

G. COMYN

J. CL. VAN DORPE

Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 63-75

[<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__63_0>](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__63_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VALUATION ET SEMI-MODULARITE DANS LES DEMI-TREILLIS

G. COMYN*

J. Cl. VAN DORPE*

Nous** avons été amenés, dans [5], à étudier les propriétés intrinsèques des applications monotones définies sur un treillis T et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous avons étudié des chemins de longueur minimum joignant deux éléments x et y de T , dans le graphe non orienté de couverture associé à T ; nous notons $C_{\wedge}(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ et $C_{\vee}(x,y) = (x, x \vee y, y)$ les chemins particuliers passant respectivement par l'infimum, ou par le supremum, de deux éléments x et y de T . Nous exposons ici une généralisation de ces résultats au cas des demi-treillis valués et énonçons une caractérisation de distance définie à partir d'une valuation.

En particulier, lorsque l'application monotone choisie est une graduation, nous retrouvons la caractérisation de la semi-modularité dans les demi-treillis énoncée par B. Monjardet [6] et qui généralise les résultats cités en [1] et [3] pour les treillis.

1. NOTATIONS

. Soit T un sup-demi-treillis (de longueur finie), dont la relation d'ordre est notée $\leq$.

En reprenant les notations de [5], nous appelons séquence d'éléments comparables de $(T, \leq)$ (en abrégé s.e.c.), de longueur n , $n \in \mathbb{N}$, une séquence notée $[x_i]_0^n$ de $n+1$ éléments de T , telle que, pour

* I.U.T., Université des Sciences et Techniques de Lille-I, Département Informatique, Villeneuve d'Asq.

**Nous remercions B. Monjardet des conseils qu'il nous a donnés et de l'attention qu'il a portée à nos travaux en cours.

tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, on ait :

$$x_i \leq x_{i+1} \quad \text{ou} \quad x_i \geq x_{i+1}$$

Soit v une application strictement croissante de T dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

$$x < y \quad \text{implique} \quad v(x) < v(y)$$

Soit I l'ensemble des indices d'une s.e.c. $[x_i]_0^n$ donnée :

$$I^+ = \{i \in I \mid x_{i+1} \geq x_i\}$$

$$I^- = \{i \in I \mid x_i \geq x_{i+1}\}$$

Pour toute s.e.c., nous définissons :

$$\Delta^+([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^+} [v(x_{i+1}) - v(x_i)]$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^-} [v(x_i) - v(x_{i+1})]$$

$$\Delta([x_i]_0^n) = \Delta^+([x_i]_0^n) + \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Etant donné un couple quelconque $(x, y) \in T \times T$, nous notons $\mathcal{C}(x, y)$ l'ensemble (non vide) de toutes les s.e.c. reliant x à y .

Notons de plus $\mathcal{C}_k(x, y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur k reliant x à y .

On montre facilement que [5] :

I.1.- PROPOSITION.

Etant donnés deux éléments x et y de T , C' et C'' deux s.e.c. reliant x à y , les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\Delta(C') \leq \Delta(C'') \iff \Delta^+(C') \leq \Delta^+(C'') \iff \Delta^-(C') \leq \Delta^-(C'')$$

Nous dirons qu'une s.e.c. $C \in \mathcal{C}(x, y)$ est v -minimale si elle minimise l'une quelconque des trois quantités Δ , Δ^- ou Δ^+ et nous notons :

$$\delta(x,y) = \inf_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta(C)$$

Il a été démontré en [5] que, lorsqu'elle est définie à partir d'une application v strictement croissante sur T , δ est une distance sur T .

Si T est un sup-demi-treillis gradué et que v est une fonction de rang, δ coïncide avec la distance habituelle [2] définie sur le graphe de couverture G correspondant au sup-demi-treillis T par $\delta(x,y) =$ longueur du plus court chemin entre x et y , pour tout $(x,y) \in T \times T$. Dans le cas général, nous étudions ici les propriétés de δ et les conditions sur v pour que δ ait une expression simple.

II. CARACTERISATION DE s.e.c. v -MINIMALES DANS T .

II.1.- THEOREME.

Soit T un sup-demi-treillis, soit v une application strictement croissante définie sur T , à valeur dans $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la s.e.c.

$C_v(x,y) = (x, x \vee y, y)$ soit v -minimale, est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tel que :

$$z \leq x \quad \text{et} \quad z \leq y$$

la condition suivante soit vérifiée :

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y)$$

REMARQUE. Les résultats obtenus dans [5] permettent de donner de ce théorème l'énoncé équivalent :

Une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\delta(x,y) = 2 v(x \vee y) - v(x) - v(y)$$

est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tel que :

$$z \leq x \quad \text{et} \quad z \leq y$$

on ait :

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y)$$

DEMONSTRATION.

. La condition est nécessaire

En effet, $C_v(x,y)$ est v -minimale

$$\Longleftrightarrow \forall (x,y) \in T \times T, \Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

pour tout $C \in \mathcal{C}(x,y)$ d'après la proposition I-1

$$\Longleftrightarrow v(x \vee y) - v(y) \leq \Delta^-(C)$$

En particulier, pour la séquence (x,z,y) , pour tout z vérifiant la condition $z \leq x$, $z \leq y$,

$$v(x \vee y) - v(y) \leq v(x) - v(z)$$

soit

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(y) \quad \underline{\text{c.q.f.d.}}$$

. La condition est suffisante

Soit, en effet, $(x,y) \in T \times T$, un couple quelconque d'éléments de T ; soit z un élément de T vérifiant $z \leq x$ et $z \leq y$ (nous étudierons ultérieurement le cas où un tel z n'existe pas).

La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur des séquences reliant x à y .

La propriété est évidente pour des séquences appartenant à $\mathcal{C}_1(x,y)$ (x et y comparables), ainsi que pour des séquences appartenant à $\mathcal{C}_2(x,y)$. En effet, soit t un élément de T , soit $C \in \mathcal{C}_2(x,y)$ la séquence (x,t,y)

$$- \text{ Si } t \leq x, t \leq y \implies v(x \vee y) - v(y) \leq v(x) - v(t)$$

$$\implies \Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

$$- \text{ Si } t \geq x, t \geq y, \text{ alors } t \geq x \vee y$$

$$\implies v(t) \geq v(x \vee y)$$

$$\implies v(t) - v(y) \geq v(x \vee y) - v(y)$$

$$\implies \Delta^-(C) \geq \Delta^-(C_v(x,y))$$

Montrons que la propriété reste vraie pour des séquences de longueur 3 .
 Soit $C = (x,t,u,y)$, $t \geq x$, $u \leq y$, $u \leq t$, une séquence de longueur 3 (la démonstration serait analogue si $t \leq x$, $u \geq y$, $t \leq u$) reliant x à y : $C \in C_3(x,y)$

$$t \geq x \implies y \vee t \geq x \vee y \implies v(t \vee y) \geq v(x \vee y)$$

$$\implies \Delta^-(C_v(x,y)) = v(x \vee y) - v(y) \leq v(t \vee y) - v(y)$$

$$\implies \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(t \vee y) - v(t) + v(t) - v(y)$$

Or : $v(t \vee y) - v(t) \leq v(y) - v(u)$ par hypothèse

$$(u \leq t \text{ et } u \leq y)$$

$$\implies \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(y) - v(u) + v(t) - v(y)$$

$$\implies \Delta^-(C_v(x,y)) \leq v(t) - v(u) = \Delta^-(C)$$

Ainsi $\Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. C appartenant à $C_3(x,y)$

Supposons maintenant que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$ et pour toute s.e.c. $C \in C_{n-1}(x,y)$, $\Delta^-(C_v(x,y)) \leq \Delta^-(C)$. Soit $[x_i]_0^n$ une s.e.c. de longueur n reliant x à y :

$$\begin{aligned} \Delta^-([x_i]_0^n) &= \Delta^-([x_i]_0^{n-1}) + \Delta^-((x_{n-1}, y)) \\ &\geq \Delta^-(C_v(x, x_{n-1})) + \Delta^-((x_{n-1}, y)) \end{aligned}$$

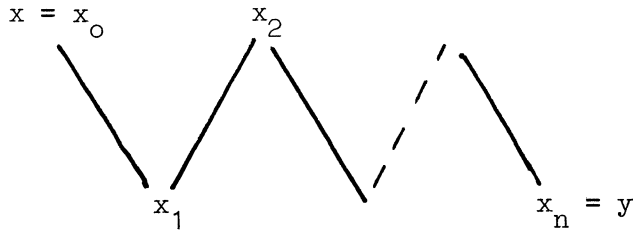
En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \implies \Delta^-([x_i]_0^n) &\geq \Delta^-((x, x \vee x_{n-1}, x_{n-1}, y)) \\ &\geq \Delta^-((x, x \vee y, y)) = \Delta^-(C_v(x,y)) \end{aligned}$$

en appliquant le résultat obtenu pour les séquences de longueur 3 .

c.q.f.d.

REMARQUE.- S'il n'existe pas de z tel que $z \leq x$ et $z \leq y$, la s.e.c. $C_v(x,y)$ est encore v -minimale pour tout $(x,y) \in T \times T$. En effet, si $[x_i]_0^n$ est une séquence de longueur n reliant x à y :



On peut appliquer au triplet (x_0, x_1, x_2) le raisonnement précédent qui permet d'obtenir :

$$\Delta^-(x_0, x_1, x_2) \geq \Delta^-(x_0, x_0 \vee x_2, x_2)$$

En réitérant ce raisonnement, on est ramené au cas des s.e.c. de longueur 2 pour lesquelles le résultat est évident.

On obtient, par dualité, le résultat suivant :

II.2.- THEOREME.

Soit T un inf-demi-treillis, soit v une application strictement croissante définie sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que

$C_\wedge(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ soit v -minimale est que, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de T tels que :

$$z \geq x \text{ et } z \geq y$$

la condition suivante est vérifiée :

$$v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x) + v(y)$$

Comme précédemment, le résultat obtenu dans [5] : $C_\wedge(x,y)$ v -minimale équivalent à $\delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$, permet de donner une autre formulation de ce Théorème.

Nous pouvons alors généraliser comme suit la notion de valuation dans les treillis au cas des demi-treillis :

II.3.- PROPOSITION.

Soit v une application strictement croissante d'un sup-demi-treillis T dans $\mathbb{R}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $\delta(x,y) = \delta(x, x \vee y) + \delta(x \vee y, y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$
- (2) $\delta(x,y) = 2 v(x \vee y) - v(x) - v(y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$
($C_v(x,y)$ est v -minimale)
- (3) $2 v(x \vee y) - v(x) - v(y)$ est une distance sur T
- (4) pour tout $x,y,z \in T$, $v(x \vee y) + v(z) \leq v(x \vee z) + v(z \vee y)$
- (5) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \leq x$

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x) + v(z \vee y)$$

- (6) pour tout $x,y,z \in T$ avec $z \leq x$, $z \leq y$

$$v(x) + v(y) \geq v(z) + v(x \vee y)$$

Si, de plus T est un treillis, ces conditions sont équivalentes à :

- (7) pour tout $x,y \in T$, $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \leq v(x) + v(y)$

DEMONSTRATION.-

.(1) $\iff$ (2) évident d'après la définition de $\delta(x,y)$

.(3) $\implies$ (4) : en appliquant l'inégalité triangulaire à

$$2 v(x \vee y) - v(x) - v(y) , \text{ on obtient :}$$

$$2v(x \vee y) - v(x) - v(y) \leq 2v(x \vee y) - v(x) - v(z) + 2v(y \vee z) - v(y) - v(z)$$

soit encore :

$$v(x \vee y) + v(z) \leq v(x \vee z) + v(y \vee z)$$

.(4) $\implies$ (5) et (5) $\implies$ (6) sont évidents.

. L'équivalence des propriétés (1) et (6) a fait l'objet du théorème II-1.

. (2) $\implies$ (3) : la démonstration a été réalisée en [5]

Si l'on suppose maintenant que T est un treillis, il résulte immédiatement des résultats énoncés en [5] que les propriétés (2) et (7) sont équivalentes.

REMARQUE.- G. BORDES [4] a montré par ailleurs que la relation (5) impliquait (3).

On obtient par dualité les propriétés suivantes relatives aux applications strictement croissantes sur les inf-demi-treillis :

II.4.- PROPOSITION.

Soit v une application strictement croissante d'un inf-demi-treillis T dans $\mathbb{R}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \delta(x,y) = \delta(x, x \wedge y) + \delta(x \wedge y, y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in T \times T$$

$$(2) \quad \delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in T \times T \\ (C_{\wedge}(x,y) \text{ est } v\text{-minimale})$$

$$(3) \quad v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y) \text{ est une distance sur } T$$

$$(4) \quad \text{pour tout } x,y,z \in T, \quad v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x \wedge z) + v(z \wedge y)$$

$$(5) \quad \text{pour tout } x,y,z \in T \text{ avec } z \geq x.$$

$$v(x \wedge y) + v(z) \geq v(x) + v(z \vee y)$$

$$(6) \quad \text{pour tout } x,y,z \in T \text{ avec } z \geq x, \quad z \geq y$$

$$v(x) + v(y) \leq v(z) + v(x \wedge y)$$

Si, de plus, T est un treillis, ces conditions sont équivalentes à :

$$(7) \quad \text{pour tout } x,y \in T, \quad v(x \vee y) + v(x \wedge y) \geq v(x) + v(y)$$

Les deux propositions précédentes permettent de généraliser de la façon suivante, à des demi-treillis, la notion de valuation définie sur des treillis :

DEFINITION.-

Une application strictement croissante d'un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) dans $\mathbb{R}$ sera dite valuation si elle vérifie l'une quelconque des propriétés figurant dans la proposition II-3 (resp. II-4).

III. GRADUATION ET SEMI-MODULARITE DANS LES DEMI-TREILLIS.

Les résultats que nous présentons dans ce paragraphe sont obtenus par application des propriétés précédentes aux demi-treillis gradués.

B. MONJARDET [6] aboutit à ces mêmes résultats en donnant directement une caractérisation métrique de la semi-modularité sur certains ensembles ordonnés.

Soit T un sup-demi-treillis; T est dit semi-modulaire supérieurement ([1] et [3]) si la condition suivante est vérifiée pour tout triplet (x, y, z) de $T \times T \times T$:

$$z \prec x \quad \text{et} \quad z \prec y \implies x \prec x \vee y \quad \text{et} \quad y \prec x \vee y$$

en notant $\prec$ la relation : $x \prec y \iff x$ précède y .

Pour traduire la notion de prédécesseur, nous utilisons les propriétés de graduation : une application r de T dans $\mathbb{N}$ est appelée graduation ou fonction de rang si elle vérifie la condition suivante :

$$(1) \quad x \prec y \implies r(y) = r(x) + 1$$

Les résultats obtenus précédemment avec des applications strictement croissantes restent valables; en outre, la propriété (1) intervient dans la démonstration des lemmes et théorèmes suivants :

LEMME 1.- [1] Un sup-demi-treillis semi-modulaire supérieurement est gradué.

LEMME 2.- [1] [6] Un sup-demi-treillis T est semi-modulaire supérieurement si et seulement si, pour tout $x, y, z \in T$, $y \parallel z$ (i.e. y non comparable à z), $x \prec y$ et $x < z$ impliquent $z \prec y \vee z$.

III.1.- THEOREME

Un sup-demi-treillis T est semi-modulaire supérieurement si et seulement s'il est gradué, la fonction de rang vérifiant, pour tout $x, y, z \in T$ tels que :

$$\begin{aligned} z &\leq x \\ z &\leq y \end{aligned}$$

la condition suivante :

$$(1) \quad r(x \vee y) + r(z) \leq r(x) + r(y)$$

DEMONSTRATION.-

- Condition suffisante :

Soient $x, y, z \in T$ tels que :

$$\begin{aligned} z &\prec x \\ \text{et} \\ z &\prec y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r(x) = r(y) = r(z) + 1$$

$$r(x \vee y) - r(y) \leq r(x) - r(z) = 1$$

$$\Rightarrow r(x \vee y) - r(y) = 1 \quad (\text{le cas } r(x \vee y) - r(y) = 0 \text{ est impossible}).$$

$$\Rightarrow y \prec x \vee y$$

On montre de même que $x \prec x \vee y$

$$\Rightarrow T \text{ est semi-modulaire supérieurement.}$$

c.q.f.d.

- Condition nécessaire :

Soient $x, y, z \in T$ tels que :

$$\begin{aligned} z &\leq x \\ \text{et} \\ z &\leq y \end{aligned}$$

La démonstration se fait par récurrence sur la longueur de la s.e.c. reliant z à x .

En vertu du lemme 1 , T est gradué par une fonction de rang r

1) supposons que $z \prec x$

$$\Rightarrow r(x) - r(z) = 1$$

$$z \prec x \Rightarrow x \not\prec z \vee y = y$$

Deux possibilités :

$$\cdot \quad x < z \vee y \Rightarrow x \vee y = z \vee y = y \Rightarrow x \leq y$$

$$\Rightarrow r(x \vee y) - r(y) = 0 < r(x) - r(z) = 1$$

$$\cdot \quad x \parallel z \vee y \Rightarrow x \vee y \succ z \vee y = y \quad \text{en vertu du lemme 2.}$$

$$\Rightarrow r(x \vee y) - r(y) = 1$$

$$\Rightarrow r(x \vee y) - r(y) = r(x) - r(z)$$

$$\Rightarrow \text{l'inégalité (1) est bien vérifiée dans les 2 cas.}$$

2) Supposons alors qu'il existe une s.e.c. $x_1, \dots, x_n$ telle que

$$x \succ x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n \succ z$$

et supposons l'inégalité (1) vérifiée à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire que le plus court chemin pour aller de x_1 à y est celui passant par $x_1 \vee y$, soit

$$r(x_1 \vee y) - r(y) \leq r(x_1) - r(z)$$

$$x_1 \prec x \text{ implique } x \not\prec x_1 \vee y$$

$$\cdot \text{ soit } x < x_1 \vee y \Rightarrow x \vee y = x_1 \vee y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r(x \vee y) - r(y) &= r(x_1 \vee y) - r(y) \\ &\leq r(x_1) - r(z) < r(x) - r(z) \end{aligned}$$

$$\cdot \text{ soit } x \parallel x_1 \vee y \Rightarrow x_1 \vee y \prec x \vee y \text{ en vertu du lemme 2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r(x \vee y) - r(y) &= r(x_1 \vee y) + 1 - r(y) \\ &\leq r(x_1) + 1 - r(z) = r(x) - r(z) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Il résulte des Théorèmes II-1 et III-1 :

III-2.- COROLLAIRE.

Soit T un sup-demi-treillis; soit r une fonction de graduation sur T . Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit semi-modulaire supérieurement est que $C_V(x,y)$ soit r -minimale pour tout couple (x,y) de $T \times T$.

Les résultats suivants sont obtenus immédiatement par dualité.

LEMME 3.- Un Inf-demi-treillis T est semi-modulaire inférieurement si et seulement si, pour tout $x,y,z \in T$, $x \succ y$, $x > z$ et $y \parallel z$ implique $z \succ y \wedge z$.

III.3.- THEOREME.

Un Inf-demi-treillis T est semi-modulaire inférieurement si et seulement si il est gradué, la fonction de rang vérifiant pour tout $x,y,z \in T$, tels que

$$z \geq x \text{ et } z \geq y$$

la condition suivante :

$$r(x \wedge y) + r(z) \geq r(x) + r(y)$$

III.4.- COROLLAIRE.

Soit T un inf-demi-treillis; soit r une fonction de graduation sur T . Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit semi-modulaire inférieurement est que $C_\wedge(x,y)$ soit r -minimale pour tout $(x,y) \in T \times T$.

Il résulte des corollaires III-2 et III-4 :

III-5.- COROLLAIRE.

Soit T un treillis; soit r une graduation sur T . Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit modulaire est que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, les séquences $C_\wedge(x,y)$ et $C_V(x,y)$ soient r -minimales.

On retrouve donc la caractérisation des treillis modulaires [1] :

Un treillis T est modulaire si et seulement s'il est gradué, sa fonction de rang vérifiant, pour tout $(x, y) \in T \times T$:

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) = r(x) + r(y)$$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BARBUT M. et MONJARDET B., Ordre et classification, PARIS, Hachette, 1970.
- [2] BERGE C., Graphes et hypergraphes, PARIS, Dunod, 1970
- [3] BIRKHOFF G., Lattice theory, PROVIDENCE, American Math. Society, Colloquium Publication, 1967
- [4] BORDES G., "Métrique bornée définie par des valuations sur un demi-treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976
- [5] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Distance définie par une application monotone sur un treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976
- [6] MONJARDET B., "Caractérisation métrique de la semi-modularité dans les treillis", Math. Sci. hum., 56, 1976