

M. F. LANZ

P. MARTIN

## **Les 1-graphes finis et leurs morphismes**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 51 (1975), p. 51-75

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1975\\_\\_51\\_\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__51_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LES 1-GRAPHER FINIS ET LEURS MORPHISMES

M.F. LANZ<sup>\*</sup> et P. MARTIN<sup>\*\*</sup>

Les définitions et les notations concernant les concepts de base de la théorie des graphes que l'on trouve dans le premier chapitre du livre de C. Berge [3 p.3-10] ne sont pas rappelées ici.

Pour les éléments d'algèbre, nous suivons la terminologie de [12].

Par commodité, nous réservons l'alphabet latin à des éléments relatifs à des graphes ; les applications, les groupes et leurs éléments sont désignés par des lettres grecques.

Rappelons que toutes les structures considérées ici, graphes ou groupes, sont finies.

## I. MORPHISMES DE 1-GRAPHER

Selon l'usage introduit par C. Berge [3], nous traitons le cas général des 1-graphes en utilisant le vocabulaire des 1-graphes orientés. Les définitions et les propriétés correspondantes pour les graphes simples ne sont qu'un cas particulier de celles qui sont données ci-après. Les exemples utilisent l'une et l'autre de ces variétés de graphes.

On désigne par morphisme entre deux ensembles munis de structures de même type une application du premier vers le second ensemble compatible avec les opérations et les relations qui définissent ce type de structures. Considérant un 1-graphe comme un ensemble fini muni d'une relation binaire, on pose :

---

\* Université Paris VIII

\*\* Université Scientifique et Médicale de Grenoble

## DEFINITION 1

Un morphisme du 1-graphe  $G = (X, U)$  dans le 1-graphe  $G' = (X', U')$  est une application  $\sigma$  de  $X$  dans  $X'$  telle que :

$$(x, y) \in U \Rightarrow \sigma x = \sigma y \\ \text{ou } (\sigma x, \sigma y) \in U'.$$

Exemples : L'application  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d & c & e & e & e \end{pmatrix}$  définit un morphisme du graphe  $G$  dans le graphe  $G'$  (fig.1). Dans la figure 2 on déterminera le morphisme de  $H$  dans  $H'$  tel que les images des sommets 4 et 5 soient confondues en  $a$ , celles des sommets 1, 2, 3, 6 et 7 soient distinctes et distinctes de  $a$ , enfin que le sommet  $e$  de  $H'$  soit l'image de l'ensemble  $\{3, 8, 9\}$ .

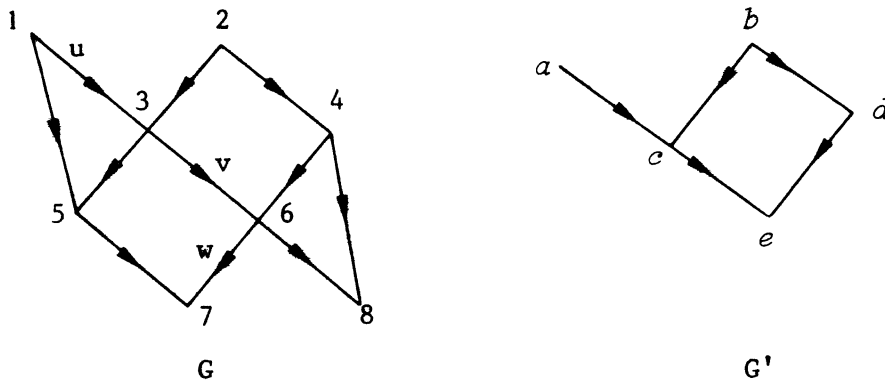


fig.1

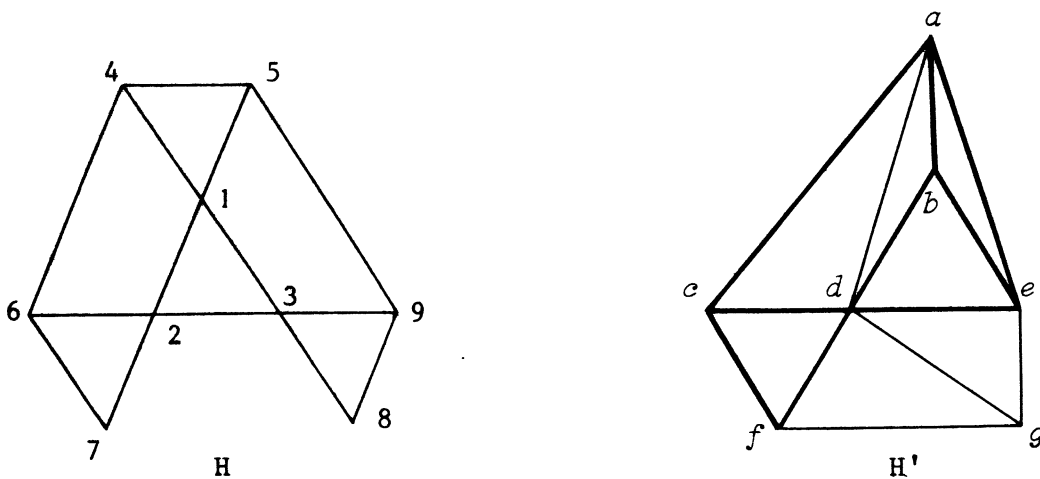


fig.2

De façon évidente, si  $H$  est un sous-graphe partiel de  $G$ , le morphisme  $\sigma$  de  $G$  dans  $G'$  définit un morphisme  $\sigma_H$  de  $H$  dans  $G'$ , appelé morphisme induit sur  $H$  par  $\sigma$ .

## DEFINITION 2

- a) L'image d'un graphe  $G$  par un morphisme de  $G$  dans  $G'$  est le sous-graphe partiel  $H'$  de  $G'$  tel que tout élément de  $H'$  (sommet ou arc) soit l'image d'au moins un élément de  $G$ .
- b) L'image de l'arc  $(x,y)$  par un morphisme  $\sigma$  de  $G$  dans  $G'$  est soit le sommet image de ses deux extrémités, si ces images sont confondues, soit l'arc  $(\sigma x, \sigma y)$  dans le cas contraire.
- c) L'image d'une chaîne par un morphisme est la séquence d'arcs obtenue à partir de la séquence représentant la chaîne en remplaçant tout arc par son image si celle-ci est un arc et en supprimant les arcs dont l'image est un sommet.

On peut en déduire quelques conséquences immédiates.

PROPRIETE 1 : L'image par morphisme d'une chaîne de longueur  $p$  est une chaîne de longueur inférieure ou égale à  $p$ . L'image par morphisme d'un chemin, d'un pseudo-cycle, d'un pseudo-circuit est respectivement un chemin, un pseudo-cycle, un pseudo-circuit.

Le résultat suivant donne un exemple de propriété conservée par morphisme de graphe ; ce résultat concerne les graphes simples.

PROPRIETE 2 : Si  $\sigma$  désigne un morphisme du graphe simple  $G$  dans le graphe simple  $G'$ , l'image par  $\sigma$  d'un sous-ensemble des sommets de  $G$  formant une  $p$ -clique est une  $q$ -clique de  $G'$  (avec  $q \leq p$ ).

## EXEMPLES

- a) Si  $\theta$  désigne le morphisme de  $H$  dans  $H'$  (fig.2) défini précédemment,

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ b & d & e & a & a & c & f & e & e \end{pmatrix}$ , l'image par  $\theta$  de la clique  $\{1,4,5\}$  est la

clique  $\{a,b\}$ .

- b) L'image du graphe  $H$  de la figure 2 par le morphisme  $\theta$  est le sous-graphe partiel de  $H'$  dont les arêtes sont représentées sur cette figure par des arêtes épaisses et dont les sommets sont les sommets adjacents à ces arêtes.
- c) Le chemin  $(u,v,w)$  du graphe de la figure 1 a pour image par  $\sigma$  le chemin  $((a,c),(c,e))$  de  $G'$ .

## DEFINITION 3

Un morphisme de deux graphes est un épimorphisme (resp. un morphisme bijectif) si l'application entre les deux ensembles de sommets est surjective (resp. bijective).

Les deux propriétés suivantes concernent les épimorphismes.

## PROPRIETE 3

L'image par tout épimorphisme d'un graphe  $G$  connexe est un graphe  $G'$  connexe.

Preuve : Soit  $G$  et  $G'$  deux 1-graphes et  $\sigma$  un épimorphisme de  $G$  dans  $G'$ . Montrons que pour tout couple de sommets  $x'$  et  $y'$  de  $G'$ , il existe une chaîne d'extrémités  $x'$  et  $y'$ . D'après la surjectivité de  $\sigma$  il existe deux sommets  $x$  et  $y$  de  $G$  qui ont respectivement pour image  $x'$  et  $y'$ .  $G$  étant connexe, ces deux sommets sont liés par une chaîne ; l'image de cette chaîne est une chaîne de  $G'$  d'extrémités  $x'$  et  $y'$ . La propriété en résulte.

On appelle *ensemble stable* d'un graphe  $G = (X, U)$  un sous-ensemble  $S$  de  $X$  tel que le sous-graphe engendré par  $S$  ne contienne par d'arc.

## PROPRIETE 4

Soient  $G = (X, U)$  et  $G' = (X', U')$  deux 1-graphes et  $\sigma$  un épimorphisme de  $G$  dans  $G'$ . Si  $S'$  est un ensemble stable de  $G'$ , il existe un ensemble stable  $S$  de même cardinal que  $S'$  dans  $G$ .

Preuve : Considérons l'ensemble  $S$  formé de la façon suivante. A chaque élément  $x'$  de  $S'$  on associe un et un seul sommet  $x$  de  $G$ , choisi arbitrairement dans  $\sigma^{-1}(x')$ . Supposons qu'il existe un arc  $(x, y)$  joignant deux éléments de  $S$ . L'image de cet arc ne peut pas être un sommet car  $x$  et  $y$  ont par hypothèse des images distinctes; l'image de cet arc ne peut pas être non plus un arc car  $S'$  est un ensemble stable. Ainsi  $S$  est un ensemble stable de  $G$ .

## DEFINITION 4

Un morphisme  $\sigma$  de  $G = (X, U)$  dans  $G' = (X', U')$  est *plein* si et seulement si l'image de  $G$  est identique au sous-graphe de  $G'$  engendré par  $\sigma(X)$ .

Exemple : Le morphisme défini entre les graphes  $G$  et  $G'$  de la figure 1 est un épimorphisme plein de  $G$  dans  $G'$ .

Avant d'énoncer la propriété suivante, rappelons que l'on appelle *nombre cocyclomatique* d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$ , composé de  $p$  composantes connexes  $C_1, C_2, \dots, C_p$  l'entier naturel  $\lambda(G) = n - p$ . On remarque aussitôt

que le nombre cocyclomatique d'un graphe est égal à la somme des nombres cocyclomatiques de ses composantes connexes.

#### PROPRIETE 5

S'il existe un épimorphisme plein  $\sigma$  du 1-graphe  $G$  dans le 1-graphe  $G'$ , le nombre cocyclomatique de  $G'$  est inférieur ou égal à celui de  $G$ .

Preuve : De la propriété 3, il résulte que toute composante connexe  $C_i'$  du graphe  $G'$  est l'image de  $p_i$  composantes connexes de  $G$ . En vertu de la remarque précédente, il suffit donc de montrer que la propriété est vraie lorsque  $G'$  est un graphe connexe.

Soit donc un graphe  $G$  d'ordre  $n$ , comportant  $p$  composantes connexes et un épimorphisme plein de  $G$  dans un graphe  $G'$  connexe d'ordre  $n'$ . Il s'agit de prouver que  $n - p \geq n' - 1$ .

Nous procédons par récurrence sur  $p$ .

La propriété est vraie pour  $p = 1$ , car tout sommet de  $G'$  est l'image d'au moins un sommet de  $G$ . Supposons  $p > 1$ . Il existe nécessairement deux composantes connexes distinctes de  $G$ ,  $C_i$  et  $C_j$ , telles qu'un sommet de  $C_i$  et un sommet de  $C_j$  ont même image par le morphisme plein, car l'inverse, joint à l'hypothèse de morphisme *plein*, contredirait la connexité de  $G'$ . Soit  $G''$  le graphe obtenu en identifiant les deux sommets précédents.

L'épimorphisme initial se factorise de façon évidente en un épimorphisme plein de  $G$  dans  $G''$  et un épimorphisme plein de  $G''$  dans  $G'$ . Or, l'application de l'hypothèse de récurrence à ce dernier morphisme conduit à la relation  $n'' - p'' \geq n' - 1$  ; et, par construction de  $G''$ , on vérifie  $n'' = n - 1$  et  $p'' = p - 1$ , ce qui achève la preuve de cette propriété.

#### DEFINITION 5

On appelle *morphisme contractant* ou *contraction* un épimorphisme plein du graphe  $G = (X, U)$  dans le graphe  $G' = (X', U')$  tel que pour tout élément  $x'$  appartenant à  $X'$ , le sous-ensemble  $\sigma^{-1}(x')$  de  $X$  engendre dans  $G$  un sous-graphe connexe (non-vide).

La propriété suivante est une conséquence évidente de cette définition.

#### PROPRIETE 6

Soient  $\sigma$  une contraction de  $G$  dans  $G'$  et  $x, y$  deux sommets de  $G$ . A toute chaîne  $[\sigma x, \sigma y]$  de  $G'$  correspond une chaîne  $[x, y]$  de  $G$  dont l'image par  $\sigma$  est  $[\sigma x, \sigma y]$ .

Une *contraction élémentaire* est un morphisme contractant tel qu'il existe un sommet  $x'_0$  de  $G'$  pour lequel  $|\sigma^{-1}(x'_0)| = 2$ , tandis que pour tout sommet  $x'$  différent de  $x'_0$ ,  $|\sigma^{-1}(x')| = 1$ .

Si on appelle  $x_0$  et  $y_0$  les deux sommets de  $G$  dont l'image est  $x'_0$  et  $a$  l'arc de  $U$  dont les extrémités sont  $x_0$  et  $y_0$ , on dit que  $G'$  est le *graphe contracté* de  $G$  selon  $a$ .

#### PROPRIETE 7

Si  $\sigma$  est une contraction d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  dans un graphe  $G'$  d'ordre  $n'$ ,  $\sigma$  est la composée de  $(n - n')$  contractions élémentaires.

Nous laissons au lecteur le soin de formaliser la démonstration de cette propriété ; l'idée directrice en est évidente.

Exemple : Le morphisme du graphe  $G$  dans le graphe  $G'$  (fig.1) est une contraction ; on peut l'obtenir en contractant  $G$  successivement selon les arcs  $(3,5)$ ,  $(6,7)$  et  $(6,8)$ .

Dans un graphe  $G$  fini dont l'ordre, le cardinal de l'ensemble des arcs et le nombre de composantes connexes sont respectivement désignés par  $n$ ,  $m$  et  $p$ , on définit le *nombre cyclomatique* par :

$$v(G) = m - n + p .$$

#### PROPRIETE 8

S'il existe un morphisme contractant du 1-graphe  $G$  dans le 1-graphe  $G'$ ,  $v(G') \leq v(G)$ .

Preuve : Il suffit, d'après la propriété précédente, de se borner au cas où le morphisme contractant est une contraction élémentaire. Par ailleurs, il est facile de vérifier [17 p.45] qu'un morphisme contractant conserve le nombre de composantes connexes. Pour une contraction élémentaire  $\sigma$  de  $G = (X, U)$  dans  $G' = (X', U')$ , les relations suivantes sont vérifiées :  $|X'| = |X| - 1$  et  $|U'| \leq |U| - 1$ . La propriété en découle.

#### DEFINITION 6

Un *isomorphisme* du 1-graphe  $G = (X, U)$  dans le 1-graphe  $G' = (X', U')$  est un morphisme  $\sigma$  bijectif et plein.

De façon équivalente, une bijection  $\sigma$  de  $X$  dans  $X'$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $G'$  si et seulement si

$$\forall x, y \in X \quad ((x, y) \in U \iff (\sigma x, \sigma y) \in U').$$

Il est alors clair que la bijection  $\sigma$  de  $X$  dans  $X'$  induit une bijection de  $U$  dans  $U'$ .

S'il existe un isomorphisme  $\sigma$  de  $G$  dans  $G'$ , la bijection inverse de  $\sigma$  est un isomorphisme de  $G'$  dans  $G$  et l'on dit que  $G$  et  $G'$  sont *isomorphes*. Cette relation d'isomorphie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des 1-graphes finis. Deux graphes isomorphes représentent la même structure d'adjacence et toute propriété vérifiée sur un graphe  $G$  et indépendante de la dénomination des arcs et des sommets de  $G$ , est en fait une propriété de la classe d'isomorphie à laquelle appartient  $G$ .

Les deux propriétés suivantes sont élémentaires.

#### PROPRIETE 9

Deux 1-graphes isomorphes ont même nombre de sommets et même nombre d'arcs.

#### PROPRIETE 10

S'il existe un isomorphisme  $\sigma$  du graphe  $G$  dans le graphe  $G'$ , deux sommets  $x$  et  $x'$  en bijection par  $\sigma$  ont mêmes demi-degrés et même degré.

Exemples : Parmi les quatre 1-graphes de la figure 3, chassez l'intrus !... (c'est L).

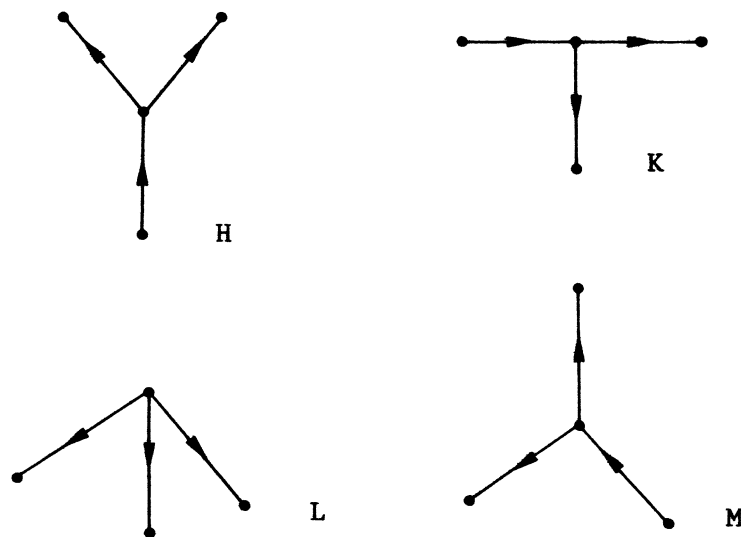


fig.3

Les deux 1-graphes de la figure 4 sont isomorphes pour la bijection  
 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \end{pmatrix}$  .

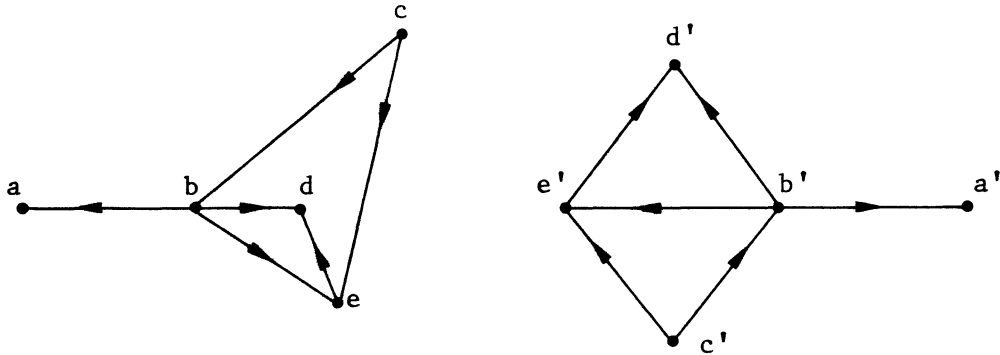


fig.4

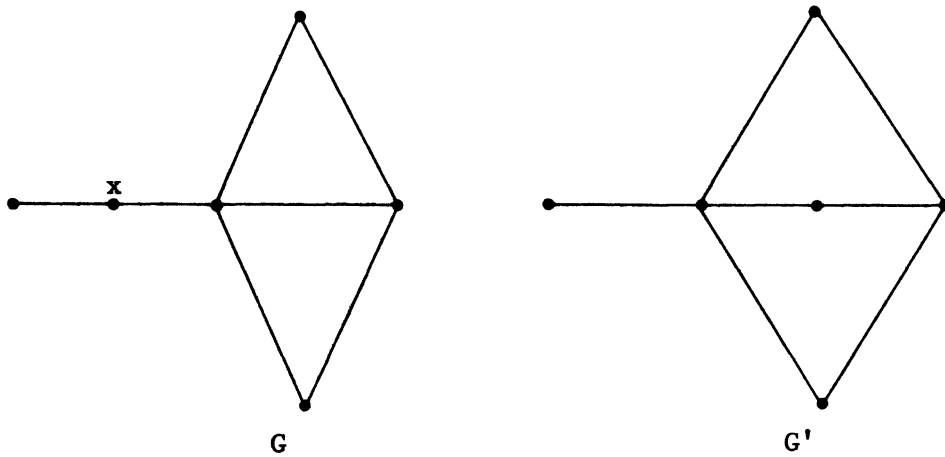


fig.5

Dans la figure 5 le sommet  $x$  de  $G$  est de degré 2 et à la fois adjacent à un sommet de degré 1 et à un sommet de degré 4. Aucun sommet de  $G'$  ne vérifie ces deux propriétés ;  $G$  et  $G'$  ne sont donc pas isomorphes. Cependant,  $G$  et  $G'$  vérifient la propriété 9 et il existe une bijection entre les deux ensembles de sommets qui satisfait à la propriété 10. Ces deux propriétés ne constituent donc pas une condition suffisante d'isomorphisme.

## II. ENDOMORPHISMES ET AUTOMORPHISMES DE GRAPHS SIMPLES

Dans cette partie, on ne considère que des graphes simples.

### DEFINITION 7

Un automorphisme (resp. un endomorphisme) du graphe simple  $G$  est un isomorphisme (resp. un morphisme) de  $G$  dans lui-même.

Un automorphisme du graphe  $G = (X, E)$  est donc déterminé par une bijection de  $X$  dans lui-même, c'est-à-dire par une permutation sur  $X$ .

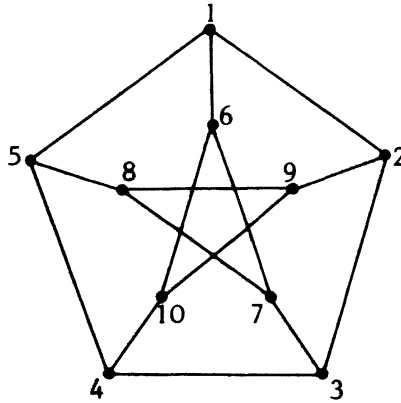


fig.6

Exemple : La figure 6 représente le Graphe de Petersen et une dénomination de ses sommets. Les deux permutations suivantes sont des automorphismes de ce graphe.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Dans la suite on représentera les permutations par des produits de cycles disjoints. Par exemple :

$$\alpha = (1,6) (2,7) (3,8) (4,9) (5,10),$$

$$\beta = (1,2,3,4,5) (6,9,7,10,8).$$

### PROPRIETE 11

L'ensemble des automorphismes d'un graphe simple  $G = (X, E)$  d'ordre  $n$  détermine un sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$ .

Preuve : Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux permutations sur  $X$  induisant des automorphismes de  $G$ . Les équivalences suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} [x,y] \in E &\iff [\alpha x, \alpha y] \in E \\ &\iff [\beta^{-1} \alpha x, \beta^{-1} \alpha y] \in E, \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\beta^{-1} \circ \alpha$  induit aussi un automorphisme de  $G$ . L'ensemble de ces permutations constitue donc un sous-groupe de  $S_n$ .

On appelle ce sous-groupe *groupe d'automorphismes* du graphe  $G$  ; il est noté  $\Gamma(G)$ .

Le *complémentaire* d'un graphe simple  $G = (X, E)$  est un graphe simple  $\bar{G} = (X, \bar{E})$  défini sur le même ensemble de sommets et tel que

$$[x,y] \in \bar{E} \iff [x,y] \notin E.$$

La propriété suivante est une conséquence immédiate de cette définition.

#### PROPRIETE 12

Un graphe et son complémentaire ont même groupe d'automorphismes.

#### PROPRIETE 13

Une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe d'automorphismes d'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  soit  $S_n$  est que  $G$  soit le graphe complet d'ordre  $n$  ( $K_n$ ) ou son complémentaire  $\bar{K}_n$ .

Preuve : Ces deux graphes admettent bien  $S_n$  comme groupe d'automorphismes. Réciproquement, considérons un graphe  $G = (X, E)$  d'ordre  $n$  possédant une arête  $[x, x']$ . Pour un couple quelconque  $(y, y')$  de sommets distincts de  $G$ , il existe une permutation  $\alpha$  de  $S_n$  telle que  $\alpha x = y$  et  $\alpha x' = y'$ . Ce qui implique  $[y, y']$  doit appartenir à  $E$ .

#### DETERMINATION DE QUELQUES GROUPES D'AUTOMORPHISMES

##### 1. Groupe d'automorphismes d'un polygone

Un polygone est un graphe simple connexe dont tous les sommets sont de degré 2.

Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une dénomination des sommets d'un polygone  $G = (X, E)$  d'ordre  $n$  telle que

$$E = \{ [x_i, x_{i+1}] / i = 1, 2, \dots, n-1 \} \cup \{ [x_1, x_n] \}.$$

Considérons les deux permutations suivantes sur  $X$  :

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

et  $\beta = (x_1) (x_2, x_n) (x_3, x_{n-1}) \dots (x_i, x_{n-i+2}) \dots$

(où le dernier cycle de  $\beta$  est de longueur 1 ou 2 selon la parité de  $n$ ).

Ces deux permutations sont des automorphismes du graphe  $G$ . Un automorphisme  $\gamma$  quelconque de  $G$  est déterminé par l'image  $x_i$  du sommet  $x_1$  et par celle du sommet  $x_2$  qui doit être, à cause de la règle d'adjacence, un des deux sommets adjacents à  $x_i$ , c'est-à-dire  $x_{i+1}$  ou  $x_{i-1}$ .

Pour la première de ces deux possibilités,  $\gamma = \alpha^{i-1}$ ,  
pour la seconde,  $\gamma = \alpha^{i-1} \circ \beta$ .

Le groupe d'automorphismes du polygone d'ordre  $n$  est donc le groupe engendré par les deux permutations  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce groupe s'appelle groupe diédral d'ordre  $2n$  et se note  $D_{2n}$ .

## 2. Détermination des groupes d'automorphismes des graphes simples d'ordre inférieur ou égal à 4

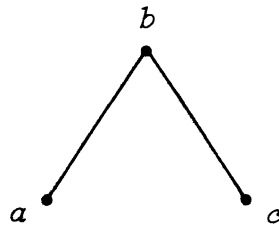


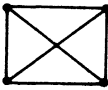
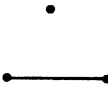
fig.7

Considérons le graphe de la figure 7. Le sommet  $b$  est le seul sommet de degré 2 ; tout automorphisme du graphe le laisse donc invariant. Par contre les sommets  $a$  et  $c$  peuvent être échangés. Un automorphisme de ce graphe se décompose en l'identité sur l'ensemble  $\{b\}$  ( $I_1$ ) et une permutation quelconque sur  $\{a, c\}$ , appartenant à  $S_2$ . D'où la notation

$$\Gamma(G) = I_1 \times S_2$$

où l'opération  $\times$  représente l'opération produit direct de deux groupes.

On construit ainsi le tableau (fig.8). [10 p. 167].

|                          |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| GRAPHES                  |  |  |  |  |
|                          |  |  |  |  |
| GROUPES D'AUTOMORPHISMES | $S_2$                                                                             | $S_3$                                                                             | $I_1 \times S_2$                                                                   | $S_4$                                                                               |

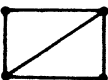
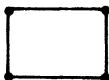
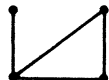
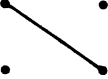
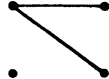
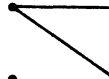
|                          |                                                                                    |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                      |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| GRAPHES                  |   |   |   |   |
|                          |  |  |  |  |
| GROUPES D'AUTOMORPHISMES | $S_2 \times S_2$<br>groupe de KLEIN                                                | $D_8$                                                                              | $I_2 \times S_2$                                                                    | $I_1 \times S_3$                                                                     |

fig.8

Les troisième et quatrième parties de cet article présentent brièvement les principaux résultats relatifs aux isomorphismes de graphes.

### III. GRAPHES ADMETTANT UN GROUPE D'AUTOMORPHISMES DONNE

Dans cette partie, nous indiquons certaines constructions de graphes simples ayant un groupe d'automorphismes *isomorphe* à un groupe donné.

Remarquons que le problème plus restreint : trouver un graphe dont le groupe d'automorphismes *est* un groupe de permutations donné, n'a pas nécessairement de solution. D'après le tableau (fig.8), le groupe  $C_3$ , groupe cyclique opérant sur 3 éléments, n'est le groupe d'automorphismes d'aucun

graphe d'ordre 3. Cependant, la figure 9 représente un graphe dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à  $C_3$  ; ce graphe réalise le nombre minimum de sommets et le nombre minimum d'arêtes possibles parmi les graphes ayant ce groupe d'automorphismes [16].

#### THEOREME 1 [7]

A tout groupe fini, on peut faire correspondre un graphe simple dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à ce groupe.

R. Frucht donne de ce théorème une démonstration constructive. La figure 10 montre le graphe obtenu par R. Frucht pour le groupe  $C_3$ .

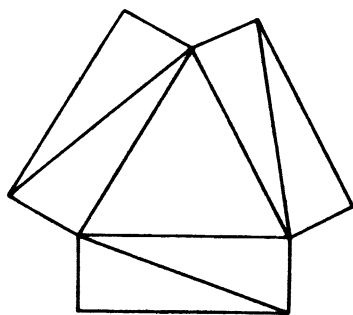


fig.9

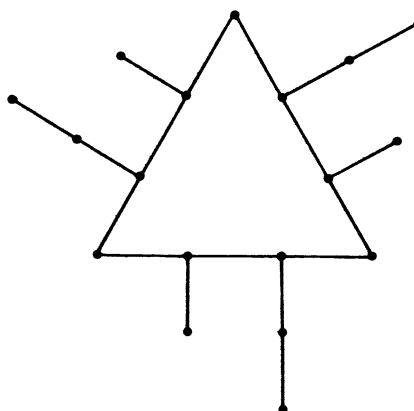


fig.10

Admettre un groupe d'automorphismes isomorphe à un groupe donné n'est pas, en fait, une condition très difficile à remplir. Le théorème suivant en apporte l'illustration.

#### THEOREME 2

Un groupe  $\Gamma$  étant donné, on peut trouver une infinité de graphes simples finis admettant un groupe d'automorphismes isomorphe au groupe donné et possédant l'une des trois propriétés suivantes :

- a)  $G$  est de connectivité  $n$  ( $n \geq 1$ ),
- b)  $G$  est  $p$ -chromatique ( $p \geq 2$ ),
- c)  $G$  est  $k$ -régulier ( $k \geq 3$ ) - c'est-à-dire

que le degré de chaque sommet est égal à  $k$ .

Ce théorème constitue la synthèse des résultats établis dans [8], [11] et [15].

## THEOREME 3 [1]

Soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux groupes finis, il existe un graphe  $G$  et un graphe  $G'$ , image de  $G$  par une contraction élémentaire (cf. déf. 5) tels que :

$$\Gamma(G) \sim \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma(G') \sim \Gamma' .$$

Le dernier résultat concernant les groupes d'automorphismes est relatif à des 1-graphes orientés particuliers :

On appelle *tournoi* un 1-graphe orienté  $G = (X, U)$  tel que ,

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in U \iff (y, x) \notin U .$$

## THEOREME 4 [13]

Il existe un tournoi dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à un groupe d'ordre impair donné.

## IV. ISOMORPHISMES ET AUTOMORPHISMES AUX ARETES

Dans cette partie, nous nous contentons d'énoncer les résultats fondamentaux dûs à Whitney [18]. La détermination du groupe d'automorphismes du graphe de Petersen est présentée comme une application du théorème 6.

## DEFINITION 8

Un isomorphisme aux arêtes du graphe simple  $G = (X, E)$  dans le graphe simple  $G' = (X', E')$  est une bijection de  $E$  dans  $E'$  telle que deux arêtes de  $G'$  soient adjacentes si, et seulement si, les arêtes de  $G$  dont elles sont les images sont elles-mêmes adjacentes.

Le *graphe adjoint* (ou *line-graph* selon la terminologie anglo-saxonne)  $L(G)$  d'un graphe simple  $G = (X, E)$  est un graphe simple dont l'ensemble des sommets est en bijection avec  $E$  ; deux tels sommets étant adjacents si, et seulement si, les arêtes correspondantes de  $G$  ont un sommet commun. Ainsi, un isomorphisme aux arêtes d'un graphe  $G$  dans un graphe  $G'$  est un isomorphisme de  $L(G)$  dans  $L(G')$ .

## PROPRIETE 14

Deux graphes isomorphes ont des graphes adjoints isomorphes.

*Preuve* : Soit en effet un isomorphisme  $\alpha$  de  $G(X, E)$  dans  $G' = (X', E')$ .

L'application  $\bar{\alpha}$  définie par

$$\forall [x,y] \in E \quad \alpha[x,y] = [\alpha x, \alpha y]$$

détermine une bijection de  $E$  dans  $E'$  telle que  $\alpha x$  soit le sommet commun aux arêtes  $\alpha[x,y]$  et  $\alpha[x,z]$  si  $[x,y]$  et  $[x,z]$  sont deux arêtes adjacentes de  $G$ .

La réciproque suivante constitue un résultat fondamental obtenu par H. Whitney [18] :

#### THEOREME 5

A l'exception des deux graphes de la figure 11, deux graphes dont les graphes adjoints sont connexes et isomorphes sont eux-mêmes connexes et isomorphes.

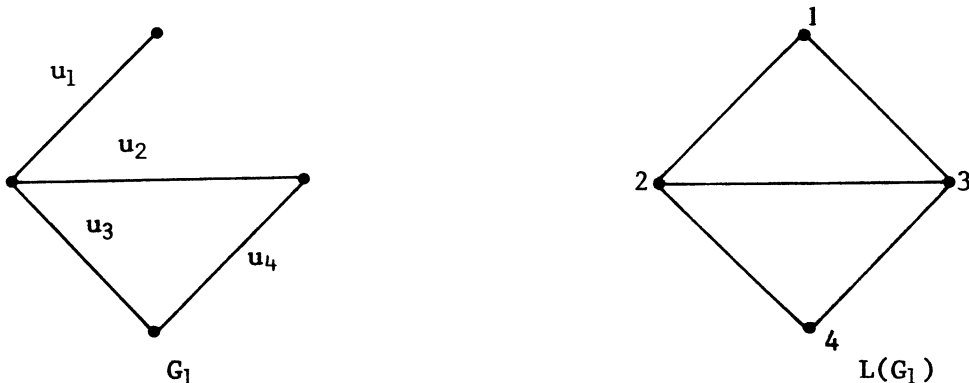


fig. 11

Un *automorphisme aux arêtes* d'un graphe simple  $G$  est un isomorphisme aux arêtes de  $G$  dans lui-même. L'ensemble de ces automorphismes constitue le groupe d'automorphismes du graphe adjoint de  $G$ .

#### THEOREME 6 [18]

A l'exception des trois graphes de la figure 12, les groupes d'automorphismes d'un graphe simple et de son graphe adjoint sont isomorphes.



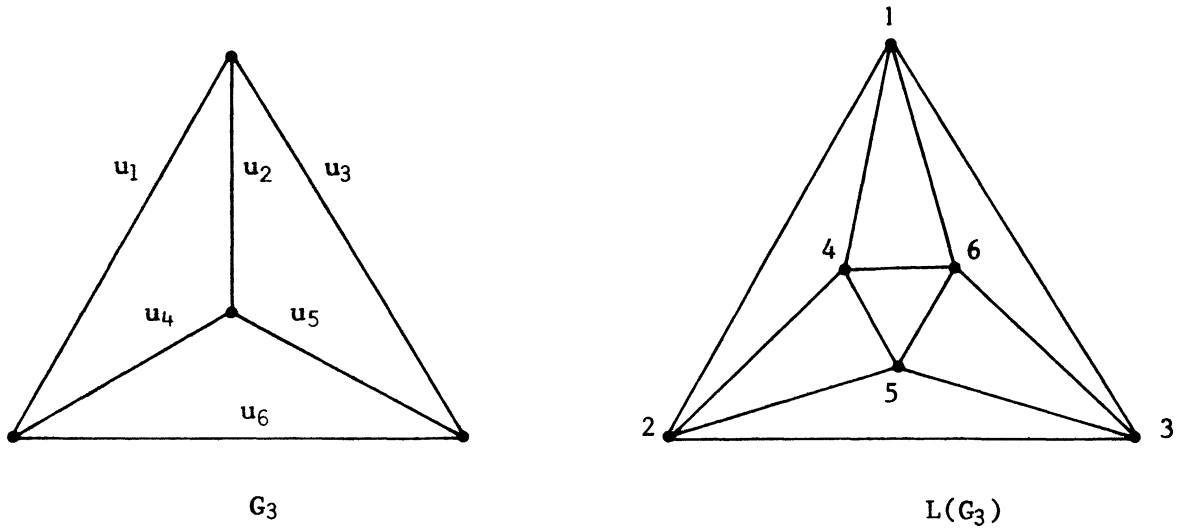
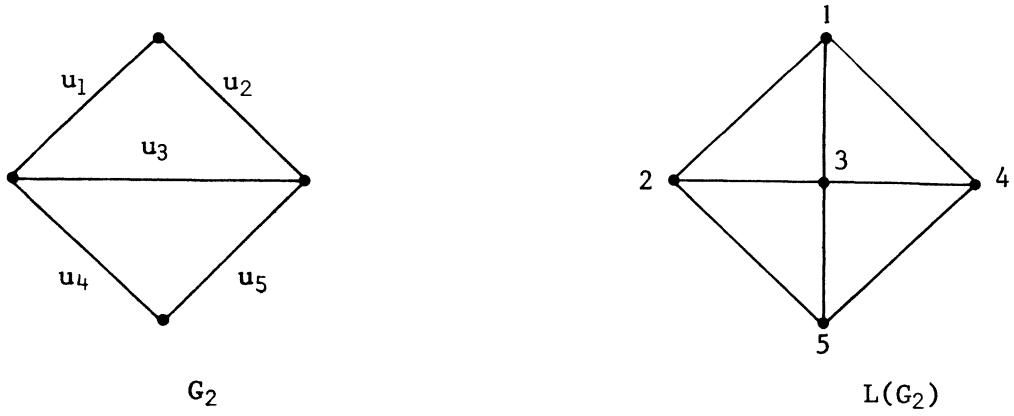


fig.12

## APPLICATION

Les figures 13 et 14 montrent le graphe  $K_5$  et le graphe de Petersen, ainsi qu'une dénomination de leurs sommets qui prouve à l'évidence que le graphe de Petersen est isomorphe au complémentaire du graphe adjoint de  $K_5$ .

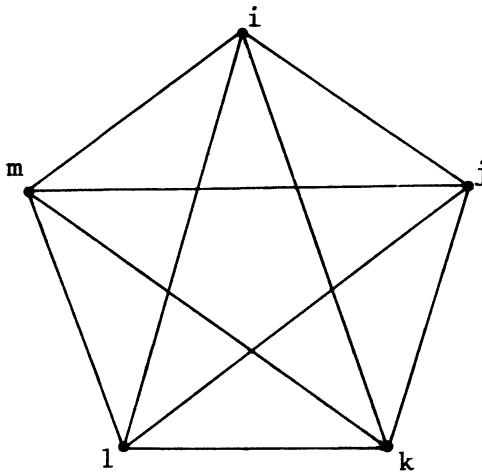


fig.13

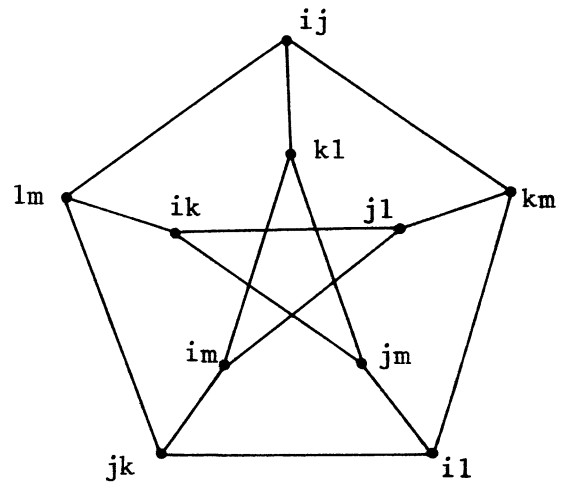


fig.14

Or,  $\Gamma(\overline{L(K_5)}) \sim \Gamma(L(K_5))$  par la propriété 12,  
 $\Gamma(L(K_5)) \sim \Gamma(K_5)$  par le théorème 6  
 et  $\Gamma(K_5) \sim S_5$  par la propriété 13.

#### PROPRIETE 15 [6]

Le groupe d'automorphismes du graphe de Petersen est isomorphe au groupe symétrique  $S_5$ .

#### V. APPLICATION : UNE VARIANTE DU JEU DE LA TOUR DE HANOI

Les études sur la Tour de Hanoï sont nombreuses (voir [9], par exemple), et nous avons préféré étudier une variante de ce jeu qui apparaît plus intéressante du point de vue qui nous occupe. Dans la suite, nous nous attachons à montrer comment on peut associer un graphe à un tel jeu et comment l'étude des morphismes de ce graphe contribue à la recherche des solutions de ce jeu.

Indiquons brièvement comment se définit ce jeu. La Tour de Hanoï est constituée d'un empilement d'éléments de taille décroissante. Cet empilement est réalisé sur un emplacement - généralement matérialisé par une broche verticale - et le jeu consiste à reconstruire la Tour sur un autre emplacement en respectant les deux règles suivantes :

- . on ne peut déplacer qu'un élément à la fois,
- . un élément ne peut être déplacé que s'il occupe la position supérieure d'un empilement. L'emplacement qui le reçoit peut être, soit un empilement vide, soit un empilement dont la position supérieure est occupée par l'élément qui a une taille immédiatement supérieure à la sienne.

Cette dernière règle est un peu plus restrictive que la règle habituelle de déplacement dans le jeu de la Tour de Hanoï. Il en résulte que la résolution du jeu est profondément modifiée. En particulier, dans notre cas, en dehors du nombre  $n$  d'éléments de la Tour, le nombre d'emplacements disponibles (noté  $p$ ) intervient dans la détermination de l'existence de solutions.

Les questions théoriques concernant ce jeu sont les suivantes :

- 1) A quelles conditions un jeu de  $p$  emplacements et de  $n$  éléments est-il réalisable ?
- 2) Si ces conditions sont remplies, quelles sont les séquences de déplacements optimales qui permettent d'obtenir la solution ?

On démontre que la première question admet une réponse positive dès lors que  $n$  est inférieur ou égal à  $2^{p-1}-1$  (la démonstration de ce résultat est laissée au lecteur). L'étude des graphes représentatifs de ces jeux permettra d'indiquer quelques réponses à la seconde question.

#### Exemple du jeu ( $p = 3, n = 3$ )

Nous allons représenter ce jeu à l'aide d'un graphe dont les sommets constitueront l'ensemble des situations permises et dont les arcs représenteront les déplacements autorisés.

Pour représenter les situations, nous utilisons un codage : nous supposons que les éléments de la Tour sont numérotés de (1) à (n), par ordre de taille décroissante. Nous codons chaque situation par un mot de longueur  $n$  sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, p\}$  des emplacements. Le mot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  signifie que dans la situation correspondante, l'élément (i) est à l'emplacement  $x_i$ .

Par exemple, pour  $p = 3$  et  $n = 3$ , le mot 211 décrit la situation où l'élément (1) est sur l'emplacement 2, tandis que les éléments (2) et (3) sont empilés dans cet ordre sur l'emplacement 1. Remarquons que certains mots du code ne correspondent à aucune situation : des mots tels que 212, où les occurrences d'une même lettre ne sont pas consécutives, sont illicites car à aucun moment on ne peut empiler l'élément (3) sur l'élément (1).

Par ailleurs notons que tout déplacement autorisé est réversible ; dans le graphe représentatif, nous remplacerons toute paire d'arcs inverses par une seule arête de mêmes extrémités.

Ainsi s'interprète le graphe de la figure 15.

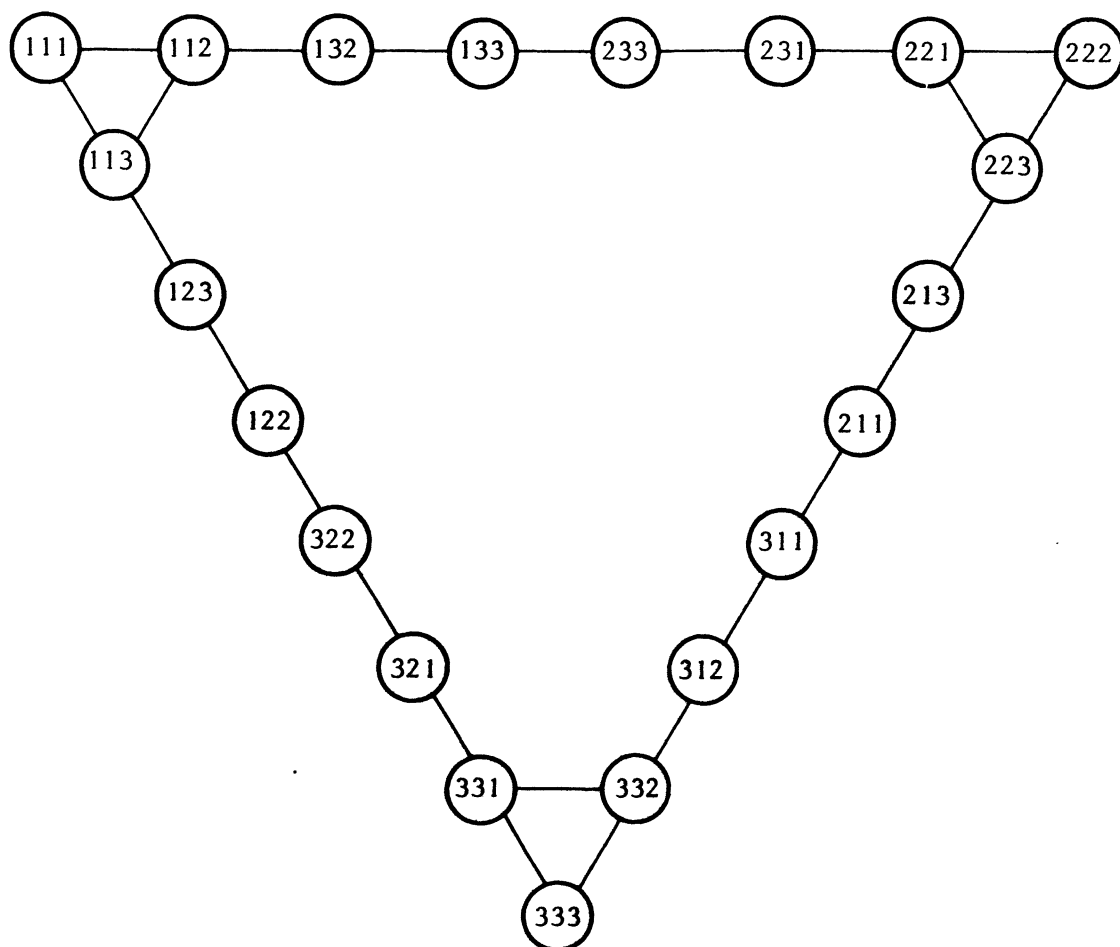


fig. 15

Dans ce cas, la simple construction de graphe qui comporte 21 sommets et 24 arêtes résout complètement les questions soulevées ci-dessus. Les trois sommets 111, 222 et 333 représentent les trois positions initiales de la Tour. Entre deux quelconques de ces positions, la solution optimale du jeu est unique et elle s'obtient en 7 déplacements.

### Etude de quelques morphismes concernant les jeux de 4 emplacements

Dès que l'on s'intéresse aux jeux de plus de trois emplacements, la dimension du graphe à considérer devient trop importante pour que l'on puisse espérer trouver les solutions du jeu par simple considération visuelle du graphe.

En effet, parmi les jeux sur 4 emplacements, le jeu de 4 éléments détermine 136 situations et 276 déplacements possibles ; pour 7 éléments, le graphe à considérer possède 916 sommets et 1140 arêtes. On peut toutefois remarquer que ce dernier graphe n'est pas connexe : en effet, la situation 1223344 (décrite par le code défini à l'alinéa précédent) n'autorise aucun déplacement ; il lui correspond donc un sommet isolé du graphe. Seule nous intéresse dans ce cas la composante connexe définie par les situations accessibles à partir de la situation initiale, mais en réalité, le problème de la détermination de cette composante est aussi complexe que la résolution du jeu.

L'étude des morphismes des graphes représentatifs des jeux sur 4 emplacements donne des informations utiles sur les solutions de ces jeux. Nous étudions ci-après deux exemples de tels morphismes.

#### A. AUTOMORPHISMES

Nous considérons dans ce paragraphe tous les jeux sur 4 emplacements ( $p = 4$ ) et comportant un nombre  $n$  quelconque d'éléments. On désignera par  $G_n$  le graphe associé au jeu ( $p = 4, n$ ).

On peut remarquer que toute permutation sur l'ensemble des emplacements induit une permutation sur l'ensemble des situations du jeu.

Cette seconde permutation détermine un automorphisme du graphe  $G_n$ .

En particulier, grâce à cette équivalence entre les emplacements, on peut restreindre la recherche des solutions au cas où l'emplacement de départ est 1 et où l'emplacement d'arrivée est 2. Dans ces conditions, deux automorphismes prennent une importance particulière.

a) L'automorphisme  $\alpha$  déduit de l'échange des emplacements 3 et 4.

Par cet automorphisme tout chemin solution du jeu est transformé en un autre chemin solution du même longueur.

b) L'automorphisme  $\beta$  déduit de l'échange des emplacements 1 et 2.

Si une chaîne a pour extrémités 11..1 et 22.2, il est de même de son image par  $\beta$ . Ainsi, à tout chemin qui représente une solution du jeu correspond une autre solution, représentée par le chemin inverse de l'image par  $\beta$  du chemin initial.

Cette propriété permet de simplifier la recherche des solutions. Soient en effet  $s$  et  $s'$  deux sommets de  $G_n$  qui s'échangent par l'automorphisme  $\beta$  (cet automorphisme est induit par une involution, si bien que tout sommet a pour image lui-même ou un sommet différent dont il est l'image). La connaissance de chemins allant du sommet 11..1 à  $s$  et à  $s'$  permet de déterminer une solution du jeu : celle dont le chemin est la concaténation de  $(11..1, s)$  et de l'inverse de l'image par  $\beta$  du chemin  $(11..1, s')$ .

Si on veut chercher tous les chemins optimaux entre 11..1 et 22..2 par une méthode énumérative, l'existence de ces deux automorphismes se révèle simplificatrice : on peut d'une part éviter de poursuivre les recherches lorsque le chemin que l'on étudie est l'image par  $\alpha$  d'un chemin déjà parcouru ; par ailleurs, l'identification de couples de sommets  $(s, s')$  qui s'échangent par l'automorphisme  $\beta$  permet d'arrêter l'exploration à mi-parcours.

Grâce à ces deux simplifications, on peut construire sans difficultés le graphe des cheminements optimaux du jeu ( $p = 4, n = 4$ ), représenté par la figure 16 ci-contre.

Les solutions optimales de ce jeu sont obtenues en 9 déplacements. On remarquera l'importance du rôle joué par les cheminements stables par l'automorphisme  $\beta$ .

#### B. EPIMORPHISMES PLEINS DE $G_n$ DANS $G_3$

Nous restreignons l'étude ci-après au cas où  $n$  est compris entre 3 et 7 (seuls cas non triviaux où le jeu admet une solution).

Pour tout  $n$  ( $3 \leq n \leq 7$ ), considérons la surjection dont l'ensemble de départ est l'ensemble des situations du jeu  $(4, n)$ , dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des situations du jeu  $(4, 3)$  et qui est définie comme suit : l'image d'une situation du jeu  $(4, n)$  est la situation du jeu  $(4, 3)$  qui représente la position des trois premiers éléments du jeu  $(4, n)$ . En termes de codage, un mot de longueur  $n$  représentant une situation du jeu  $(4, n)$  a pour image le mot de longueur 3 qui est la section commençante de ce mot.

On démontre que pour  $n$  compris entre 3 et 7, cette application induit un épimorphisme plein de  $G_n$  dans  $G_3$  (la démonstration de cette propriété consiste en une simple vérification de la définition).

Or, le graphe  $G_3$  est aisément constructible et on peut chercher à l'utiliser pour trouver des solutions de jeux à plus grand nombre d'éléments.

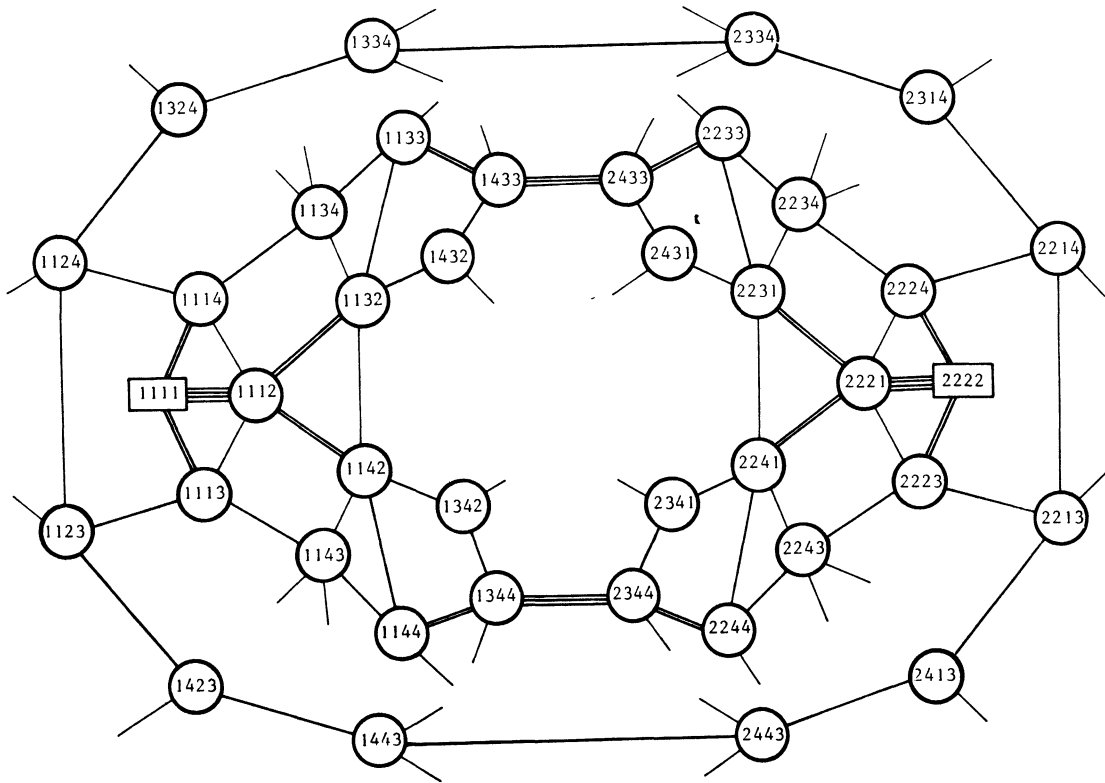


fig. 16

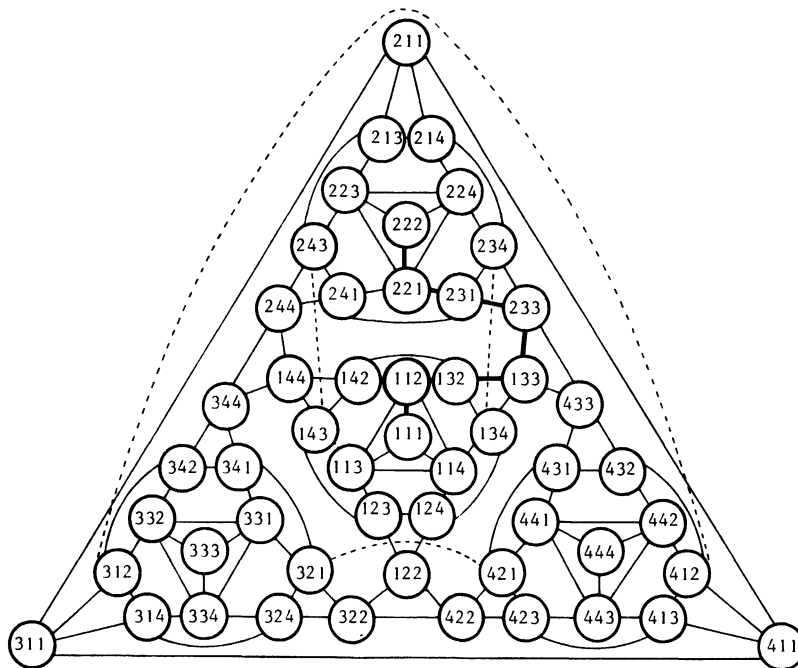


fig. 17

Huit arêtes n'ont pas été représentées sur la figure : ce sont celles qui se déduisent des arêtes dessinées en pointillé par rotation de  $120^\circ$  et  $240^\circ$  autour du centre.

En particulier, il est intéressant de savoir à quelle condition l'épimorphisme précédent est une contraction. En effet, en vertu de la propriété 6, tout chemin (111,222) du graphe  $G_3$  pourrait alors se "relever" en un chemin entre 11..1 et 22..2 dans le graphe  $G_n$ . On peut établir que l'épimorphisme précédent est une contraction pour  $n = 3$  (cas trivial) et  $n = 4$ . Il en résulte que le problème de la détermination des solutions du jeu est complètement résolu dans ce cas ; en particulier, on retrouve pour  $n = 4$  les solutions présentées sur la figure 16.

La situation n'est pas aussi favorable pour  $n > 4$ . Pour  $n = 5$ , on vérifie que les sommets de  $G_3$  qui correspondent à des situations n'utilisant pas plus de 2 emplacements ont une image réciproque qui constitue un sous-graphe partiel connexe de  $G_5$ . En outre, les seuls sommets de  $G_3$  qui définissent un sous-graphe partiel de  $G_6$  et  $G_7$  sont 111, 222 et 333.

Cependant, une solution peut néanmoins se dégager de cette analyse. Nous décrivons cette solution dans le cas où  $n = 7$ . On observe qu'il existe dans  $G_3$  un chemin joignant 111 à 222 et dont aucune situation n'utilise l'emplacement 4 (chemin représenté par des arêtes épaisses sur la figure 17). Une solution consiste alors à passer de la situation 1111111 à 1114444 dans le sous-graphe connexe de  $G_7$  dont l'image est 111, puis à 2224444 selon le chemin découvert dans  $G_3$  (en laissant les quatre éléments terminaux immobiles); on chemine enfin jusqu'à 2222222, dans le sous-graphe connexe de  $G_7$  dont l'image est le sommet 222 de  $G_3$ . De plus, cette solution se trouve être la seule solution optimale du jeu (4,7).

A titre d'exercice, on pourra utiliser cette méthode pour déterminer toutes les solutions optimales des jeux (4,5) et (4,6).

Nous espérons avoir convaincu le lecteur de la possibilité de tirer quelque profit de l'étude des automorphismes d'un graphe ou de l'étude de morphismes de graphes. L'important, nous semble-t-il, est de ne pas considérer ces techniques comme monolithiques ou exclusives et de garder présent à l'esprit que c'est, le plus souvent, l'application des concepts les plus élémentaires qui conduit aux résultats les plus efficaces.

Deux exemples d'utilisation de ces techniques nous semblent particulièrement dignes d'être signalés : d'une part, à titre historique, l'isomorphisme mentionné par M. Gardner [9 p.56] entre le jeu de la Tour de Hanoï traditionnel et le jeu d'Icosie ; d'autre part, les considérations d'épimorphismes de jeux utilisées par G. Coray [5] pour résoudre certains d'entre eux sur ordinateur.

## VI. AUTRES APPLICATIONS

La plupart des autres applications des techniques algébriques de graphes concernent des types de graphes plus sophistiqués. Il est en effet fréquent que les besoins de disciplines diverses conduisent à créer de nouveaux types de graphes. C'est ainsi que les techniques de simulation de systèmes font appel à des graphes algébriques orientés, ou encore que les problèmes de flot et de transport nécessitent l'usage de graphes valués.

La linguistique, quant à elle, a également recours au formalisme des graphes mais a besoin de porter des informations sur les sommets et les arêtes de ces graphes. On parle alors de graphes étiquetés. Ces graphes servent à représenter la structure syntaxique d'un discours et le problème le plus important est de rechercher, à partir du graphe, les éléments syntaxiques qui composent cette structure. Dans le graphe, cela revient à chercher des sous-graphes partiels *isomorphes* aux graphes représentant les structures élémentaires.

Ce problème, important et difficile, a donné lieu à de nombreux travaux de programmation informatique (voir [2] et [4, chap. 3]). Cependant, il faut constater que l'on cherche de plus en plus à utiliser des représentations syntaxiques qui rendent plus simple la recherche des isomorphismes précédents. Cette orientation présente l'avantage de reporter sur des problèmes linguistiques une attention détournée par des problèmes techniques liés aux graphes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BABAI L., "Automorphism groups and edge-contraction", *Discrete Math.*, 8(1974), 13-20.
- [2] BARBAULT M.C., DESCLES J.P., *Transformations formelles et théories linguistiques*, Paris, Dunod, Doc. de linguistique quantitative n°11, 1972.
- [3] BERGE C., *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.
- [4] BOITET Ch., *Sémantique et traduction automatique - quelques remarques*, Grenoble, Publication du Groupe d'Etudes sur la Traduction Automatique, G-3000-A, 1974.
- [5] CORAY G., "Additive features in positional games", *Proceedings sur les procédures informatiques d'apprentissage*, OTAN, 1974, 243-269.
- [6] FRUCHT R., "Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder", *Comment. Math. Helv.*, 9 (1937), 217-223.
- [7] FRUCHT R., "Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe", *Compositio Math.*, 6 (1938), 239-250.
- [8] FRUCHT R., "Graphs of degree three with a given abstract group", *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 365-378.
- [9] GARDNER M., *Problèmes et divertissements mathématiques*, Paris, Dunod, 1964.
- [10] HARARY F., *Graph theory*, Reading, Addison-Welley, 1969 (chap.14).
- [11] IZBICKI H., "Reguläre Graphen 3., 4. und 5. grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen", *Monath. Math.*, 61 (1957), 42-50.
- [12] Mc LANE S., BIRKHOFF G., *Algèbre - Tome 1 - Structures fondamentales*, Paris, Gauthier-Villars, 1970.
- [13] MOON J., *Topics on tournaments*, New York, Holt Rinehart & Winston, 1968.
- [14] ORE O., *Theory of graphs*, Providence, American Mathematical Society, Coll. Publ. n°38, 1962.
- [15] SABIDUSSI G., "Graphs with given group and given graph-theoretical properties", *Canad. J. Math.*, 9 (1957), 515-525.
- [16] SABIDUSSI G., "On the minimum order of graphs with given automorphism group", *Monath. Math.*, 63 (1959), 124-127.
- [17] TUTTE W.T., *Connectivity in Graphs*, Toronto, Toronto University Press, 1967 (chap. 6 & 7).
- [18] WHITNEY H., "Congruent graphs and the connectivity of graphs", *Amer. J. Math.*, 54 (1932), 150-168.