendent que de $n = \text{card}(X)$. Nous les noterons respectivement: $q_n, p_n, p_{n,k}, o_n$. Le but de ce travail est l'évaluation de q_n . Pour le reste, il est bien connu que:

$$(1) \quad o_n = n!$$

La caractérisation d'un préordre total sur X par un couple formé d'une partition de X et d'un ordre total sur ses classes permet d'affirmer que:

$$(2) \quad p_{n,k} = S(n,k) o_k$$

où $S(n,k)$, nombre de Stirling de deuxième espèce, est aussi le nombre de partitions en k classes d'un ensemble à n éléments. Ces nombres peuvent être calculés par récurrence à l'aide de la relation: $S(n,k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$

valable pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$ et des conditions initiales: $S(0,0) = 1$, $S(n,0)=0$ pour tout $n > 0$ (BERGE C.(1968) par exemple). La relation de récurrence précédente implique, pour les $p_{n,k}$ la relation suivante:

$$p_{n,k} = k(p_{n-1,k-1} + p_{n-1,k})$$

valable là encore pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Jointe aux conditions initiales: $p_{0,0} = 1$ et $p_{n,0} = 0$ pour tout $n > 0$ ainsi qu'à la convention: $p_{n,k} = 0$ si $k > n$, elle permet le calcul des $p_{n,k}$ par récurrence. En particulier:

$$p_{n,1} = 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

$$p_{n,n} = n! \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Enfin:
$$p_n = \sum_{k=1}^n p_{n,k}$$

Par exemple jusqu'à $n = 7$, on obtient:

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
o_n	1	2	6	24	120	720	5040

$p_{n,k}$	k=1	1	1	1	1	1	1	
	k=2		2	6	14	30	62	126
	k=3			6	36	150	540	1806
	k=4				24	240	1560	8400
	k=5					120	1800	16800
	k=6						720	15120
	k=7							5040

p_n	1	3	13	75	541	4683	47293
-------	---	---	----	----	-----	------	-------

La relation suivante sera utilisée plus loin:

PROPOSITION 1 (RIORDAN J.(1968) p 208)

$$p_{n,k} = \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j-1}{k-1} p_{n,j}$$

pour tout $n \geq 1$ et tout k tel que $1 \leq k \leq n$.

§ Elle se réduit à $p_{1,1} = p_{1,1}$ pour $n = 1$. Pour $n > 1$, si elle est vraie pour $n-1$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j-1}{k-1} p_{n,j} &= \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j-1}{k-1} j (p_{n-1,j-1} + p_{n-1,j}) \\
 &= k \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j}{k} (p_{n-1,j-1} + p_{n-1,j}) \\
 &= k (-1)^{n-k} p_{n-1,k-1} + k \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{n-1-j} ((\binom{j+1}{k} - \binom{j}{k})) p_{n-1,j} \\
 &= k \left(\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{j-1}{k-1} p_{n-1,j} + \sum_{j=k-1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{j-1}{k-2} p_{n-1,j} \right) \\
 &= k (p_{n-1,k} + p_{n-1,k-1}) = p_{n,k} \quad \text{si } k > 1.
 \end{aligned}$$

Si $k = 1$, la relation équivaut à:

$$1 = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} S(n,j) j!$$

ou:
$$(-1)^n = \sum_{j=1}^n S(n,j) (-1)^j j!$$

qui résulte de la décomposition:

$$x^n = \sum_{j=1}^n S(n,j) \{x\}_j$$

où $\{x\}_j = x(x-1)(x-2)\dots(x-j+1)$; (par exemple BERGE C. (1968) p 36).

§

6. Codage binaire d'une relation

Ayant choisi un ordre total: $x_1^T x_2^T \dots x_{n-1}^T x_n$ sur X , toute relation R sur X peut être caractérisée par une matrice booléenne (n,n) : $r^{R,T}$ définie par: $r_{ij}^{R,T} = 1$ si $x_i R x_j$ et $r_{ij}^{R,T} = 0$ sinon. Par exemple, on peut ainsi représenter les 19 quasi-ordres sur un ensemble X à 3 éléments. On pourra remarquer que seuls les quasi-ordres n°13, 14, 15, 16, 17, 18 ne sont pas des préordres.

1	2	3	4	5	6																																																						
<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	1	0	0	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	0	0	1	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	1	0	0	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	1	1	0	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	0	0	1	0	1	1	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1																																																									
0	1	1																																																									
0	0	1																																																									
1	1	1																																																									
0	1	0																																																									
0	1	1																																																									
1	0	1																																																									
1	1	1																																																									
0	0	1																																																									
1	0	0																																																									
1	1	1																																																									
1	0	1																																																									
1	1	0																																																									
0	1	0																																																									
1	1	1																																																									
1	0	0																																																									
1	1	0																																																									
1	1	1																																																									
7	8	9	10	11	12																																																						
<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	0	0	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	1	0	1	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	1	0	1	1	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	1	1	1	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	0	1	1	0	1	1	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1																																																									
1	1	1																																																									
0	0	1																																																									
1	1	1																																																									
0	1	1																																																									
0	1	1																																																									
1	1	1																																																									
0	1	0																																																									
1	1	1																																																									
1	0	0																																																									
1	1	1																																																									
1	1	1																																																									
1	1	0																																																									
1	1	0																																																									
1	1	1																																																									
1	0	1																																																									
1	1	1																																																									
1	0	1																																																									

13

1	1	1
1	1	1
0	1	1

14

1	1	1
0	1	1
1	1	1

15

1	1	1
1	1	1
1	0	1

16

1	1	0
1	1	1
1	1	1

17

1	0	1
1	1	1
1	1	1

18

1	1	1
1	1	0
1	1	1

19

1	1	1
1	1	1
1	1	1

III. PREORDRE TOTAL ASSOCIE A UN QUASI-ORDRE

Nous utiliserons plus loin la proposition suivante présentée par LUCE R.D. (1956) sous une forme légèrement différente:

PROPOSITION 2

Si R est un quasi-ordre, la relation S définie par:

$$x S y \iff \forall z: z R x \Rightarrow z R y \text{ et } y R z \Rightarrow x R z$$

est un préordre total et $I_S = E_R$.

§ La relation S est réflexive et transitive; on le prouve sans difficulté à partir de la définition ci-dessus. Pour montrer que S est totale, on utilisera le lemme suivant:

LEMME 1

Si R est un quasi-ordre, les 3 relations: $R \circ P_R R$, $R^2 \circ P_R$, $P_R \circ R^2$ sont contenues dans R.

§§ Pour simplifier, on posera: $I = I_R$, $P = P_R$. R étant totale, non $x R y$ équivaut à $y P x$. On va d'abord prouver que: $R \circ P_R R \subset R$. Comme $R = P \cup I$, l'inclusion précédente sera acquise si l'on prouve que les 4 relations: $I \circ P \circ I$, $P \circ P \circ I$, $I \circ P \circ P$, $P \circ P \circ P$ sont contenues dans R. Ceci est bien vrai car, si $x I y P z I t$ et non $x R t$ - ce qui équivaut à $t P x$ -, en utilisant la première relation de la définition d'un quasi-ordre, on en déduirait que: $y P x$, ce qui contredirait $x I y$. De même, $x P y P z I t$ et non $x R t$ - soit: $t P x$ - conduirait, en utilisant en plus la transitivité de P à la contradiction: $x P x$. Même raisonnement si $x I y P z P t$ et non $x R t$. Enfin, puisque P est transitive, $P \circ P \circ P \subset P \subset R$. Passons maintenant à la deuxième inclusion du lemme. Comme précédemment, il suffit d'établir que les 4 relations suivantes: $I \circ I \circ P$, $P \circ I \circ P$, $I \circ P \circ P$, $P \circ P \circ P$ sont contenues dans R. C'est clair pour les deux dernières d'après ce qui précède. Pour la seconde, cela résulte de la première relation intervenant dans la définition d'un quasi-ordre. $I \circ I \circ P \subset P$: si $x I^2 y P z$ et non $x R z$ - soit: $z P x$ -, impliquerait $x I^2 y$ et $y P^2 x$.

Comme I^2 est symétrique, ceci contredirait la deuxième relation intervenant dans la définition d'un quasi-ordre. Quant à la dernière inclusion du lemme, elle résulte de l'inclusion des quatre relations: $p I I$, $P I P$, $P P I$, $P P P$ dans R , ce qui est une conséquence des résultats précédents ou se démontre de manière analogue. §§

Le lemme établi, on peut maintenant montrer aisément que la relation S est totale. Ceci équivaut à dire que: $\text{non } xSy \Rightarrow ySx$. Supposons donc: $\text{non } xSy$. Il existerait un élément z tel que: zRx et $\text{non } zRy$ ou yRz et $\text{non } xRz$. En utilisant la relation P , ceci peut aussi s'écrire: $yPzRx$ ou $yRzPx$. Soit alors un élément t tel que tRy . D'après le lemme, on aurait aussi: tRx . De même, si xRt , on aurait: yRt . On vient de prouver que pour tout élément t , tRy implique tRx et xRt implique yRt . C'est dire exactement que: ySx . S est donc bien totale. Le reste de la proposition: $I_S = E_R$ résulte immédiatement des définitions de I_R , E_R et S . §

Dans toute la suite, ce préordre total sera noté S_R .

L'application qui à tout quasi-ordre R sur X associe le préordre total S_R défini précédemment induit une partition de Q_X : $Q_X = \bigcup_{S \in P_X} Q_X^S$ où Q_X^S est tel que: $Q_X^S = \{R \in Q_X; S_R = S\}$. Ainsi on peut écrire:

$$\text{card}(Q_X) = \sum_{S \in P_X} \text{card}(Q_X^S)$$

Cette formule ramène le dénombrement de Q_X à celui des ensembles Q_X^S . Les deux propositions suivantes limitent ce problème au cas où S est un ordre total sur X .

PROPOSITION 3

Si S est un préordre total sur X et $\bar{S}$ l'ordre total induit par S sur l'ensemble des classes d'équivalences de S : $\bar{X} = X/I_S$, alors pour tout quasi-ordre R tel que $S_R = S$ (id tout élément de Q_X^S), on peut définir une relation $\bar{R}$ sur $\bar{X}$ par la formule: $\bar{x}\bar{R}\bar{y} \Leftrightarrow \exists x \in \bar{x}, \exists y \in \bar{y} : xRy$ et l'application qui à R associe $\bar{R}$ est une bijection de Q_X^S sur $Q_{\bar{X}}^{\bar{S}}$.

§ Cette proposition repose sur le lemme suivant:

LEMME 2: Si R est un quasi-ordre sur X : $E_R I_R E_R \subset I_R$, $E_R P_R E_R \subset P_R$, $E_R R E_R \subset R$ et $E_R E_R E_R \subset E_R$.

§§ Dans ce lemme, la première inclusion résulte de la définition de E_R :

$x E_R y \wedge I_R z$ implique $x I_R z$ et $x I_R y \wedge E_R z$ implique $x I_R z$. Pour établir la seconde, on remarque que si $x E_R y \wedge P_R z$, $x I_R z$ est impossible car on en déduirait $y I_R z$. $z P_R x$ est également impossible car la transitivité de P_R assurerait alors que $y P_R x$ ce qui contredirait $x E_R y$. Comme R est totale, on a donc $x P_R z$. On vient de prouver que $E_R P_R \subset P_R$ et on démontrerait de même que $P_R E_R \subset P_R$. La troisième résulte alors des deux premières puisque $R = P_R \cup I_R$. Quant à la dernière, c' est une conséquence immédiate de la transitivité de E_R . §§

Démontrons maintenant la proposition. Si R est un quasi-ordre sur X tel que $S_R = S$, d'après la proposition 2, $I_S = E_R$. Le lemme 2 assure alors que les quatre relations I_R, P_R, R, E_R "passent au quotient" relativement à I_S . Si A désigne l'une quelconque de ces quatre relations, $x I_S y$ et $z I_S t$ impliquent que $x A z$ équivaut à $y A t$. On peut donc définir $\bar{A}$ relation sur $\bar{X} = X/I_S$ par: $\bar{x} \bar{A} \bar{y}$ si et seulement si il existe un élément x de $\bar{x}$ et un élément y de $\bar{y}$ tels que $x A y$. Il est alors facile de montrer que $\bar{I}_R = \bar{I}_R, \bar{P}_R = \bar{P}_R, \bar{E}_R = \bar{E}_R$ et $\bar{S}_R = \bar{S}_R = \bar{S}$ puis de vérifier que $\bar{R}$ est un quasi-ordre sur $\bar{X}$. On peut donc bien définir une application de Q_X^S dans $Q_{\bar{X}}^{\bar{S}}$. Cette application est injective car si R_1 et R_2 sont deux quasi-ordres distincts de Q_X^S , il existe un couple (x, y) d'éléments de X tels que $x R_1 y$ et non $x R_2 y$. Notant $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les classes d'équivalence respectives de x et y pour la relation I_S , comme R_2 est une relation totale, on a $y P_{R_2} x$ donc $\bar{y} \bar{P}_{R_2} \bar{x}$ soit $\bar{y} \bar{P}_{R_2} \bar{x}$ ce qui implique non $\bar{x} \bar{R}_2 \bar{y}$. Comme par ailleurs, pour un raison analogue $\bar{x} \bar{R}_1 \bar{y}$, on vient de prouver que $\bar{R}_1 \neq \bar{R}_2$. Enfin, cette application est surjective car si U est un quasi-ordre de l'ensemble $Q_{\bar{X}}^{\bar{S}}$, on définit un quasi-ordre R sur X en posant: $x R y$ si et seulement si $\bar{x} U \bar{y}$ avec $\bar{x}, \bar{y}$ classes d'équivalence de x et y relativement à I_S . Grâce au fait que $x P_R y$ équivaut à $\bar{x} \bar{P}_U \bar{y}$ et $x I_R y$ à $\bar{x} \bar{I}_U \bar{y}$, on montre aisément que R est un élément de Q_X^S . Enfin $\bar{R} = U$ par construction. §

PROPOSITION 4: Soient Y et Z deux ensembles finis tels que $\text{card}(Y) = \text{card}(Z)$, S un ordre total sur Y et T un ordre total sur Z . Alors $\text{card}(Q_Y^S) = \text{card}(Q_Z^T)$.

§ On établit sans peine cette proposition en considérant la bijection b de Y sur Z telle que: $x S y \Leftrightarrow b(x) T b(y)$ et en montrant que l'application qui associe à tout quasi-ordre R sur Z la relation $\hat{R}$ sur Y définie par: $x \hat{R} y$ si et seulement si $b(x) R b(y)$ induit par restriction une bijection de Q_Z^T sur Q_Y^S . §

La proposition précédente légitime la définition suivante:

DEFINITION 3: q_n^* désigne le nombre de quasi-ordres R sur un ensemble fini X à n éléments tels que S_R soit un ordre total sur X .

PROPOSITION 5

Pour tout entier $n \geq 1$: $q_n = \sum_{k=1}^n p_{n,k} q_k^*$.

§ Elle résulte de la formule précédant la proposition 3. Elle peut s'écrire:

$$q_n = \sum_{k=1}^n \sum_{S \in P_{X,k}} \text{card}(Q_X^S)$$

D'après la proposition 3, les deux ensembles Q_X^S et $Q_{\bar{X}}^{\bar{S}}$ ont même cardinal: q_k^* si $S \in P_{X,k}$. Enfin $\text{card}(P_{X,k}) = p_{n,k}$. §

Le paragraphe suivant développe une notion qui permettra d'évaluer les nombres q_n^* .

IV. FORME STANDARD D'UN QUASI-ORDRE

DEFINITION 4

Si $n \geq k \geq 1$, un escalier sous diagonal (respectivement strictement sous diagonal) d'ordre (n,k) est une double suite d'entiers: $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$ telle que:

$$0 < a_1 < \dots < a_q = n$$

$$0 < b_1 < \dots < b_q = k$$

$$a_j \leq b_j \text{ pour tout } j < q$$

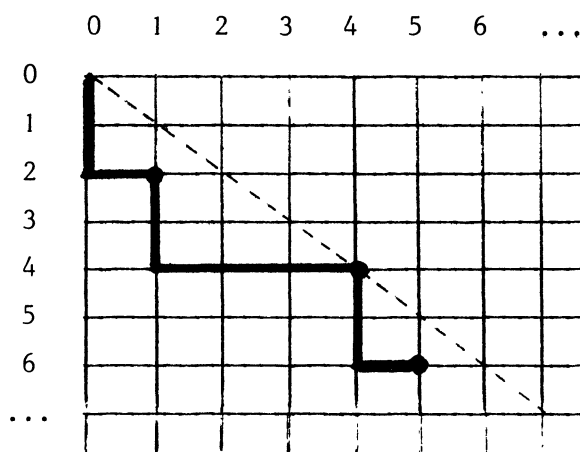
$$(\text{respectivement: } a_j < b_j \text{ pour tout } j < q).$$

Lorsque $n = k$, pour simplifier l'écriture, l'ordre sera noté n au lieu de (n,n) .

Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, en orientant l'axe vertical vers le bas, on peut représenter un escalier sous diagonal - en abrégé: ESD - d'ordre (n,k) par un chemin "en escalier", situé au-dessous de la diagonale principale, et dont les parties saillantes des marches sont les points de coordonnées: $(0,0), (a_1, b_1), \dots, (a_q, b_q)$.

Exemple:

j	1	2	3
a_j	2	4	6
b_j	1	4	5



Dans cette représentation, les escaliers strictement sous diagonaux - en

abrégé: ESSD -, sont situés strictement en dessous de la diagonale sauf au départ avec le point (0,0). Ces concepts diffèrent de ceux du paragraphe 2-2 de la publication de G.KREWERAS (1970): chemins dans $\mathbb{N}^2$, en escalier, sous diagonaux joignant (0,0) à (x,y) par le caractère nécessairement horizontal de la dernière étape. Notant $B_{n,k}$ l'ensemble des ESD d'ordre (n,k) et $b_{n,k}$ le cardinal de cet ensemble, on a donc, avec les notations de la publication précédente:

$$b_{n,k} = \alpha(n,k-1) = \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k-1}{n-1} \quad \text{si } n > k \text{ et } b_{n,n} = \alpha(n,n)$$

(nombre de Ballot d'ordre (n,k-1)).

En particulier, $b_n = b_{n,n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!} = \frac{\{2n\}_{n-1}}{n!}$ (on rappelle que $\{a\}_b$ est égal à

$a(a-1)(\dots)(a-b+1)$), $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan, dénombre les ESD d'ordre n.

De même, notant $B_{n,k}^*$, l'ensemble des ESSD d'ordre (n,k) et $b_{n,k}^*$, son cardinal, on a:

$$b_{n,k}^* = b_{n-1,k} \quad \text{si } n > k \text{ et } b_{n,n}^* = b_{n-1,n-1}$$

Pour établir ce premier résultat concernant $b_{n,k}^*$, il suffit de remarquer que $(a_j, b_j) \longrightarrow (a_{j-1}, b_j)$ définit une bijection de $B_{n,k}^*$ sur $B_{n-1,k}$ si $n > k$. Sous cette condition, $b_{n,k}^* = b_{n-1,k}$. Pour le reste si $n = k$, en tronquant la dernière étape horizontale, c'est à dire en remplaçant b_q par $b_q - 1$ dans la fonction précédente, on définit une bijection de $B_{n,n}^*$ sur $B_{n-1,n-1}$. Ainsi:

$$b_{n,n}^* = b_{n-1,n-1} = b_{n-1}.$$

Là encore, le (n-1)^{ième} nombre de Catalan: b_{n-1} dénombre les ESSD d'ordre n.

Nous allons maintenant nous intéresser à des ESD ou des ESSD possédant une propriété de complétude.

DEFINITION 5

Un ESD ou ESSD: $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$ d'ordre (n,k) est complet si:

$$\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_q\} \cup \{b_1, \dots, b_q\}$$

En abrégé, nous le qualifierons d'ESDC ou ESSDC.

$C_{n,k}$ et $c_{n,k}$ (respectivement $C_{n,k}^*$ et $c_{n,k}^*$) désignerons l'ensemble des ESDC d'ordre (n,k) et son cardinal. Là encore, pour simplifier, on posera $c_n = c_{n,n}$ et $c_n^* = c_{n,n}^*$.

L'intérêt de cette propriété apparaît dans la proposition suivante précisant un résultat de MENUET J.(1974) et JACQUET-LAGREZE E.(1975) concernant la caractérisation d'un quasi-ordre par une matrice binaire où les 1 et les 0 sont séparés par une frontière en escalier sous diagonale, les 1 étant situés au-dessus. Dans toute la suite, S désignera un ordre total sur X indexé de tel-

le sorte que: $x_1 S x_2 S \dots S x_n$.

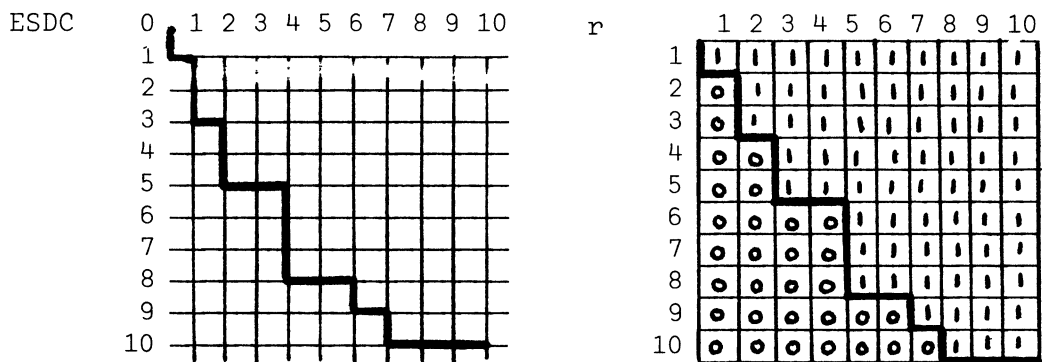
PROPOSITION 6

L'application qui à tout ESDC d'ordre n: $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$ associe la relation R dont la matrice binaire $r = r^{R,S}$ est définie par:

$$r_{ij} = 1 \text{ si il existe } k \text{ tel que: } a_{k-1} < i \leq a_k \text{ et } j > b_{k-1} \\ = 0 \text{ sinon}$$

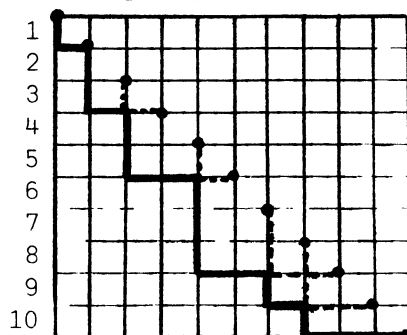
(on convient que $a_0 = 0$) est une bijection de $C_{n,n}$ sur Q_X^S .

Exemple:



§ Montrons d'abord que R est un élément de Q_X^S . La relation R est totale car $r_{ij} = 1$ dès que $i \leq j$. $x_i P_R x_j I_R x_k P_R x_l$ implique: $r_{lk} = r_{ji} = 0$. On en déduit que $r_{mk} = 0$ pour tout $m \geq 1$ et $r_{mi} = 0$ pour tout $m \geq j$. Comme $x_j I_R x_k$, $r_{jk} = 1$; compte tenu de ce qui précède, on en déduit que $j < 1$, puis que: $r_{li} = 0$. Cette dernière assertion équivaut à: $x_i P_R x_l$. On vient de prouver que: $P_R I_R P_R \subset P_R$. Montrons maintenant que P_R^2 et I_R^2 sont disjointes. Si l'on avait: $x_i P_R x_k P_R x_j$ et $x_i I_R x_l I_R x_j$ on en déduirait que $r_{mi} = 0$ pour tout $m \geq k$ et $r_{jm} = 0$ pour tout $m \leq k$. Comme $r_{li} = r_{jl} = 1$, on aboutirait à la contradiction: $1 < k$ et $1 > k$. R est donc bien un quasi-ordre sur X. Il reste à établir que $S_R = S$. D'abord, il est clair que: $i \leq j$ implique: $(\forall k: r_{ki} = 1 \Rightarrow r_{kj} = 1 \text{ et } r_{jk} = 1 \Rightarrow r_{ik} = 1)$. C'est dire que S est contenu dans S_R . Pour montrer que S_R est égal à S, il suffit donc de montrer que S_R est un ordre total sur X, soit, compte-tenu de la proposition 2, que $E_R = D$. C'est bien le cas car, ainsi que le remarque MENUET J.(1974), on obtient les bornes des classes d'équivalences de E_R en prolongeant jusqu'à la diagonale, les marches de la frontière en escalier (ceci résulte immédiatement de la définition de E_R donnée au paragraphe II.2.).

Exemple



Or la propriété de complétude équivaut à dire qu'on atteint ainsi tous les points de la diagonale. Les classes d'équivalences de E_R sont donc toutes réduites à un élément. Ainsi, $E_R = D$.

L'application de la proposition est bijective. Elle est injective car, S étant fixé, R est caractérisé par r et la matrice r est elle même déterminée injectivement par la connaissance de l'ESDC d'ordre n dont elle est issue. Cette application est enfin surjective. En effet, considérons pour le prouver un élément de Q_X^S . On va d'abord montrer que la matrice booléenne $r=r^{R,S}$ présente une disposition de 1 et de 0 séparés par une frontière en escalier sous diagonal; plus précisément, il faut prouver que si $r_{ij} = 0$ alors:

$$1 \leq k \leq j \Rightarrow r_{ik} = 0 \text{ et } i \leq k \leq n \Rightarrow r_{kj} = 0.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un entier $k \in [1, j]$ tel que $r_{ik} = 1$. On a donc $x_j P_R x_i R x_k$. Comme $R = I_R \cup P_R$, on a soit $x_i I_R x_k$, ce qui entraîne $x_j P_R I_R x_k$ donc $x_j P_S x_k$ puisque $S_R = S$, soit $x_i P_R x_k$, ce qui entraîne $x_j P_R x_k$ puisque P_R est transitive. Dans ce dernier cas, vu que $D \subset I_R$, on a aussi $x_j P_R I_R x_k$ donc $x_j P_S x_k$. Dans les deux cas la relation obtenue conduit à la contradiction $j < k$. Ceci démontre la première implication; la seconde implication se démontre de manière analogue. Comme par ailleurs, R étant une relation totale, $r_{ij} = 0$ implique $i > j$, la frontière est bien sous diagonale. Les couples (a_j, b_j) de l'ESDC d'ordre n dont elle est issue sont alors obtenus en repérant les indices: $(i_1, j_1), \dots, (i_{q-1}, j_{q-1})$ des éléments de r tels que:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 0 \\ r_{ik} &= 1 \text{ pour tout } k > j \\ r_{kj} &= 1 \text{ pour tout } k < i \end{aligned}$$

et $i_1 < i_2 < \dots < i_{q-1}$.

Exemple:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	1	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	1	1	1

k	1	2	3	4	5	6
i_k	5	6	7	8	9	10
j_k	1	2	3	4	6	7

Il suffit alors de poser: $a_k = i_k - 1$ et $b_k = j_k$ pour $k = 1, 2, \dots, q-1$ et $a_q = b_q = 1$

COROLLAIRE 1

q_n , le nombre de quasi-ordres R sur un ensemble à n éléments tels que S_R soit un ordre total est égal à c_n , le nombre d'ESDC d'ordre n.

V. DENOMBREMENT DES ESDC D'ORDRE n

PROPOSITION 7

Pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} b_k$$

$$c_n^* = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} b_{k-1}$$

où $b_n = \frac{\{2n\}_{n-1}}{n!}$ est le n ième nombre de Catalan.

§ Ces deux relations équivalent aux relations inverses (BERGE C.(1968) chap.3):

pour tout $n \geq 1$: $b_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_k$ et $b_{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_k^*$ qui résultent du dénombrement des ESD ou ESSD d'ordre n suivant leur support. On appelle support de $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$, l'ensemble: $\{a_1, \dots, a_q\} \cup \{b_1, \dots, b_q\}$.

LEMME 3

Le nombre d'ESD ou ESSD d'ordre n dont le support est un sous-ensemble fixé S, contenu dans $\{1, \dots, n\}$ et contenant n, est égal au nombre d'ESDC ou ESSDC d'ordre $\text{card}(S)$.

§§ En effet, soit ϕ la bijection strictement croissante de $\{1, \dots, \text{card}(S)\}$ sur S. Atout ESDC ou ESSDC d'ordre $\text{card}(S)$: $e = (a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$, on associe l'ESD ou l'ESSD d'ordre n: $e = (\phi(a_j), \phi(b_j))_{1 \leq j \leq q}$. Cette application est bijective. §§ En utilisant le lemme, on peut écrire:

$$\begin{aligned} b_n = \text{card}(B_{n,n}) &= \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ n \in S}} \text{card}\{e; e \text{ ESD d'ordre } n \text{ et support de } e = S\} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_k \end{aligned}$$

en classant ces ensembles S suivant leur cardinal. De même:

$$\begin{aligned} b_{n-1} = \text{card}(B_{n,n}^*) &= \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ n \in S}} \text{card}\{e; e \text{ ESSD d'ordre } n \text{ et support de } e = S\} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_k^* \end{aligned} \quad \S$$

Bien que peu commodes parcequ'alternées, ces relations permettent de calculer les premières valeurs des c_n et des c_n^* :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835
c_n^*	1	0	1	1	3	6	15	36	91	232

Le reste de ce paragraphe précise quelques relations entre ces nombres qui vont permettre un calcul par récurrence des c_n .

COROLLAIRE 2

Pour tout $n \geq 1$: $c_n = c_n^* + c_{n+1}^*$.

$$\begin{aligned}
 \S \quad c_n^* + c_{n+1}^* &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} \left(\binom{n}{k-1} - \binom{n-1}{k-1} \right) b_{k-1} + b_n \\
 &= \sum_{k=2}^n (-1)^{n-(k-1)} \binom{n-1}{k-2} b_{k-1} + b_n \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} b_k = c_n \quad \S
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de dénombrer les ESSDC d'ordre n pour obtenir les c_n .

PROPOSITION 8

Pour tout $n \geq 1$: $c_n = c_n^* + \sum_{k=1}^{n-1} c_k^* c_{n-k}$.

§ Cette formule correspond au dénombrement des ESSDC d'ordre n : $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq n}$, suivant la valeur k de la première égalité $a_j = b_j = k$, d'indice $j < k$. §

COROLLAIRE 3

Les fonctions génératrices: $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ et $\phi^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* t^n$ où l'on

convient: $c_0 = 1$ et $c_0^* = 0$ sont telles que:

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \frac{1+t}{2t} \left(1 - \sqrt{\frac{1-3t}{1+t}} \right) \\
 \phi^*(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-3t}{1+t}} \right)
 \end{aligned}$$

§ D'après le corollaire 2, $\phi(t) = \phi^*(t) + \phi^*(t)/t$, soit: $\phi(t) = \frac{1+t}{t} \phi^*(t)$. Avec la convention de l'énoncé du corollaire 3, la relation de la proposition 8 peut s'écrire: pour tout $n \geq 1$, $c_n = \sum_{k=0}^n c_k^* c_{n-k}$. Comme pour $n = 0$: $c_0 = 1$ et $c_0^* c_0 = 0$, on en déduit au niveau des $k=0$ fonctions génératrices que:

$$\phi(t) - 1 = \phi(t) \phi^*(t)$$

Des deux relations obtenues, on tire:

$$(1+t) \phi^*(t)^2 - (1+t) \phi^*(t) + t = 0$$

Ainsi:

$$\phi^*(t) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1-3t}{1+t}} \right)$$

Le signe devant le radical est déterminé en observant que: $\phi^*(0) = c_0^* = 0$. On obtient ainsi les deux relations annoncées. §

REMARQUE 1

Les identités: $c_n = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}$ et $c_n^* = \frac{\phi^{*(n)}(0)}{n!}$ conduisent aux relations de la proposition 7.

Pour clore ce paragraphe, nous allons montrer comment le calcul des $c_{n,k}^*$ (nombre d'ESSDC d'ordre (n,k)) permet d'obtenir, très facilement par récurrence, les nombres cherchés. En particulier, tout en leur donnant une interprétation combinatoire nouvelle, nous allons relier ces nombres $c_{n,k}^*$ aux "Ballot numbers" généralisés introduit par CARLITZ L.(1969).

PROPOSITION 9

Pour tout $n > k \geq 2$: $c_{n,k}^* = \sum_{j < k} c_{n-1,j}^* + \sum_{j < k} c_{n-2,j}^*$

§ A tout ESSDC d'ordre (n,k) : $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$, on va associer:

- soit un ESSDC d'ordre $(n-1, b_{q-1})$: $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q-1}$ si $k \in \{a_1, \dots, a_{q-1}\}$
- soit un ESSDC d'ordre $(n-2, b_{q-1})$: $(c_j, b_j)_{1 \leq j \leq q-1}$ si $k \notin \{a_1, \dots, a_{q-1}\}$

où:

$$c_j = \begin{cases} a_j & \text{si } a_j < k \\ a_j - 1 & \text{si } a_j > k \end{cases}$$

La formule en résulte. Evidemment, il faut convenir ici que $c_{n,k}^* = 0$ si $k \geq n$ ou $n \leq 0$ ou $k \leq 0$. §

COROLLAIRE 4

Pour tout $n > k \geq 2$: $c_{n,k}^* = c_{n,k-1}^* + c_{n-1,k-1}^* + c_{n-2,k-1}^*$

§ D'après la proposition 9:

$$\begin{aligned} c_{n,k}^* &= \sum_{j < k} c_{n-1,j}^* + \sum_{j < k} c_{n-2,j}^* \\ &= c_{n-1,k-1}^* + \sum_{j < k-1} c_{n-1,j}^* + c_{n-2,k-1}^* + \sum_{j < k-1} c_{n-2,j}^* \end{aligned}$$

d'où la formule puisque:

$$c_{n,k-1}^* = \sum_{j < k-1} c_{n-1,j}^* + \sum_{j < k-1} c_{n-2,j}^* \quad §$$

Là encore, il faut convenir que: $c_{n,k}^* = 0$ si $n \leq k$ ou $n \leq 0$. Comme il est facile de vérifier que $c_{2,1}^* = 1$ et que $c_{n,1}^* = 0$ pour tout $n \geq 3$, cette dernière relation permet de calculer les $c_{n,k}^*$ par récurrence. Par exemple:

n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k = 1		1	0	0	0	0	0	0	0	0
2			1	1	0	0	0	0	0	0
3				2	2	1	0	0	0	0
4					4	5	3	1	0	0
5						9	12	9	4	1
6							21	30	25	14
7								51	76	69
8									127	196
9										323
10										

$$c_{n,k}^* \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline & & d \\ \hline \end{array} \quad d = a + b + c$$

PROPOSITION 10

Pour tout $k \geq 1$, $c_{n,k}^* = 0$ si $n > 2k$ et $c_{2k,k}^* = 1$

§ D'abord, si $n > 2k$, pour tout ESSD d'ordre (n,k) : $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$, qui vérifie donc: $b_q = k$, il y a donc au maximum $2k$ termes a_j ou b_j . Ainsi, le support de cet ESSD ne saurait être égal à $\{1, \dots, n\}$. Ceci implique: $c_{n,k}^* = 0$. Si maintenant, $n = 2k$, il est facile de constater que le seul ESSDC d'ordre (n,k) est tel que: $a_j = a_{j-1} + 1$ et $b_j = b_{j-1} + 1$ pour tout j et $a_q = n$, $b_q = k$. Ceci implique: $c_{2k,k}^* = 1$. §

En décalant d'une colonne vers la gauche la première ligne du tableau précédent, puis de deux colonnes vers la gauche par rapport à celle qui la précède chacune des lignes suivantes de ce tableau, on peut présenter sous la forme suivante le tableau des $c_{n,k}^*$. Les nombres suivants: $d_{n,k}^*$ vérifient donc:

- $d_{1,k}^* = 1$ pour tout $k \geq 1$ (proposition 10)
- $d_{n,k}^* = d_{n,k-1}^* + d_{n-1,k-1}^* + d_{n-2,k-1}^*$ pour tout $n \geq k$ (corol. 4)
- $d_{n,k}^* = 0$ si $n > k$ ou $n = 0$

Ce sont exactement les "Ballot numbers" généralisés introduits par CARLITZ L.(1969). Ils sont reliés avec les $c_{n,k}^*$ par la formule suivante:

$$d_{n,k}^* = c_{2k-n+1,k}^*$$

Par exemple, on obtient:

n=10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
									1	k = 1
								1	1	2
							2	2	1	3
						4	5	3	1	4
					9	12	9	4	1	5
			21	30	25	14	5	1		6
		51	76	69	44	20	6	1		7
		127	196	189	133	70	27	7	1	8
	323	512	518	392	230	104	35	8	1	9
835	1353	1422	1140	726	369	139	44	9	1	10

 $d_{n,k}^*$

a	b	c
d		

$$d = a + b + c$$

PROPOSITION 11

Pour tout $n \geq 2$, $c_n^* = \sum_{k < n-1} c_{n-1,k}^*$

§ Si $(a_j, b_j)_{1 \leq j \leq q}$ est un ESSDC d'ordre n , **forcément**, $a_{q-1} = n-1$ et $b_{q-1} < n-1$. Il suffit donc, pour obtenir la formule cherchée, de dénombrer ces ESSDC suivant la valeur de b_{q-1} . §

On obtient donc les c_{n+1}^* en calculant les sommes des colonnes du tableau précédant la proposition 10. Par exemple: $c_2^* = 0$, $c_3^* = 1$, $c_4^* = 1$, $c_5^* = 3$... En fait, il n'est pas nécessaire de calculer ces sommes pour obtenir les c_n . Ils figurent en effet dans ce tableau :

COROLLAIRE 5

Pour tout $n \geq 1$, $c_n = c_{n+1,n}^*$

§ D'après le corollaire 2, $c_n = c_n^* + c_{n+1}^*$. En utilisant la proposition précédente, on peut donc écrire:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k < n-1} c_{n-1,k}^* + \sum_{k < n} c_{n,k}^* \\ &= \sum_{k < n-1} c_{n-1,k}^* + \sum_{k < n-1} c_{n,k}^* + c_{n,n-1}^* \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant la proposition 9, il vient:

$$c_n = c_{n+1,n-1}^* + c_{n,n-1}^*$$

Enfin, grâce au corollaire 4 et à la convention $c_{n-1,n-1}^* = 0$, on obtient:

$$c_n = c_{n+1,n}^*$$

§

Ce dernier corollaire légitime la lecture des nombres cherchés: les c_n , en bordure de la diagonale du tableau précédant la proposition 10. Ils apparaissent aussi sur la diagonale du tableau précédant la proposition 11.

VI. RETOUR A q_n , NOMBRE DE QUASI-ORDRE SUR UN ENSEMBLE A n ELEMENTS

PROPOSITION 12

Pour tout $n \geq 1$, $q_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} S(n,k) \{2k\}_{k-1}$ où les $S(n,k)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce et $\{a\}_b = a(a-1)\dots(a-b+1)$.

§ D'après la proposition 5:

$$q_n = \sum_{j=1}^n p_{n,j} q_j$$

puis le corollaire 1:

$$q_n = \sum_{j=1}^n p_{n,j} c_j$$

et la proposition 7:

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{j=1}^n p_{n,j} \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \left(\sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} \binom{j-1}{k-1} p_{n,j} \right) b_k \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors d'utiliser la proposition 1 et les relations:

$$p_{n,k} = S(n,k) k!, \quad b_k = \{2k\}_{k-1} / k!.$$

§

Bien que concise, la relation précédente présente l'inconvénient d'être alternée. Pour évaluer les q_n , il vaut mieux utiliser la relation suivante qui est une conséquence de la proposition 5 et du corollaire 1:

$$q_n = \sum_{k=1}^n p_{n,k} c_k$$

et les méthodes permettant de calculer par récurrence les $p_{n,k}$ (I.5.) et les c_k (V., corollaire 5 notamment). On obtient ainsi **aisément les premières valeurs** des nombres cherchés dans cette publication:

n	1	2	3	4	5	6	7
q_n	1	3	19	183	2371	38703	763099

BIBLIOGRAPHIE

- (1) AVERY P., "Semiorders and representable graphs", Proc. 5th British Combinational conf., (1975), 5-9.
- (2) BARBUT M., MONJARDET B., Ordre et classification . Algèbre et combinatoire, Paris, Hachette Université, (1970).
- (3) BERGE C., Principes de combinatoire, Paris, Dunod, (1968).
- (4) CARLITZ L., "Solution of certain recurrences", Siam Journ. of Appl. Math., 17, 2, (1969), 251-259.
- (5) FISHBURN P.C., Utility theory for decision making, New-York, Wiley, (1970).
- (6) JACQUET-LAGREZE E., "La modélisation des préférences, préordres, quasi-ordres et relations floues", Rapport de recherche de la Direction Scientifique de la SEMA, 80, (1975).
- (7) KREWERAS G., "Sur les éventails de segments", Cahier du Bureau Universitaire de Recherche opérationnelle, 15, (1970), 3-40.
- (8) LUCE R.D., "Semiorders and a theory of utility discrimination", Econometrica, 24, (1956), 178-191.
- (9) MENUET J., "Quasi-odres et modélisation des préférences", Rapport de recherche de la Direction Scientifique de la SEMA, 197, (1974).
- (10) RIORDAN J., Combinatorial Identities, New-York, Wiley, (1968) .
- (11) SCOTT D., "Measurement structures and linear inequalities", Journ. of Math. Psychology, 1, (1964), 233-247.
- (12) SCOTT D., SUPPES P., "Foundational aspects of theories of measurement", The Journ. of symbolic logic, 23, 2, (1958), 113-128.
- (13) SLOANE N.J.A., A handbook of integer sequences, London, Academic Press, (1973).