MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

Matrices ordonnables : une étude algébrique

Mathématiques et sciences humaines, tome 50 (1975), p. 15-22

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__50__15_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (13e année, n°50, 1975, p.15-22)

MATRICES ORDONNABLES : UNE ETUDE ALGEBRIQUE

M. EYTAN *

0. INTRODUCTION

Dans un article récent ([1]), J.Bertin introduit, sous le nom de matrice ordonnable, une technique de manipulation graphique qui, à partir d'un tableau comportant des noirs et des blancs disposés de façon quelconque, permet d'obtenir un autre tableau où les lignes et les colonnes ont été regroupées de sorte que les plages rectangulaires noires s'échelonnent le long de la diagonale seulement. Puis il en tire des conclusions méthodologiques opposant ce procédé à la Mathématique (sous-entendu le numérique).

Pour efficace et utile que ce procédé soit sur le plan pratique, il nous a suggéré quelques réflexions. Aussi aimerions-nous :

. montrer sur cet exemple très concret que la Mathématique est loin de se réduire à des opérations numériques, même dans le domaine des Sciences Humaines et qu'on peut traduire l'essence de ces manipulations graphiques en termes algébriques,

. soulever quelques problèmes que la manipulation graphique ne peut résoudre,

. différer avec les conclusions méthodologiques de J.Bertin.

1. FORMULATION PRECISE DU PROBLEME

Notre donnée initiale sera un tableau rectangulaire T dont les éléments t_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$) prennent les seules valeurs 0(blanc) ou 1(noir). Soient E un ensemble à m éléments (notés x_i, $i=1,\ldots,m$) et F un

---

* Cet article est le résumé d'un travail fait en 1968-1969, lorsque l'auteur faisait partie du Centre de Calcul de la Maison des Sciences de l'Homme.

ensemble à n éléments (notés y_j, j=1,...,n). Au tableau T on associe canoniquement la partie G du produit cartésien E × F définie par :

$$(x_i, y_j) \in G \text{ si et seulement si } t_{ij}=1.$$

Autrement dit le tableau T n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de l'ensemble G. On peut alors considérer G, partie de E × F, comme le graphe d'une correspondance (notée encore G), qui à x associe G(x), coupe de la partie G suivant x (ensemble des y tels que (x,y) ∈ G).

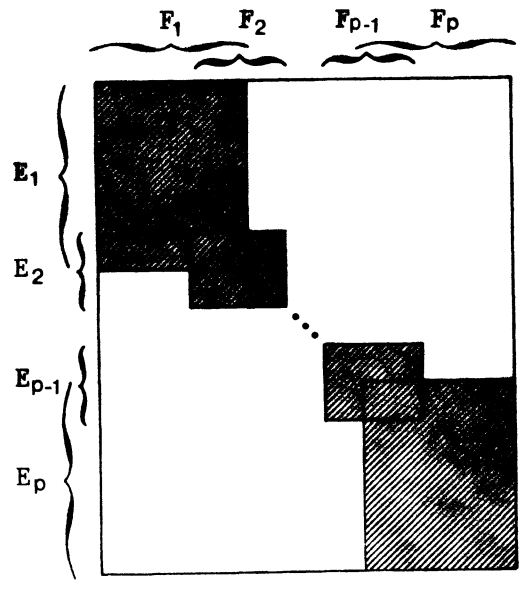
Le problème de J. Bertin peut alors se formuler dans les termes suivants : étant donné le tableau T (considéré comme celui d'une correspondance G de l'ensemble E vers l'ensemble F), obtenir par de seules permutations des lignes et des colonnes de T, un tableau $\tilde{T}$ "quasi-diagonal" (les 1 se trouvent tous dans des rectangles se recoupant au plus deux à deux, disposés le long de la diagonale).

En termes encore plus précis : trouver un recouvrement $(E_k)_{k=1,\ldots,p}$ de E et un recouvrement $(F_k)_{k=1,\ldots,p}$ de F vérifiant (fig.1) :

(1) $(x_i, y_j) \in G$ si et seulement si il existe un $k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $x_i \in E_k$ et $y_j \in F_k$ (même indice k pour E. et F.).

(2) pour tout k et tout ℓ (k,ℓ=1,...,p), si $|k-\ell| > 1$ alors $E_k \cap E_\ell = \emptyset$, $F_k \cap F_\ell = \emptyset$.

(3) les E_k et F_k vérifiant (1) et (2) sont maximaux (pour l'inclusion).



Remarque : la condition (2) traduisant le fait que les rectangles se coupent au plus deux à deux peut se généraliser facilement ; nous en laissons le soin au lecteur.

2. EXEMPLES D'APPLICATION

. Ex.1 : ordination des marges

Supposons donné un ensemble d'objets archéologiques datant d'un certain nombre m d'époques, qui possèdent un certain nombre n de propriétés. On suppose les objets caractérisés par les propriétés de telle façon que :

a) les objets d'une même époque i possèdent tous les mêmes propriétés,

b) un objet d'une époque k ne peut avoir aucune propriété commune avec un objet d'une époque au-delà de k+1 (et par conséquent en-deça de k-1).

Dressons alors un tableau rectangulaire de dimension m × n, en portant dans la case (i,j):

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si les objets de l'époque i possèdent la propriété j} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que la quasi-diagonalisation induit sur les lignes un ordre entre époques qui n'est autre que l'ordre chronologique (ascendant ou descendant, au spécialiste d'en décider). L'ordre sur les colonnes donne alors l'évolution dans le temps des propriétés des objets.

. Ex.2 : ordination du produit cartésien

On sait que si l'on prend une souche microbienne et qu'on la soumet à un traitement par un anti-biotique, celle-ci développe une résistance naturelle qui finit par rendre l'anti-biotique inopérant.

Supposons alors qu'on soumette m souches microbiennes, obtenues par ce procédé, à n anti-biotiques différents. Dressons comme précédemment un tableau m × n où l'on mettra dans la case (i,j) :

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la souche i est insensible à l'anti-biotique j} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que la quasi-diagonalisation, une fois réalisée, traduit l'évolution de l'immunité acquise de la souche de départ.

Nous nous bornons à ces deux exemples ; le lecteur tant soit peut familier des Sciences Humaines sait qu'ils sont légion.

3. MATRICES ORDONNABLES ET TREILLIS DE GALOIS

Rappelons brièvement ([2],[3],[4]) qu'à la correspondance G de E vers F on peut associer les fonctions $f_* : P(E) \longrightarrow P(F)$ et $f^* : P(F) \longrightarrow P(E)$, définies par $f_*X = \bigcap_{x \in X} G(x)$ et $f^*Y = \bigcap_{y \in Y} G^{-1}(y)$ (G^{-1} étant la correspondance réciproque de G), où P est l'opérateur ensemble de parties. Ces fonctions définissent, par $X \longmapsto \overline{X} = f^*f_*X$ (resp. $Y \longmapsto \overline{Y} = f_*f^*Y$) une fermeture (application isotone, idempotente et croissante) dans le treillis $P(E)$ (resp. $P(F)$), dont la restriction aux fermés de $P(E)$ (resp. de $P(F)$) est bijective. Les deux treillis de fermés sont anti-isomorphes, à l'ordre de l'un correspondant l'ordre dual de l'autre. Il est donc loisible de les représenter par un treillis L unique, appelé treillis de Galois de la correspondance G. Ses éléments sont les sous-ensembles $\overline{X} \times \overline{Y}$ de $E \times F$, avec $\overline{Y} = f_*\overline{X}$ (et donc $\overline{X} = f^*\overline{Y}$). Les opérations du treillis sont définies par

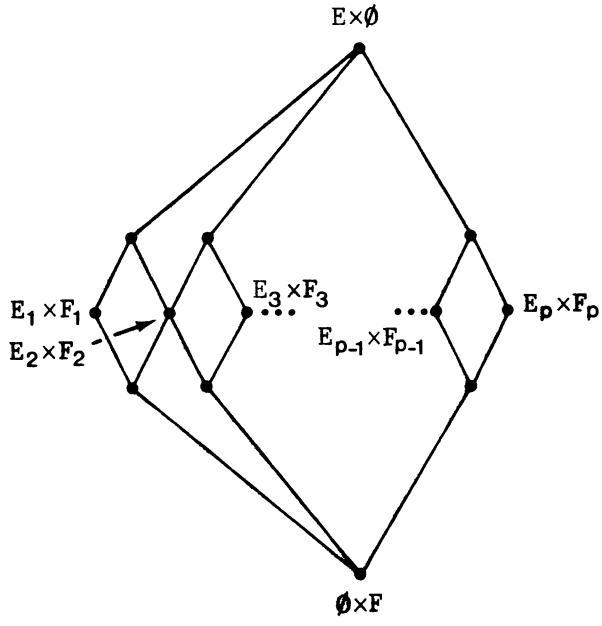
$$(\overline{X} \times \overline{Y}) \wedge (\overline{X}' \times \overline{Y}') = (\overline{X} \cap \overline{X}') \times \overline{(\overline{Y} \cup \overline{Y}')}$$

$$(\overline{X} \times \overline{Y}) \vee (\overline{X}' \times \overline{Y}') = \overline{(\overline{X} \cup \overline{X}')} \times (\overline{Y} \cap \overline{Y}')$$

Or le treillis de Galois L de G est invariant par permutation des lignes et des colonnes du tableau de G, puisqu'il ne dépend que de la correspondance. Par conséquent, pour savoir s'il est possible de ramener par permutations des lignes et des colonnes à la forme quasi-diagonale, il suffit de caractériser le treillis de Galois correspondant à cette forme.

Soit donc $\tilde{T}$ un tableau quasi-diagonal, au sens précis défini au §1. Il est clair qu'on a $f_*E_k = F_k$ (resp. $f^*F_k = E_k$), puisque F_k (resp. E_k) est le plus grand des Y (resp. des X) vérifiant $E_k \times Y \subset G$ (resp. $X \times F_k \subset G$) (condition (1),(2) et (3) du §1). Rappelons pour mémoire que f_*X (resp. f^*Y) est le plus grand des $X \in P(E)$ (resp. des $Y \in P(F)$) tels que $X \times Y \subset G$. Par conséquent les fermés du treillis de Galois L de G sont les $E_k \times F_k$, et ce sont les seuls, d'après la condition (1) du §1.

On va montrer que le treillis des fermés est constitué, le majorant universel $E \times \emptyset$ et le minorant universel $\emptyset \times F$ mis à part, de trois niveaux au plus. En d'autres termes les chaînes maximales sont toutes de longueur au plus 5, ou encore le treillis de Galois L est de hauteur au plus 5. En effet (fig.2) :



a) au niveau "central" on trouve les $E_k \times F_k$. Ceux-ci sont incomparables dans le treillis, car à supposer que $(E_k \times F_k) \wedge (E_{k'} \times F_{k'}) = E_k \times F_k$, on aurait $(E_k \cap E_{k'}) \times (F_k \cup F_{k'}) = E_k \times F_k$, soit en particulier $E_k \cap E_{k'} = E_k$, impossible si $k \neq k'$.

b) au niveau immédiatement en-dessous de ce niveau central on trouve les seuls $(E_k \times F_k) \wedge (E_{k+1} \times F_{k+1})$, $(k=1,\ldots,p-1)$.
En effet pour les ℓ vérifiant $|k-\ell| > 1$, on a

$$(E_k \times F_k) \wedge (E_\ell \times F_\ell) = (E_k \cap E_\ell) \times (\overline{F_k \cup F_\ell}) = \emptyset \times (\overline{F_k \cup F_\ell})$$

par la condition (2) du §1. Or $f_*\emptyset = F$ et par suite $(E_k \times F_k) \wedge (E_\ell \times F_\ell) = \emptyset \times F$ pour tout ℓ vérifiant $|k-\ell| > 1$.

c) dualement, au niveau immédiatement au-dessus du niveau central on trouve les seuls $(E_k \times F_k) \vee (E_{k+1} \times F_{k+1})$ $(k=1,\ldots,p-1)$.

Remarque : si la condition (2) du §1 est généralisée de façon à permettre des intersections de rectangles autres que les intersections au plus deux à deux, il suffit de modifier en conséquence b) et c) ci-dessus et l'on obtient d'autres conditions sur la hauteur du treillis.

Finalement pour qu'un tableau T quelconque soit quasi-diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition

(QD) le treillis de Galois L de la correspondance G associée au tableau T est de hauteur au plus égale à 5.

Cette condition peut se vérifier facilement en ordinateur par un algorithme (dû à M. Giraud), qui donne en outre la forme quasi-diagonale du tableau.

4. MANIPULATION GRAPHIQUE ET LA CONDITION ALGEBRIQUE (QD)

Dans le §3 ci-dessus, nous avons trouvé la condition (QD) nécessaire et suffisante pour qu'un tableau T soit quasi-diagonalisable. A la lecture de l'article cité de J.Bertin, il ne nous était pas apparu évident que l'on puisse toujours ramener le tableau donné à la forme quasi-diagonale (et l'étude algébrique montre à l'évidence que tel n'est pas le cas).

Mais il y a plus important : à supposer même que pour un tableau T donné la condition (QD) soit satisfaite, la manipulation graphique se fait de façon intuitive et non pas selon un algorithme précis. Or un procédé intuitif peut ne pas aboutir, soit que l'on tourne en rond, soit que l'on soit dans une impasse.

L'avantage de la méthode algébrique c'est que quand T est quasi-diagonalisable, elle donne sa forme quasi-diagonale (le tableau peut être reconstruit facilement à partir du treillis) selon un algorithme mécanisable. Et nous ne parlons pas du problème de la taille des tableaux à quasi-diagonaliser.

Enfin un mot de méthodologie et d'épistémologie : voici un problème manifestement non-numérique qu'on peut parfaitement résoudre algébriquement et même traiter en ordinateur. Par conséquent les éléments regroupés ne le sont nullement en vertu d'une "catégorisation interne" ésotérique et mystérieuse mais uniquement en vertu du fait qu'ils sont mis en correspondance par le tableau. La seule chose qui ait une signification réelle est la façon dont les éléments sont mis en correspondance dans le tableau : celle-ci, pourrait-on dire, ne reflète que ce qui se passe dans la tête du praticien qui dresse le tableau. Considérer Mathématique et Graphique comme les deux faces d'un Janus revient à borner singulièrement la Mathématique, et est constamment démenti par les faits.

5. APPROXIMATION A LA QUASI-DIAGONALISABILITE

Puisque la quasi-diagonalisation ne peut être réalisée que si la condition (QD) est satisfaite, il y a lieu de nous demander ce qu'on peut faire si elle ne l'est pas.

Bien entendu un tel problème ne se pose même pas à J. Bertin. Il nous semble que ce qu'il fait en réalité (que la condition(QD) soit satisfaite ou non), c'est de quasi-diagonaliser une partie du tableau en laissant un résidu dans les lignes du bas du tableau, encore que nous n'ayons pas bien compris ce qu'il fait.

Pour nous, puisqu'il est impossible d'amener le tableau à la forme quasi-diagonale, force est d'introduire une procédure d'approximation.

Voici l'idée sous-jacente à la procédure proposée : ne pas pouvoir quasi-diagonaliser peut résulter de deux phénomènes (après regroupement des 1 au voisinage de la diagonale) ; soit des 1 subsistent en dehors des rectangles, soit les rectangles ne sont pas remplis entièrement de 1. On y rémédie en éliminant pas à pas ces deux possibilités. Comme ces éliminations peuvent se faire de plusieurs façons, on choisit celle qui rende maximum une certaine fonction V, définie ci-dessous.

L'algorithme d'approximation est le suivant :

1) Chercher la hauteur du treillis de Galois du tableau T donné. S'il est au plus égal à 5, on a terminé ; sinon aller à 2) et 2').

2) Soient $E_k \times F_k$ $(k=1,\ldots,p)$ les éléments du niveau médian ν du treillis. Les éléments du niveau $\nu-2$ sont de la forme $(A_i \cap A_{i'}) \times (\overline{B_j \cup B_{j'}})$, où les A_n (resp. les B_n) sont des éléments du niveau $\nu-1$ et donc intersection (resp. fermeture de l'union) de certains E_k (resp. de certains F_k). On enlève des couples du tableau T de façon à rendre les $A_i \cap A_{i'}$ vides, et en rendant $V(A_i \cap A_{i'}, \overline{B_j \cup B_{j'}})$ maximum.

2') Procéder dualement avec les éléments du niveau $\nu+2$, en rajoutant des éléments.

3) Recommencer en 1).

La fonction V pourra être prise ([5]) égale à:

$$V(C_k, D_{k'}) = \sum_{k,k'} \frac{n_{kk'}}{n_k n_{k'}}$$

(où $n_{kk'}$ est le nombre de 1 dans $C_k \times D_{k'}$, $n_k = \sum_{k'} n_{kk'}$, $n_{k'} = \sum_{k} n_{kk'}$)

6. CAS NON-BOOLEEN

Dans tout ce qui précède on a supposé que les éléments du tableau étaient 0 ou 1 (noir ou blanc). Il n'est pas difficile d'imaginer des cas où l'on aurait toute une gamme de gris dans le tableau T qu'on désirerait regrouper selon, mettons, des rectangles de teinte uniforme disposés le long de la diagonale.

La technique exposée jusqu'ici ne peut plus fonctionner telle quelle. Cependant, nous conjecturons qu'en faisant la théorie du treillis de Galois associée non plus à une correspondance ensembliste mais à une relation dans un topos (ou plus modestement dans une logique booléenne qui ne soit plus deux-valuée), on pourrait encore faire une étude analogue. Mais ceci serait l'objet d'un autre article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN J., "Graphique et Mathématique : Généralisation du traitement graphique de l'information", *Annales* n°*1*, Janvier-Février 1969, p. 70-101.

[2] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification*, Paris, Hachette, 1970.

[3] BIRKHOFF G., Lattice Theory , *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, Vol. XXV, Providence, 1967.

[4] ORE O., Theory of Graphs , *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, Vol. XXXVIII, Providence, 1962.

[5] BENZECRI J.P. et al., *Analyse des données*, Paris, Dunod, 1973.