

P. MOESSINGER

La procédure de vote de Simon Lhuilier

Mathématiques et sciences humaines, tome 54 (1976), p. 25-32

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__54__25_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA PROCEDURE DE VOTE DE SIMON LHUILIER

P. MOESSINGER*

Les problèmes de choix collectif ont donné lieu, à la suite d'Arrow (1951) et de Black (1958), à de nombreux développements théoriques aussi bien dans le cadre de l'économie du bien-être que de la science politique. Plus rares en revanche sont les recherches historiques car le matériel limité dont on dispose a déjà donné lieu à une étude quasi exhaustive à laquelle sont particulièrement associés les noms de D. Black, G.G. Granger, G.Th. Guilbaud, W. Riker. Aussi est-il remarquable que la procédure de vote de Simon Lhuillier (1794) ait échappé jusqu'ici aux historiens de la science politique ainsi qu'aux mathématiciens. Montucla (1802) la mentionne dans son *Histoire des mathématiques*, comme l'observe Black (1958, note p.160) qui ajoute qu'il a été incapable de mettre la main sur l'ouvrage de Lhuillier. Guilbaud (1952) signale la méthode du mathématicien genevois, en la considérant, semble-t-il, comme une redite du système de Borda**.

Comme l'indique le titre du mémoire de Lhuillier, il s'agit d'une étude critique du mode d'élection contenu dans le projet de constitution girondine dont Condorcet (1793) fut le principal rédacteur. Le projet de constitution ayant été rejeté en 1793, cette méthode ne fut pas appliquée en France. Adoptée à Genève la même année, c'est conformément à ce mode que se sont déroulées les élections à l'Assemblée souveraine (élection des magistrats et des hauts fonctionnaires) pendant moins d'un an. A l'usage en effet quelques inconvénients de la méthode de Condorcet apparurent, que Lhuillier analyse dans un mémoire adressé au Comité législatif. Cette critique constitue la première partie de son ouvrage. La seconde partie, le *Supplément au mémoire précédent*, a été écrite sur l'invitation du Comité législatif qui

* Publié avec le concours du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique, Berne.

** Les électeurs attribuent à chaque candidat un numéro d'ordre et le dépouillement se fait en additionnant ces numéros pour chaque candidat (Borda, 1784).

demandait quelques démonstrations. L'auteur y expose sa méthode par un traitement algébrique sur des cas simples à 3 candidats. Les modifications proposées par Lhuillier ayant été acceptées par le peuple le 3 novembre 1794, c'est selon cette nouvelle méthode que se sont déroulées par la suite les élections à l'Assemblée souveraine. On peut penser que la procédure de Lhuillier a été abandonnée en 1798, date de l'annexion de Genève à la France, bien que nous n'ayons pas retrouvé de texte au sujet de cet abandon^{*}. Cette méthode ne fut pas reprise à la Restauration où fut introduit un système électoral plus direct^{**}.

Critique de la méthode de Condorcet

La procédure de vote qu'examine Lhuillier est relativement simple. On présente à l'assemblée 3n candidats pour n places à remplir (ainsi, dit Lhuillier, l'élection se fait en une fois). Chaque bulletin comprend deux colonnes : une colonne d'élection (1ère colonne) et une colonne supplémentaire (2ème colonne), chaque candidat mentionné dans la première colonne étant préféré par l'électeur à chaque candidat qu'il inscrit dans la 2ème colonne. Chaque électeur inscrit n noms dans la 1ère colonne et n noms différents dans la 2ème colonne. Les règles de l'élection sont alors les suivantes :

- 1) Un candidat est élu s'il a la majorité absolue dans la colonne d'élection.
- 2) Si par ce procédé le nombre d'élus est inférieur au nombre de places disponibles, on complète l'élection en faisant pour chaque candidat restant la somme des suffrages qu'il obtient dans la première et la deuxième colonnes, les candidats étant élus dans l'ordre de grandeur de ces sommes.

On reconnaissait à cette méthode l'avantage de réaliser l'élection en une seule opération (avantage obtenu par la limitation du nombre des candidats) et on croyait qu'elle empêchait les brigues. Lhuillier émet des doutes quant à ce dernier point et ajoute qu'elle n'exprime pas toujours "la volonté vraie de l'assemblée". Il se livre, pour le montrer, à une analyse des préférences entre deux candidats. Soient A et B deux candidats, les 9 possibilités suivantes peuvent apparaître au dépouillement :

* W. Rappard (1942) ne fait pas mention de l'ouvrage de Lhuillier dans son livre consacré à l'avènement de la démocratie à Genève.

** Les renseignements historiques sont dus à M. de Tribolet, archiviste de l'Etat de Genève.

Possibilités	1ère colonne	2ème colonne
1 ^e	A et B	-
2 ^e	A	B
3 ^e	A	-
4 ^e	B	A
5 ^e	B	-
6 ^e	-	A et B
7 ^e	-	A
8 ^e	-	B
9 ^e	-	-

A est préféré à B par les électeurs dont les bulletins ("billets") sont de type 2, 3 ou 7, tandis que B est préféré à A par les électeurs dont les bulletins sont du type 4,5 ou 8. Les billets de type 1, 6 ou 9 "n'ont aucune incidence quant à la comparaison des deux candidats".

Supposons qu'il reste un candidat à élire et que les suffrages accordés à A et B se présentent comme suit :

	1ère colonne	2ème colonne	Total	
(a) A	80	70	150	
B	60	100	160	différence de 10 en faveur de B

Supposant qu'aucun des 2 candidats n'a obtenu la majorité absolue dans la première colonne, on recourt au total des deux colonnes.

Comme il y a une différence de 10 suffrages en faveur de B, B est élu.

En termes de préférences, on comprend qu'il n'en va pas de même suivant les types de bulletins recensés. Dans le cas le plus favorable à A, si les 80 suffrages de A correspondent à des billets de type 2, c'est-à-dire si les 80 "électeurs de A"* ont donné un suffrage supplémentaire à B (80+20=100) et si aucun "électeur de B" n'a donné de suffrage supplémentaire à A (c'est-à-dire que les 70 suffrages supplémentaires de A expriment des

* "Electeur de A" signifie, selon la terminologie de Lhuillier, "électeur qui a inscrit A dans la première colonne".

préférences de A à B), il y a donc au total 150 individus qui préfèrent A à B. En ce qui concerne la deuxième ligne, il y a 60 individus qui préfèrent B à A ; aux 100 suffrages de la deuxième colonne, il faut soustraire les bulletins de type 2, 80 dans notre hypothèse, c'est-à-dire qu'il reste 20 préférences de B à A dans la deuxième colonne (type 8). Au total 80 personnes préfèrent B à A. Tout se passe alors comme si la situation était la suivante :

		1ère colonne	2ème colonne	Total	
(a')	A	80	70	150	différence de 70 en faveur de A
	B	60	20	80	

On peut aussi envisager le cas le plus favorable à B où les 60 "électeurs de B" donnent un suffrage supplémentaire à A et où aucun "électeur de A" ne donne de suffrage supplémentaire à B :

		1ère colonne	2ème colonne	Total	
(a'')	A	80	10	90	différence de 70 en faveur de B
	B	60	100	160	

Bien entendu, toutes les situations intermédiaires sont possibles, y compris la distribution des suffrages supplémentaires parmi d'autres candidats. Cependant un tel exemple, semblable à ceux auxquels recourt Lhuillier, met en évidence "la grande indétermination que laisse ce mode d'élection".

Pour pallier ces inconvénients Lhuillier propose, lorsqu'il s'agit de compléter l'élection, de ne pas tenir compte uniquement de la somme des suffrages des deux colonnes pour chaque candidat, mais aussi de l'ordre dans lequel ils se trouvent par rapport à leurs suffrages électifs. L'exposé rigoureux de cette proposition se trouve dans le supplément.

Le Supplément

Pour l'intérêt historique, je mentionnerai la notation de Lhuilier, mais sans suivre tous les développements de l'auteur, l'écriture se révélant rapidement assez lourde.

"Je désignerai constamment les trois candidats par les lettres ...	A,B,C
Leurs suffrages électifs par ...	a,b,c
Leurs suffrages supplémentaires par ...	a',b',c'."

... "Ainsi Ab désigne le nombre des électeurs de A qui ont donné à B un suffrage supplémentaire."

Lhuilier démontre un théorème sur l'élection à la majorité absolue.

"Théorème

"Si un candidat (tel que A) a la majorité absolue dans la colonne d'élection, j'affirme qu'il est le plus agréable des trois.

"Symboliquement

"Si $a > \frac{a+b+c}{2}$, j'affirme que	$a+Ca > b+Cb$
	$a+Ba > c+Bc$

"Démonstration

"Par supposition $a > \frac{a+b+c}{2}$, donc $2a > a+b+c$ & $a > b+c$

Donc (à plus forte raison) $a+Ca > b+c-Ca$.

Mais $c - Ca = Cb$, donc $a+Ca > b+Cb$.

On montre de la même manière que $a+Ba > c+Bc$." (p.40)

Revenons à une notation plus moderne et appelons

S_i^1 le nombre de suffrages obtenus par i dans la 1ère colonne ,

S_i^2 le nombre de suffrages obtenus par i dans la 2ème colonne ,

$\sum_{j \neq i}^n S_j^1$ le nombre de suffrages obtenus par tous les autres candidats dans

la 1ère colonne,

$\sum_{j \neq i}^n S_j^2$ le nombre de suffrages obtenus par tous les autres candidats dans

la 2ème colonne.

Selon la méthode de Condorcet, les règles de l'élection du candidat i sont les suivantes (les candidats étant élus dans l'ordre selon la première condition, puis selon la seconde) :

$$1C) \quad S_i^1 > \sum_{j \neq i}^n S_j^1$$

$$2C) \quad S_i^1 + S_i^2 > \max_{j \neq i} (S_j^1 + S_j^2)$$

Lhuillier conserve la règle de majorité absolue dans la colonne d'élection et ajoute, pour compléter l'élection, les deux conditions suivantes qui doivent être remplies ensemble :

$$2L) \quad S_i^1 + S_i^2 > \sum_{j \neq i}^n S_j^1$$

$$2'L) \quad S_i^1 + \frac{x}{2} > \max_{j \neq i} (S_j^1 + S_j^2) \text{ où } x \text{ est le nombre d'électeurs.}$$

La condition 2L dit que la somme des suffrages obtenus par i dans les deux colonnes doit être plus grande que la somme des suffrages obtenus par tous les autres candidats dans la première colonne. D'après la condition 2'L, lorsqu'on ajoute le nombre de suffrages obtenus par i dans la première colonne à la moitié du nombre des électeurs, cette somme doit être plus grande que la somme des suffrages électifs et supplémentaires de n'importe quel autre candidat non élu.

On ne peut pas appliquer la méthode de Lhuillier à l'exemple (a) car on ne dispose pas de la liste complète des votes. De même, dans ses exemples, Lhuillier se borne à montrer combien est vaste l'indétermination laissée par la méthode de Condorcet. Toutefois, selon l'idée de Lhuillier, les cas extrêmes (les plus favorables à un candidat) sont d'autant moins probables que le nombre d'électeurs est grand. Ainsi, la condition 2'L, qui peut également s'écrire

$$S_i^1 > \max_{j \neq i} (S_j^1 + S_j^2) - \frac{x}{2} ,$$

est-elle, dans la plupart des cas, d'autant moins restrictive, que x est grand. On peut alors considérer comme un inconvénient de la méthode le fait que l'importance relative des suffrages des deux colonnes varie suivant

la valeur de x , les suffrages électifs étant d'autant plus importants que x est petit. C'est qu'à la somme des suffrages portés sur un candidat dans une colonne correspondent autant de suffrages de l'autre colonne (suffrages vicariants) portés sur d'autres candidats et qu'il faut tenir compte de la distribution des suffrages vicariants pour déterminer le choix collectif. Comme on ne dispose pas de l'échelle de préférence complète de chaque électeur, on se donne des règles tendant à éviter les cas extrêmes et on fait l'hypothèse d'une distribution d'autant plus homogène des suffrages vicariants que le nombre d'électeurs est grand. Ainsi le système de Lhuillier se trouve à cheval entre deux méthodes, celle de l'agrégation des échelles de préférences et celle de la somme des rangs.

BIBLIOGRAPHIE

- ARROW K.J., *Social choice and individual values*, New York, Wiley, 1951.
- BLACK D., *The theory of committees and elections*, Cambridge University Press, 1958.
- BORDA J.C., "Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'académie des Sciences pour 1781*, Paris, 1784, p.657 et suiv.
- CONDORCET, "Exposition des motifs et des principes du plan de constitution", *Ar. XII*, 1793.
- GRANGER G.G., *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, Paris, Presses Universitaires de France, 1956.
- GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", *Economie Appliquée*, 5, 4, 1952. Cet article est repris dans *Eléments de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod, 1968.
- LHUILLIER S., *Examen du mode d'élection proposé à la convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève*, Genève, Bonnant, 1794.

MONTUCLA J.F., *Histoire des mathématiques*, Paris, 1802.

RAPPARD W., *L'avènement de la démocratie moderne à Genève, 1814-1847*, Genève, 1942.

RIKER W., "Voting and the summation of preferences : an interpretative bibliographical review of selected developments during the last decade", *American Political Science Review*, 55, 1961.