

MICHEL GARRABÉ

**Note sur le processus de partage praxéologique pour
quatre individus avec probabilité**

Mathématiques et sciences humaines, tome 55 (1976), p. 61-68

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__55__61_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Math. Sci. hum. (14^e année, n°55, 1976, p.61-68)

NOTE SUR LE PROCESSUS DE PARTAGE PRAXEOLOGIQUE POUR QUATRE INDIVIDUS AVEC PROBABILITE

Michel GARRABÉ *

Le Processus de Partage Praxéologique (ou pragmatique)¹ doit beaucoup à STEINHAUS².

Il s'agit pour un partageur (A) de maximiser sa situation compte tenu d'une double contrainte :

- Etant partageur il n'intervient que comme ultime choisisseur
- Son attitude au partage va être fonction de son information sur l'attitude sociale de ses partenaires choisisseurs.

Nous ne retiendrons dans cette note que deux attitudes sociales, l'égoïsme et l'altruisme. La part optimale étant respectivement maximale pour l'égoïste, minimale pour l'altruiste³.

Définition :

On appelle NORME DE PARTAGE toute modalité de partition en terme d'égalité et d'inégalité.

* Université de Montpellier

¹ Sur les raisons du choix du terme cf. P. Moessinger et A. Koerffy in : *Equité et Altruisme dans le partage pragmatique* ", *Math. Sci. hum.*, n°50, 1975, pp. 5-14.

² H. Steinhaus, "The problem of fair division", *Econometrica*, 16, 1948, pp.101-104.

³ L'altruisme est autodiscriminatoire. Une troisième attitude sociale pourrait être introduite : l'envie : cf. M. Garrabé in : *Analyse Economique de la Préférence Ethique*, Montpellier, Mars 1974, pp. 75-190.

Dans le cas de quatre partenaires, huit normes de partage sont possibles, 2^{n-1} pour n individus.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ | (5) $P_1 > P_2 = P_3 = P_4$ |
| (2) $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ | (6) $P_1 > P_2 > P_3 = P_4$ |
| (3) $P_1 = P_2 > P_3 > P_4$ | (7) $P_1 > P_2 = P_3 > P_4$ |
| (4) $P_1 = P_2 > P_3 = P_4$ | (8) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$ |

En ne retenant que deux attitudes sociales possibles, huit états sociaux peuvent apparaître

- E_1 : trois altruistes, zéro égoïste
 $3E_2$: deux altruistes, un égoïste
 $3E_3$: un altruiste, deux égoïstes
 E_n : zéro égoïste, trois altruistes

Hypothèse 1 : Dans toute norme de partage inégalitaire la part la plus petite est la part minimale (P_m).

Situation de A partageur pour $n = 4$.

I	E_1 {3A 0E}	E_2 {2A 1E}	E_3 {1A 2E}	E_4 {0A 3E}
1 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$	$(P_1) \sim P_2 \sim P_3 \sim P_4$	$P_1 \sim (P_2) \sim P_3 \sim P_4$	$P_1 \sim P_2 \sim (P_3) \sim P_4$	$P_1 \sim P_2 \sim P_3 \sim (P_4)$
2 $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$	$(P_1) \sim P_2 \sim P_3$	$P_1 \sim (P_2) \sim P_3$	$P_1 \sim P_2 \sim (P_3)$	(P_4) P_m
3 $P_1 = P_2 > P_3 > P_4$	$(P_1) \sim P_2$	$P_1 \sim (P_2)$	(P_3)	(P_4) P_m
4 $P_1 > P_2 = P_3 = P_4$	$(P_1) \sim P_2$	$P_1 \sim (P_2)$	$(P_3) \sim P_4$ P_m	$P_3 \sim (P_4)$ P_m
5 $P_1 > P_2 = P_3 = P_4$	(P_1) P_m	$P_2 \sim (P_3) \sim P_4$ P_m	$P_2 \sim (P_3) \sim P_4$ P_m	$P_2 \sim P_3 \sim (P_4)$ P_m
6 $P_1 > P_2 > P_3 = P_4$	(P_1)	(P_2)	$(P_3) \sim P_4$ P_m	$P_3 \sim (P_4)$ P_m
7 $P_1 > P_2 = P_3 > P_4$	(P_1)	$(P_2) \sim P_3$	$P_2 \sim (P_3)$	(P_4) P_m
8 $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$	(P_1)	(P_2)	(P_3)	(P_4) P_m
	P_1	P_2	P_3	P_4

- on constate que A reçoit P_1 en E_1 , P_2 en E_2 , P_3 en E_3 et P_4 en E_4 soit P_n en E_n .

- Seule la NORME (1) évite à A la part minimale (P_m) puisque $P_M > P_1 = P_2 = P_3 = P_4 > P_m \forall n$.

- Seule la NORME (5) permet à A en E_1 d'obtenir la part maximale $\forall n$ avec P_M décroissante lorsque n croît, E étant constant.

Proposition (1) : Quelle que soit la probabilité d'apparition de $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, l'état E_1 ne propose jamais à A une part minimale ; E_n toujours si l'on exclut la norme de partage inégalitaire.

- Compte tenu de l'hypothèse (1) nous valorisons les normes de partage ainsi :

- (1) $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0,25$
- (2) $P_1 = P_2 = P_3 = 0,3 > P_4 = 0,1$
- (3) $P_1 = P_2 = 0,35 > P_3 = 0,2 > P_4 = 0,1$
- (4) $P_1 = P_2 = 0,4 > P_3 = P_4 = 0,1$
- (5) $P_1 = 0,4 > P_2 = P_3 = P_4 = 0,2$
- (6) $P_1 = 0,6 > P_2 = 0,2 > P_3 = P_4 = 0,1$
- (6') $P_1 = 0,5 > P_2 = 0,3 > P_3 = P_4 = 0,1$
- (7) $P_1 = 0,5 > P_2 = P_3 = 0,2 > P_4 = 0,1$
- (8) $P_1 = 0,4 > P_2 = 0,3 > P_3 = 0,2 > P_4 = 0,1$

Nous nous proposons de tester les normes de choix existantes pour un partage à quatre partenaires lorsque la probabilité d'apparition du comportement égoïste est de 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8.

Les probabilités d'apparition des différents états sociaux seront les suivantes.

II	PE_1	PE_2	PE_3	PE_4
$P_e = 0,5$	0,125	0,375	0,375	0,125
$P_e = 0,6$	0,064	0,288	0,432	0,216
$P_e = 0,7$	0,027	0,189	0,441	0,343
$P_e = 0,8$	0,008	0,096	0,384	0,512

Nous obtenons

Pour $P_e = 0,5$

III	E_1	E_2	E_3	E_4	
(1)	0,03125	0,09375	0,09375	0,03125	0,25
(2)	0,0375	0,1125	0,1125	0,0125	0,3
(3)	0,04375	0,13125	0,075	0,0125	0,2625
(4)	0,05	0,15	0,0375	0,0125	0,25
(5)	0,05	0,075	0,075	0,025	0,225
(6)	0,0750	0,0750	0,0375	0,0125	0,2
(6')	0,0625	0,1125	0,0375	0,0125	0,225
(7)	0,0625	0,0750	0,0750	0,0625	0,225
(8)	0,05	0,1125	0,075	0,0125	0,25

$$(2) > (3) > (1) = (4) = (8) > (5) = (7) = (6') > (6)$$

. Si (A) est égoïste il choisira (2) une norme inégalitaire partiellement.

. Si il est altruiste il choisira (6) mais jamais il ne choisira la norme égalitaire.

Pour $P_e = 0,6$

IV	E_1	E_2	E_3	E_4	
(1)	0,016	0,072	0,108	0,054	0,25
(2)	0,0192	0,0864	0,1296	0,0216	0,2565
(3)	0,0224	0,1008	0,0864	0,0216	0,2312
(4)	0,0256	0,1152	0,0432	0,0216	0,2056
(5)	0,0256	0,0676	0,0864	0,0432	0,2128
(6)	0,0384	0,0576	0,0432	0,0216	0,1608
(6')	0,032	0,0864	0,0432	0,0216	0,1832
(7)	0,032	0,0576	0,0864	0,0216	0,1976
(8)	0,0256	0,0864	0,0864	0,0216	0,22

$$(2) > (1) > (3) > (8) > (5) > (4) > (7) > (6') > (6)$$

. Si (A) est égoïste il choisira (2) une norme inégalitaire.

. Si (A) est altruiste il choisira (6).

Pour $P_e = 0,7$

v	E_1	E_2	E_3	E_4	
(1)	0,00675	0,04725	0,11025	0,08575	0,25
(2)	0,0081	0,0567	0,1323	0,0343	0,2314
(3)	0,00945	0,06615	0,0882	0,0343	0,1981
(4)	0,0108	0,0756	0,0441	0,0343	0,1648
(5)	0,0108	0,0378	0,0882	0,0686	0,2054
(6)	0,0162	0,0378	0,0441	0,0343	0,1324
(6')	0,0135	0,0567	0,0441	0,0343	0,1486
(7)	0,0135	0,0378	0,0882	0,0343	0,1738
(8)	0,0108	0,0567	0,0882	0,0343	0,19

(1) > (2) > (5) > (3) > (8) > (7) > (4) > (6') > (6)

. Si (A) est égoïste il choisira (1) la norme égalitaire. Cette norme est équitable pour tous.

. Si (A) est altruiste il choisira toujours (6).

Pour $P_e = 0,8$

VI	E_1	E_2	E_3	E_4	
(1)	0,002	0,024	0,096	0,128	0,25
(2)	0,0024	0,0288	0,1152	0,0512	0,1976
(3)	0,0028	0,0336	0,0768	0,0512	0,1644
(4)	0,0032	0,0384	0,0384	0,0512	0,1312
(5)	0,0032	0,0192	0,0768	0,1024	0,2016
(6)	0,0048	0,0192	0,0384	0,0512	0,1136
(6')	0,004	0,0288	0,0384	0,0512	0,1224
(7)	0,004	0,0192	0,0768	0,0512	0,1512
(8)	0,032	0,0288	0,0768	0,0512	0,16

(1) > (5) > (2) > (8) > (3) > (7) > (4) > (6') > (6)

. Les résultats obtenus pour $P_e = 0,8$ confirment ceux constatés pour $P_e = 0,7$.

VII résume les résultats précédents et permet de constater que la norme optimale de partage, inégalitaire pour 60% d'égoïstes dans une collectivité devient égalitaire pour 70%.

$\begin{matrix} P_e \\ \backslash \\ N \end{matrix}$	0,5	0,6	0,7	0,8	VII
(1)	0,25	0,25	0,25	0,25	→
(2)	0,3	0,2565	0,2314	0,1976	↘
(3)	0,2625	0,2312	0,1981	0,1644	↘
(4)	0,25	0,2056	0,1648	0,1312	↘
(5)	0,225	0,2128	0,2054	0,2016	↘
(6)	0,2	0,1608	0,1324	0,1136	↘
(6')	0,225	0,1832	0,1486	0,1224	↘
(7)	0,225	0,1976	0,1738	0,1512	↘
(8)	0,25	0,22	0,19	0,16	↘

Il convient par conséquent de s'interroger sur le pourcentage d'égoïstes dans une collectivité qui entraîne l'indifférence entre la norme (1) et la norme (2).

Nous avons :

$$\bullet p_{E1}(p_1) + 3p_{E2}(p_1) + 3p_{E3}(p_1) + p_{E4}(p_4) = X \quad (1)$$

$$\bullet p_{E1} = (p_a)^3 \text{ ou } (1 - p_e)^3 \quad (2)$$

$$\bullet p_{E2} = (p_a)^2 p_e \text{ ou } p_e (1 - p_e)^3 \quad (3)$$

$$\bullet p_{E3} = (p_e)^2 p_a \text{ ou } p_e^2 (1 - p_e) \quad (4)$$

$$p_{E4} = (p_e)^3 \quad (5)$$

$$p_1 \left[(1-p_e)^3 + 3p_e(1-p_e)^2 + 3p_e^2(1-p_e) \right] + p_e^3(p_4) = X \quad (6)$$

$$p_1 \left[(1-3p_e+3p_e^2-p_e^3-3p_e(1-2p_e+p_e^2) + 3p_e^2-3p_e^3) \right] + p_e^3(p_4) \quad (7)$$

$$p_1 \left[1 - (p_e)^3 \right] + (p_e)^3 (p_4) = X \quad (8)$$

posons $X = 0,25$

$$p_1 \left[1 - (p_e)^3 \right] + (p_e)^3 (p_4) = 0,25 \quad (9)$$

posons $p_4 = (1 - 3)p_1$ et remplaçons p_1 par sa valeur 0,3.

Replaçons (10) dans (9) (10)

$$0,3 - 0,3 p_e^3 + p_e^3 - 0,9 p_e^3 = 0,25$$

$$0,2 p_e^3 = 0,05 \quad (11)$$

$$\text{d'où il vient } p_e = \sqrt[3]{0,25} = 0,63.$$

Proposition 2 - Lorsque la probabilité qu'un individu soit égoïste dans une collectivité est supérieure à 0,63, la norme de partage choisie par le partageur égoïste sera toujours égalitaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GARRABE M., "Partage et Egalité", *Cahiers du séminaire Charles GIDE*, Montpellier, 1974, pp.75-112.
- [2] GUILBAUD G.Th., "Les problèmes du Partage", *Economie Appliquée*, tome V, n°1, 1952, pp. 93-137, in *Théorie mathématique des Jeux*, Paris, Dunod, 1968, pp.1-37.
- [3] KOLM S.C., *Justice et Equité*, CNRS, 1973.
- [4] MOESSINGER P. et KOERFFY A., "Equité et Altruisme dans le partage pragmatique", *Math. Sci. hum.*, n°50, 1975, pp.5-14.
- [5] STEINHAUS H., "The problem of fair division", *Econometrica* 16, 1948, p.101-104.
- [6] STONE A.H. and TUKEY J.M., "Generalized "sandwich" theorems", *Duke math.J.*, USA, 9, 1942, pp. 356-359.
- [7] WEINSTEIN M. et ZECKHAUSER R., "Critical ratios and efficient allocation", *J. Public Economics*, Vol.2, Avril 1973, pp. 147-158.