MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. GRIMONPREZ
J. CL. VAN DORPE

Distance définie par une application monotone sur un treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 56 (1977), p. 47-62
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__47_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (14^{e} année, n° 56, *1976*, p.47-62)

DISTANCE DEFINIE PAR UNE APPLICATION MONOTONE SUR UN TREILLIS

G. GRIMONPREZ*
J. Cl. VAN DORPE*

Lors du Colloque de Marseille Luminy (1973), sur la Théorie de l'Information, J. Kampe de Feriet [11] expose les concepts de base de l'information et présente une excellente synthèse des différentes théories généralisant la Théorie de l'Information telle que la conçurent Wiener et Shannon en 1948, à partir de la notion de probabilité; deux directions axiomatiques sont essentiellement apparues :

. L'étude de la mesure d'information, notée $I(A)$, fournie par la réalisation d'un événement A ; l'espace de travail est (Ω,S) , où S est une classe de parties de Ω (souvent, il s'agit de $P(\Omega)$); cette axiomatique a été développée essentiellement par J. Kampe de Feriet et B. Forte.

. L'étude de la mesure d'information, notée $H(\pi)$, fournie par une expérience (ou partition π); l'espace de référence est alors l'ensemble des partitions définies sur un ensemble donné. Cette axiomatique a fait l'objet de nombreux travaux (en particulier de la part de B. Forte et N. Pintacuda).

D'autres espaces de référence furent ultérieurement choisis pour définir une information :

. Une classe C de propositions ayant une structure de treillis

* I.U.T. Université des Sciences et Techniques de Lille-I, département Informatique, Villeneuve d'Asq.

complet orthocomplété, utilisée par J. Sallantin pour appliquer la théorie généralisée de l'information à la mécanique quantique.

. Le treillis des préordres que G. Comyn et J. Losfeld [3] utilisèrent pour appliquer la Théorie de l'Information à l'analyse des données.

Afin d'unifier toutes ces définitions d'informations, J. Losfeld définit une mesure d'information généralisée sur un ensemble partiellement ordonné [12] et montra que la structure d'ensemble privilégiée pour la définition d'une information était celle de treillis.

En essayant de retrouver certains résultats informationnels fondamentaux de la Théorie des Questionnaires [6] , nous avons été amenés, à partir d'une mesure d'information généralisée J au sens de J. Losfeld, définie sur un ensemble partiellement ordonné T , à introduire la notion de bilan en information [7] . Nous en avons déduit, entre autres, une distance en information, ainsi qu'une application notée J_R , appelée information de ressemblance, qui généralise la notion d'information mutuelle à un treillis T quelconque ([8],[9]). L'ensemble de ces résultats est une conséquence directe de l'axiome de monotonicité de J . Il permet en particulier d'apporter des solutions à certains problèmes d'analyse des données du type suivant :

"Déterminer un critère qui quantifie la valeur de l'information qu'un résumé apporte sur la totalité des données initiales".

Ceci nous a amenés à étudier les propriétés intrinsèques des applications monotones définies sur T et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ [9] .

Nous montrons que des notions introduites résulte naturellement la définition d'une quasi-métrique sur T , dont nous déduisons une métrique lorsque l'application v est strictement monotone.

L'introduction d'hypothèses particulières sur v permet de donner des expressions explicites de cette métrique. Nous retrouvons notamment la distance habituelle sur les treillis modulaires lorsque v est une valuation strictement croissante.

Les propriétés de la métrique que nous introduisons dans cet article ont permis son utilisation, lorsque l'application v est une mesure d'information généralisée, à la réalisation d'algorithmes en taxinomie numérique, notamment pour la détermination de "classes homogènes" de bactéries, et la construction de questionnaires sur ces classes [10].

Certains des résultats présentés ici ont été repris depuis dans le cadre des demi-treillis et ont permis, lorsque l'application v est une graduation, de caractériser la semi-modularité dans les demi-treillis [4] [13].

I.- RESULTATS GENERAUX

Soit T un treillis dont la relation d'ordre est notée $\leq$; nous appellons séquence d'éléments comparables de longueur $n \in \mathbb{N}$ de $(T,\leq)$ (en abrégé s.e.c.), une séquence notée $[x_i]_0^n$ de $n+1$ éléments de T telle que, pour tout $i = 0,1,\ldots,n-1$, on ait [7] :

$$x_i \leq x_{i+1} \quad \text{ou} \quad x_i \geq x_{i+1}$$

Soit v une application monotone de T dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que nous supposerons décroissante, i.e. telle que, pour tout $(x,y) \in T \times T$, $x < y$ implique $v(x) \geq v(y)$. Nous donnerons, par la suite, les résultats duaux lorsque v est supposée croissante dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Notons $v(x/y)$ l'application de $T \times T$ dans $R \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$v(x/y) = v(x \wedge y) - v(y) \quad \text{si} \quad v(y) < +\infty$$

$$v(x/y) = v(x) \quad \text{si} \quad v(y) = +\infty$$

Soit I l'ensemble des indices d'une s.e.c. $[x_i]_0^n$ donnée :

$$I^+ = \{i \in I | x_{i+1} \leq x_i\}$$

$$I^- = \{i \in I | x_i \leq x_{i+1}\}$$

Pour toute s.e.c., nous définissons [7] :

$$\Delta^+([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^+} |v(x_{i+1}/x_i)|$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \sum_{i \in I^-} |v(x_i/x_{i+1})|$$

$$(1) \qquad \Delta([x_i]_0^n) = \Delta^+([x_i]_0^n) + \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Δ^+ , Δ^- , Δ sont des quantités finies ou non, positives ou nulles, et si Δ^+ et Δ^- ne prennent pas simultanément des valeurs infinies, elles vérifient :

$$(2) \qquad v(x_n) - v(x_0) = \Delta^+([x_i]_0^n) - \Delta^-([x_i]_0^n)$$

Cette quantité, finie ou non, peut être positive, négative ou nulle.

Etant donnés deux éléments quelconques x et y de T , il est naturel de considérer l'ensemble de toutes les s.e.c. reliant x à y . Nous noterons $C(x,y)$ cet ensemble : il n'est jamais vide.

Notons de plus $C_k(x,y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur k reliant x à y .

Parmi les éléments de $C(x,y)$, nous nous proposons d'étudier ceux qui minimisent les quantités Δ^+ , Δ^- ou Δ. On montre facilement que :

I.1.- PROPOSITION.
Etant donnés deux éléments x et y de T tels que $v(x) \cdot v(y) < +\infty$, C_1 et C_2 deux s.e.c. reliant x à y , les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2) \iff \Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2) \iff \Delta^-(C_1) \leq \Delta^-(C_2) .$$

DEMONSTRATION.

Par hypothèse, $v(x)$ et $v(y)$ prennent des valeurs finies; Δ^+ , Δ^- et Δ prennent alors simultanément des valeurs finies ou infinies. Le cas infini étant trivial, considérons que Δ^+ , Δ^- et Δ prennent des valeurs finies.

Supposons que $\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2)$

Par définition :

$$\Delta(C_1) = \Delta^+(C_1) + \Delta^-(C_1)$$

$$\Delta(C_2) = \Delta^+(C_2) + \Delta^-(C_2)$$

$$V(C_1) = \Delta^+(C_1) - \Delta^-(C_1) = v(y) - v(x) = \Delta^+(C_2) - \Delta^-(C_2) = V(C_2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(C_1) \leq \Delta(C_2) \\ V(C_1) = V(C_2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta^+(C_1) + \Delta^-(C_1) + \Delta^+(C_1) - \Delta^-(C_1) \leq \Delta^+(C_2) + \Delta^-(C_2) + \Delta^+(C_2) - \Delta^-(C_2)$$

soit

$$\Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2)$$

On montre, de manière analogue que :

$$\Delta^+(C_1) \leq \Delta^+(C_2) \Longrightarrow \Delta^-(C_1) \leq \Delta^-(C_2) \Longrightarrow \Delta(C_1) \leq \Delta(C_2)$$

En raison de la proposition précédente, nous dirons que $C \in C(x,y)$ est v-minimale si et seulement si elle minimise l'une quelconque des quantités Δ, Δ^+ ou Δ^- .

Pour tout (x,y) de $T \times T$, notons alors :

$$\delta^+(x,y) = \inf_{C \in C(x,y)} \Delta^+(C)$$

$$\delta^-(x,y) = \inf_{C \in C(x,y)} \Delta^-(C)$$

$$\delta(x,y) = \inf_{C \in C(x,y)} \Delta(C)$$

I.2.- PROPOSITION.

a) L'application δ de $T \times T$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ est une quasi-distance sur T [2]

b) Si $x < y$, $\delta(x,y) = v(x) - v(y)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

c) Les quantités δ^+ et δ^- sont des applications de $T \times T$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

. $\delta^+(x,x) = \delta^-(x,x) = 0$ pour tout $x \in T$

. $\delta^+(x,y) = \delta^-(y,x)$ pour tout $(x,y) \in T \times T$

. δ^+ et δ^- vérifient l'inégalité triangulaire

d) De plus, δ^+ et δ^- vérifient :

(i) $v(y) - v(x) = \delta^+(x,y) - \delta^-(x,y)$

pour tout (x,y) de $T \times T$ tel que $v(x).v(y) < +\infty$

(ii) $\delta(x,y) = \delta^+(x,y) + \delta^-(x,y)$.

DEMONSTRATION.

a) δ est une quasi-distance sur T , c'est-à-dire :

. $\delta(x,x) = 0$. Il suffit de considérer la s.e.c. de longueur 0 formée de l'élément x .

. $\delta(x,y) = \delta(y,x)$. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque suivante :

A toute s.e.c. $C = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ correspond une s.e.c. $\bar{C}$ reliant y à x :

$$\bar{C} = (y_0 = y \ , \ y_1 = x_{n-1} \ , \ \ldots \ , \ y_n = x_0 = x)$$

et l'on a :

$$\Delta^+(C) = \Delta^-(\bar{C}) \quad , \quad \Delta^-(C) = \Delta^+(\bar{C}) \quad , \quad \Delta(C) = \Delta(\bar{C})$$

. $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Soient $[x_i]_0^n$ une s.e.c. quelconque reliant x à z , $[y_i]_0^m$ une s.e.c. quelconque reliant z à y .

La s.e.c. $C = (x_0,x_1,\ldots,x_n = y_0,y_1,\ldots,y_m)$ relie x à y d'où :

$$\delta(x,y) \leq \Delta(C) = \Delta([x_i]_0^n) + \Delta([y_i]_0^m)$$

$$\Longrightarrow \delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,x)$$

b) Ce résultat est évident.

c) Les démonstrations des propriétés des quantités δ^+ et δ^- sont analogues aux démonstrations précédentes.

d) (i) résulte de l'égalité (2) et de la proposition I-1.
(ii) vient directement de (1) et de I-1.

En raison de la proposition précédente, l'égalité $\delta(x,y) = 0$ n'entraîne pas toujours $x = y$. Cependant, on montre que :

> Etant donné un treillis T fini, $T_0 = \{x \in T | v(x) < +\infty\}$, une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de l'application δ à l'ensemble des couples (x,y) de $T_0 \times T_0$ définisse une distance est que l'application v soit strictement monotone.(L'application v est dite strictement monotone décroissante (resp. croissante) si $x < y$ implique $v(x) > v(y)$ (resp. $v(x) < v(y)$)).

II.- HYPOTHESES H.

Il est clair, lorsque le treillis T est fini, qu'il existe au moins une s.e.c. v-minimale entre deux éléments x et y donnés de T , ce qui n'est pas toujours le cas si T est quelconque. Dans le cas fini, nous pouvons mettre en oeuvre un algorithme de type Branch et Bound [5] permettant d'obtenir toutes les s.e.c. v-minimales reliant x à y , ce qui nous donne la possibilité de calculer les quantités $\delta^+(x,y)$, $\delta^-(x,y)$, $\delta(x,y)$. (Remarquons que la connaissance d'une seule s.e.c. v-minimale permet de déterminer toutes ces quantités).

Cet algorithme n'offre cependant qu'un intérêt relatif, étant donné

qu'il nécessite des temps d'exécution importants; aussi avons-nous été amenés [7] lorsque le treillis T est quelconque (fini ou infini), à introduire des hypothèses particulières sur v permettant d'obtenir des expressions explicites des quantités δ^+ , δ^- et δ utilisables directement au niveau des applications.

Etant donnés deux éléments x et y de t tels que $v(x) \,.\, v(y) < +\infty$, $C_2(x,y)$ l'ensemble des s.e.c. de longueur 2 reliant x à y , il est clair que la valeur minimale de la quantité $\Delta^-(C)$ pour toutes les s.e.c. de $C_2(x,y)$ est égale à :

$$\mathrm{Inf}(v(x/y)\ ,\ v(x/x \vee y)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i.e. } \mathrm{Inf}(v(x \wedge y) - v(y)\ ,\ v(x) - v(x \vee y)) \\ \\ \text{si } \ v(x) \,.\, v(y) < +\infty \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire que, pour les s.e.c. de longueur 2 reliant x à y , une s.e.c. v-minimale est de la forme $(x, x \vee y, y)$ notée $C_\vee(x,y)$ ou de la forme $(x, x \wedge y, y)$ notée $C_\wedge(x,y)$. Ceci nous amène à introduire les hypothèses suivantes sur le treillis $(T,\leq)$:

$$H0 \ : \ \forall\, (x,y) \in T \times T \ , \ v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$$

$$H1 \ : \ \forall\, (x,y) \in T \times T \ , \ v(x) + v(y) \geq v(x \wedge y) + v(x \vee y)$$

$$H2 \ : \ \forall\, (x,y) \in T \times T \ , \ v(x) + v(y) \leq v(x \wedge y) + v(x \vee y)$$

II-1.- THEOREME

. Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, la s.e.c. $C_\wedge(x,y) = (x, x \wedge y, y)$ soit v-minimale, est que v vérifie l'hypothèse H1 ; soit encore :

$$(1) \quad v \text{ vérifie } H1 \iff \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(x)$$

$$\iff \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y)$$

$$\iff \delta(x,y) = 2v(x \wedge y) - v(x) - v(y)$$

REMARQUE : On montre de même les équivalences suivantes :

. v vérifie H2

$\Longleftrightarrow \quad \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(y) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \vee y)$

. v vérifie HO

$\Longleftrightarrow \quad \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(x \wedge y) - v(x)$
$= v(y) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y)$
$= v(x) - v(x \vee y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = v(x \wedge y) - v(x \vee y)$
$- 2v(x \wedge y) - v(x) - v(y) = v(x) + v(y) - 2v(x \vee y)$

. Si l'on suppose v monotone croissante, il vient alors :

. v vérifie H1

$\Longleftrightarrow \quad \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = v(x \vee y) - v(x)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = v(x \vee y) - v(y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = 2v(x \vee y) - v(x) - v(y)$

. v vérifie H2

$\Longleftrightarrow \quad \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(y) - v(x \wedge y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x) - v(x \wedge y)$

$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$

. v vérifie HO

$\Longleftrightarrow \quad \delta^+(x,y) = \Delta^+(C_\vee(x,y)) = \Delta^+(C_\wedge(x,y)) = v(x \vee y) - v(x)$
$= v(y) - v(x \wedge y)$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta^-(x,y) = \Delta^-(C_\vee(x,y)) = \Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \vee y) - v(y)$$
$$= v(x) - v(x \wedge y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \delta(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$$
$$= 2v(x \vee y) - v(x) - v(y)$$
$$= v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$$

DEMONSTRATION.

Nous allons démontrer (1), les démonstrations étant analogues pour les autres résultats.

. CONDITION NECESSAIRE

$\forall\ (x,y) \in T \times T$, $\forall\ C \in C(x,y) : \Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$

Prenons $C = (x, x \vee y, y) : \Delta^-(C) = v(x) - v(x \vee y)$

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y)$$

d'où $\quad v(x \wedge y) - v(y) \leq v(x) - v(x \vee y)$ c.q.f.d.

. CONDITION SUFFISANTE

. si x est égal à y , le problème est résolu.

. soit x différent de y :

. nous dirons qu'une s.e.c. $[x_i]_0^n \in C(x,y)$ est sans cycle si

$$\forall\ (i,j) \in \{0,1,\ldots,n\} \times \{0,1,\ldots,n\}\ ,\ i \neq j\ ,$$

l'on a : $\quad x_i \neq x_j$

. elle sera dite alternée si :

$$\forall\ i = 0,\ldots,n-2 : \quad (x_i \leq x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} \geq x_{i+2})$$
$$\text{ou} \quad (x_i \geq x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} \leq x_{i+2})$$

Etant donnée une s.e.c. C reliant x à y , il existe une s.e.c. unique, sans cycle et alternée, $\hat{C} = [x_i]_0^n$ construite à partir de C et telle que :

. $\forall\ i = 0,\ldots,n-1$: $x_i \neq x_{i+1}$

. $\forall\ i = 0,\ldots,n-2$: $(x_i < x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} > x_{i+2})$

ou $(x_i > x_{i+1} \Longrightarrow x_{i+1} < x_{i+2})$

. $\Delta^-(\hat{C}) \leq \Delta^-(C)$

Nous n'utiliserons plus, désormais, que des s.e.c. du type $\hat{C}$.
La démonstration s'effectue par récurrence sur la longueur de la s.e.c. reliant x à y .
Il est facile de montrer que $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. appartenant à $C_1(x,y)$ ou $C_2(x,y)$.

Soit C une s.e.c. de longueur 3 reliant x à y : $C \in C_3(x,y)$

$$C = (x,z,t,y) \quad \text{avec} \quad (x \leq z\ ,\ z \geq t\ ,\ t \leq y)$$

$$\text{ou} \quad (x \geq z\ ,\ z \leq t\ ,\ t \geq y)$$

Supposons que $(x \leq z\ ,\ z \geq t\ ,\ t \leq y\ )$

$$\left.\begin{array}{l} t \leq y \Longrightarrow x \wedge t \leq x \wedge y \\ v \text{ décroissante} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad v(x \wedge t) \geq v(x \wedge y)$$

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) = v(x \wedge y) - v(y) \leq v(x \wedge t) - v(y)$$

$$\leq v(x \wedge t) - v(t) + v(t) - v(y)$$

v vérifie H1 $\Longrightarrow v(x \wedge t) - v(t) \leq v(x) - v(x \vee t)$

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq v(x) - v(x \vee t) + v(t) - v(y)$$

$$z \geq x \vee t \Longrightarrow v(z) \leq v(x \vee t)$$

ce qui donne :

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq v(x) - v(z) + v(t) - v(y) = \Delta^-(C)$$

On montre, de la même manière, que si C est de la forme :

$$(x \geq z \ , \ z \leq t \ , \ t \geq y)$$

alors

$$\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$$

Ainsi, $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$ pour toute s.e.c. C appartenant à $C_3(x,y)$.

Supposons maintenant que, pour tout couple (x,y) de $T \times T$, et pour toute s.e.c. $C \in C_{n-1}(x,y)$, $\Delta^-(C_\wedge(x,y)) \leq \Delta^-(C)$.

Soit $[x_i]_0^n$ une s.e.c. de longueur n reliant x à y.
L'hypothèse de récurrence entraîne :

$$\Delta^-(C_\wedge(x,x_{n-1})) \leq \Delta^-([x_i]_0^{n-1})$$

$$\Delta^-([x_i]_0^n) = \Delta^-([x_i]_0^{n-1}) + \Delta^-(C')$$

où C' est définie par la séquence (x_{n-1},x_n), d'où :

$$\Delta^-([x_i]_0^n) \geq \Delta^-(C_\wedge(x,x_{n-1})) + \Delta^-(C') = \Delta^-(C'')$$

où C'' est définie par la séquence $(x,x \wedge x_{n-1},x_{n-1},y)$.

Le résultat sur les s.e.c. de longueur 3 entraîne :

$$\Delta^-([x_i]_0^n) \geq \Delta^-(C'') \geq \Delta^-(C_\wedge(x,y)) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il vient alors :

Etant donné un treillis T quelconque, $T_0 = \{x \in T | v(x) < +\infty\}$, si v vérifie l'une des hypothèses H0, H1, H2, une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de δ à l'ensemble des couples (x,y) de $T_0 \times T_0$ définisse une distance est que l'application v soit strictement monotone.

III.- DISTANCES SUR T.

. Les hypothèses H nous permettent d'obtenir des expressions explicites des quantités δ^+, δ^- et δ utilisables directement au niveau des

applications.

Suivant le sens des variations de v et l'hypothèse H retenue, lorsque $v(x).v(y) < +\infty$, nous résumons dans le tableau III-1 les expressions de δ^+, δ^- et δ.

v	H	δ^+	δ^-	δ
↗	H0	$v(x \vee y) - v(x)$ = $v(y) - v(x \wedge y)$	$v(x \vee y) - v(y)$ = $v(x) - v(x \wedge y)$	$v(x \vee y) - v(x \wedge y)$
↗	H1	$v(x \vee y) - v(x)$	$v(x \vee y) - v(y)$	$2v(x \vee y)$ $- v(y) - v(x)$
↗	H2	$v(y) - v(x \wedge y)$	$v(x) - v(x \wedge y)$	$v(x) + v(y)$ $- 2v(x \wedge y)$
↘	H0	$v(x \wedge y) - v(x)$ = $v(y) - v(x \vee y)$	$v(x \wedge y) - v(y)$ = $v(x) - v(x \vee y)$	$v(x \wedge y) - v(x \vee y)$
↘	H1	$v(x \wedge y) - v(x)$	$v(x \wedge y) - v(y)$	$2v(x \wedge y) - v(x)$ $- v(y)$
↘	H2	$v(y) - v(x \vee y)$	$v(x) - v(x \vee y)$	$v(x) - v(y)$ $- 2v(x \vee y)$

légende

↗ v croissante

↘ v décroissante

TABLEAU III-1

. L'expression $\delta(x,y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$ tirée du tableau III-1, lorsque v est croissante et vérifie H0, est la quasi-distance (resp. distance) définie sur les treillis, v étant alors une

valuation croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire une application définie sur T, à valeurs réelles, vérifiant les conditions :

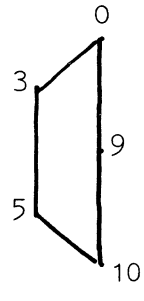
. $v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$

. $x < y \Longrightarrow v(x) \leq v(y)$ (resp. $v(x) < v(y)$)

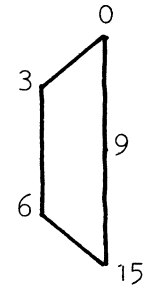
Nous savons [1] [2] qu'il y a équivalence entre les treillis modulaires et les treillis à valuation strictement croissante.

Par contre, les hypothèses H1 et H2 n'entraînent aucune structure particulière sur T, ni la modularité, ni la semi-modularité. Sur les exemples suivants, nous définissons :

. sur le treillis caractéristique des treillis non modulaires, des applications monotones vérifiant l'une des hypothèses H1 ou H2 (les chiffres des sommets représentent les valeurs de v).

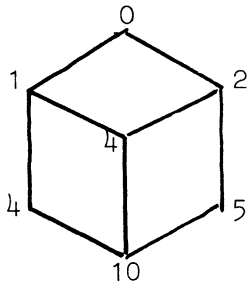


H1

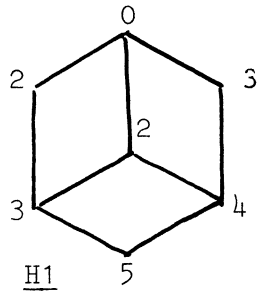


H2

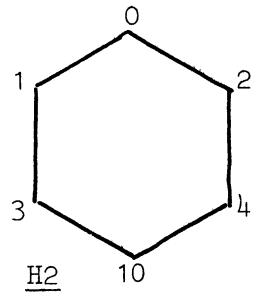
. sur des treillis, respectivement semi-modulaire inférieurement, semi-modulaire supérieurement, non semi-modulaire, des applications monotones v vérifiant également l'une quelconque des hypothèses H1 ou H2 .



H2



H1



H2

IV.- REMARQUES

1. Soit v une application quelconque de T dans $\mathbb{R}$.

A toute s.e.c. $[x_i]_0^n$, nous pouvons associer la quantité suivante :

$$\Delta([x_i]_0^n) = \sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})|$$

Notons :

$$\delta(x,y) = \inf_{C \in \mathcal{C}(x,y)} \Delta(C)$$

On montre que l'application δ de $T \times T$ dans $\mathbb{R}^+$ ainsi définie est une quasi-distance, c'est-à-dire une application vérifiant :

- $\delta(x,x) = 0 \qquad \forall\, x \in T$
- $\delta(x,y) = \delta(y,x) \qquad \forall\, (x,y) \in T \times T$
- $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ (inégalité triangulaire)
  $\forall\, (x,y,z) \in T \times T \times T$

De plus, si le treillis T est fini, une condition suffisante pour que δ soit une distance est que v soit injective.

2. Dans [14] (théorème 2.1.), Boorman et Oliver établissent l'équivalence suivante : si v est strictement croissante sur un treillis T, v vérifie l'hypothèse H_2 si et seulement si $d(x,y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$ est une distance. On peut obtenir facilement ce résultat de manière directe. Mais ces auteurs démontrent indirectement la condition nécessaire en montrant que si v vérifie H_2, on a $d(x,y) = \delta(x,y)$. Ce dernier résultat correspond à la condition suffisante du théorème de ce papier. Boorman et Oliver en donnent une idée de démonstration élégante sans toutefois donner une démonstration explicite ; à noter qu'ils appellent supervaluation une application v vérifiant H_2 et que cette définition ainsi que certains résultats sont repris dans [15].

B I B L I O G R A P H I E

[1] BARBUT M. et MONJARDET B., Ordre et classification, Paris, Hachette, 1970.

[2] BIRKHOF G., Lattice Theory, Providence, American Math. Society, Colloquium Publication, 1967.

[3] COMYN G. et LOSFELD J., "Information et préordre", Publication du C.N.R.S., Gr. de Recherche 22, Structure de l'Information, (1976), 45-70

[4] COMYN G. et VAN DORPE J. Cl., "Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis", Math. Sci. hum., 56 (1976)

[5] GREENBERG H., Integer programming, Monterey, Academic Press, 1971

[6] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Information généralisée et Questionnaires", Séminaire sur les Questionnaires, Université Paris-VI, Janvier 1975

[7] GRIMONPREZ G., LOSFELD J. et VAN DORPE J. Cl., "Perte et gain d'information sur une séquence d'éléments comparables d'un treillis et métrique associée", C.R.Ac. Sci., 280, série A, (1975), 957-960.

[8] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Perte et gain d'information sur une séquence d'éléments comparables d'un treillis et métrique associée (Applications)", C.R.Ac. Sci., 280, Série A, (1975), 1381-1384.

[9] GRIMONPREZ G. et VAN DORPE J. Cl., "Conséquences de l'axiome de monotonicité. Notion de résumé", Publications du C.N.R.S., Gr. de recherche 22, Structures de l'information, (1976), 71-106.

[10] GRIMONPREZ G., "Recherche de structure de données", Journées Information, Questionnaires, Reconnaissance des formes, Bonas, 1976

[11] KAMPE DE FERIET J., "La théorie généralisée de l'information et la mesure subjective de l'information", Lect. Notes in Math., 398, (1974), 1-35

[12] LOSFELD J., "Information généralisée et relation d'ordre", Lect. Notes in Math., 398, (1974), 49-61.

[13] MONJARDET B., "Caractérisations métriques des ensembles ordonnés semi-modulaires", Math. Sci. hum., 56 (1976)

[14] BOORMAN S.A., OLIVER D.C., "Metrics on spaces of finite trees", J. of Math. Psychol., 10, 1973 (26-59).

[15] CAILLIEZ F., PAGES J.P., Introduction à l'analyse des données, Paris, S.M.A.S.H., 1976.