M. EYTAN

Tableaux de Smullyan, ensembles de Hintikka et tout ça : un point de vue algébrique

Mathématiques et sciences humaines, tome 48 (1974), p. 21-27

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1974__48__21_0>

Math. Sci. hum. (12e année, nº 48, 1974, p. 21-27)

TABLEAUX DE SMULLYAN, ENSEMBLES DE HINTIKKA ET TOUT ÇA : UN POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

par

M. EYTAN [1]

RÉSUMÉ

On se propose de donner une interprétation algébrique (en calcul des propositions classiques) des notions d'arbres, d'ensembles de Hintikka, de la méthode des tableaux de Beth-Hintikka Smullyan.

SUMMARY

What is the algebraic meaning of trees, Hintikka sets, tableaux ? We give an answer for the propositional calculus.

0. INTRODUCTION

L'utilisation de techniques algébriques en logique, et plus particulièrement en calcul des propositions, est bien connue et a une longue histoire. Cependant on peut leur faire quelques reproches :

- elles utilisent principalement l'algèbre de Boole, comprimant ainsi un grand nombre de formules (certes équivalentes) en une seule classe, ce qui est une façon délibérée de devenir myope;

- elles ne fournissent pas (et pour cause) une image algébrique de la méthode de déduction naturelle que Smullyan [7] qualifie de méthode des tableaux, qui me semble particulièrement élégante. Relativement nouvelle et encore peu répandue, cette méthode (due en partie à Beth [2] et Hintikka [3]) mérite d'être explorée de tous les côtés;

- elles donnent l'impression d'appauvrir en quelque sorte la structure étudiée et d'être insuffisantes pour tout dire.

D'un autre côté, la méthode des tableaux rencontre l'incompréhension à la fois des mathématiciens (qui ont tendance à y voir du bricolage) et de certains logiciens (qui pensent qu'il s'agit d'une cuisine, sans fondements clairs et précis).

A l'intention de tous ces gens, de certains étudiants, et pour me clarifier les idées, on trouvera ici quelques définitions et des propositions. Ce qu'on ne trouvera pas, ce sont des démonstrations; au choix on peut considérer que ce sont des propriétés évidentes ne méritant pas démonstration ou que ce sont des exercices dont en cas de difficulté on trouvera la solution en transcrivant *mutatis mutandis* les démonstrations de Rasiowa-Sikorski [6].

1. UER de Mathématiques, Logique formelle et Informatique, Université René Descartes, Paris.

Seul le calcul des propositions classique a été abordé. Il est évident à l'auteur de ces pages qu'avec du temps et de la patience on pourrait en faire autant pour le calcul des prédicats (classique ou non).

1. PRÉALGÈBRES DE BOOLE

Une préalgèbre de Boole c'est, d'une façon extrêmement concise, une structure algébrique préordonnée qui entretient les mêmes rapports avec une algèbre de Boole qu'un ensemble préordonné avec un ensemble ordonné.

D'une façon un peu plus précise, c'est une catégorie préordonnée, cartésienne fermée et cocartésienne avec négation classique (cf. Lambek [4], Lawvere [5]).

Enfin d'une façon laborieuse à l'extrême, c'est une structure :

$$\mathbf{A} = < \mathcal{A}, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \models, \perp . \top .$$

où :

- $\mathcal{A}$ est un ensemble (dit support de **A** ou sous-jacent à **A**),
- $\perp$ et $\top$ sont deux éléments distincts de $\mathcal{A}$,
- $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sont des opérations binaires sur $\mathcal{A}$.
- $\neg$ est une opération unaire sur $\mathcal{A}$,
- $\models$ est un préordre sur $\mathcal{A}$.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

(A 0) le préordre est compatible avec les opérations $A \wedge —$, $A \vee —$ $A \Rightarrow$ --

(A 1.1) $A \models \top$

(A 1.2) $A \wedge B \models A \qquad A \wedge B \models B$

(A 1.3) $\dfrac{C \models A\ ,\ C \models B}{C \models A \wedge B}$

(A 1.4) $(B \Rightarrow A) \wedge B \models A$

(A 1.5) $\dfrac{C \wedge B \models A}{C \models B \Rightarrow A}$

(A 2.1) $\perp \models A$

(A 2.2) $A \models A \vee B \qquad B \models A \vee B$

(A 2.3) $\dfrac{A \models C\ ,\ B \models C}{A \vee B \models C}$

(A 3.1) $(A \Rightarrow \perp) \models \neg A \qquad \neg A \models (A \Rightarrow \perp)$

(A 3.2) $\neg \neg A \models A$

(A 3.3) $\dfrac{A \models B}{\neg B \models \neg A}$

(A 3.4) $\neg (A \vee B) \models (\neg A \wedge \neg B) \qquad (\neg A \wedge \neg B) = \neg (A \vee B)$

(A 3.5) $\neg (A \wedge B) \models (\neg A \vee \neg B) \qquad (\neg A \vee \neg B) \models \neg (A \wedge B)$

(A 3.6) $(A \Rightarrow B) \models \neg A \vee B \qquad \neg A \vee B \models A \Rightarrow B$

où l'écriture $\dfrac{X, Y}{Z}$ signifie que de X et Y (ce dernier éventuellement égal au mot vide) on peut déduire Z (au sens le plus naïf de ce mot).

Remarques :

— (A 0) signifie que les opérations $A \wedge —$, $A \vee —$, $A \Rightarrow —$, sur **A** sont des foncteurs sur **A** considérée comme catégorie,

— le groupe (A 1) signifie que la catégorie **A** est cartésienne fermée avec produit $\wedge$ et exponentielle $\Rightarrow$,

— le groupe (A 2) signifie que **A** est cocartésienne avec somme $\vee$,

— le groupe (A 3) signifie que l'opération $\urcorner(\ )$ est un anti-isomorphisme du préordre idempotent à équivalence près (au sens de l'équivalence définie juste avant la proposition 2),

— ces axiomes sont redondants.

Proposition 1 : une préalgèbre de Boole vérifie les axiomes de Frege-Łukasziewicz et inversement.

Le calcul propositionnel classique est donc une préalgèbre de Boole; elle est en plus atomique (en un sens clair).

Soit $A \equiv B$ la relation d'équivalence « $A \models B$ et $B \models A$ ».

Proposition 2 : $\mathcal{A}$ étant le support de la préalgèbre de Boole A, $\mathcal{A}/\equiv$ peut être canoniquement muni d'une structure d'algèbre de Boole.

Ce qui justifie la terminologie.

Un morphisme de préalgèbre de Boole (en bref un prémorphisme) est ce qu'on s'imagine, *i.e.* une application préservant les opérations, le préordre et les éléments distingués.

Un filtre d'une préalgèbre **A** (en bref, un préfiltre) est une partie non vide ∇ du support $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions :

(F 1) si $A \in \nabla$ et $B \in \nabla$, alors $A \wedge B \in \nabla$

(F 2) si $A \in \nabla$ et $A \models B$, alors $B \in \nabla$.

On dira qu'un préfiltre est propre s'il est distinct de $\mathcal{A}$, *i. e.* s'il ne contient pas $\perp$.

Un élément maximal (pour l'inclusion) de l'ensemble des préfiltres propres de **A** sera appelé ultrapréfiltre.

Un préfiltre propre ∇ de **A** sera dit premier s'il vérifie : (P) si $A \vee B \in \nabla$, alors $A \in \nabla$ ou $B \in \nabla$.

Les propriétés des filtres dans les algèbres de Boole (Rasiowa-Sikorski [6]) restent vraies pour les préfiltres. En particulier, on a :

Proposition 3 :

(1) Tout préfiltre de **A** s'étend à un ultrapréfiltre.

(2) Une partie non vide ∇ de $\mathcal{A}$ est un préfiltre si et seulement si :

a. $\top \in \nabla$

b. Si $A \in \nabla$ et $A \Rightarrow B \in \nabla$, alors $B \in \nabla$.

(3) $h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, étant un prémorphisme et ∇' un préfiltre de A', $h^{-1}(\nabla')$ est un préfiltre de **A**; en particulier « l'écorce » de h, Sh (h) $= h^{-1}(T')$ est un préfiltre de **A**.

(4) Pour tout préfiltre ∇ de **A**, sont équivalentes les conditions :

a. ∇ est un ultrapréfiltre,

b. ∇ est un préfiltre premier,

c. ∇ est un préfiltre propre et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A \in \nabla$ ou $\urcorner A \in \nabla$

d. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, précisément l'un des éléments A, $\urcorner A$ appartient à ∇.

e. Désignant par **2** la préalgèbre canonique sur l'ensemble $2 = \{0,1\}$ et par $\mathbf{A}/\nabla$ la préalgèbre canonique sur le quotient de $\mathcal{A}$ par l'équivalence « $A \Rightarrow V \in \nabla$ et $B \Rightarrow A \in \nabla$ », on a $\mathbf{A}/\nabla = \mathbf{2}$.

Suivant Bourbaki [1], nous appellerons base d'un préfiltre une partie non vide Γ de $\mathcal{A}$, support de **A**, qui vérifie :

(B) si $B_1, B_2 \in \Gamma$, alors il y a un $B \in \Gamma$ tel que $B \models B_1 \wedge B_2$.

Proposition 4 : une partie Γ de $\mathcal{A}$ est une base de préfiltre si et seulement si l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $B \models A$ pour un $B \in \Gamma$, est un préfiltre. Ce préfiltre est propre si $\perp \notin \Gamma$.

Par dualité (l'analogue formel de celle des algèbres de Boole) on définit les notions de préidéal et base de préidéal d'une préalgèbre **A**.

Proposition 5 : soit ∇ un préfiltre d'une préalgèbre de Boole **A**. L'ensemble ∇ des éléments $\urcorner A$, avec $A \in \nabla$, est un préidéal de **A** (dit conjugué de ∇); et dualement. Mieux, si $\nabla, \Delta \subset \mathcal{A}$ sont tels qu'on ait $\nabla \cap \Delta = \varnothing$ et $\nabla \cup \Delta = \mathcal{A}$ alors ∇ est un préfiltre premier si et seulement si Δ est un préidéal premier.

2. ENSEMBLES SATURÉS

Une partie $\mathcal{S}$ du support $\mathcal{A}$ de la préalgèbre **A** est dite saturée si elle vérifie les conditions suivantes :

(S 0) $\top \in \mathcal{S}$ et $\bot \notin \mathcal{S}$

(S 1) $\neg A \in \mathcal{S}$ si et seulement si $A \notin \mathcal{S}$

(S 2) $A \wedge B \in \mathcal{S}$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}$ et $B \in \mathcal{S}$

(S 3) $A \vee B \in \mathcal{S}$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}$ ou $B \in \mathcal{S}$

(S 4) $A \Rightarrow B \in \mathcal{S}$ si et seulement si $A \notin \mathcal{S}$ ou $B \in \mathcal{S}$

Si nous appelons valuation w de **A** un prémorphisme 2–valué (*i.e.* $w : \mathbf{A} \to \mathcal{O}$), il est clair que l'écorce de w, $\mathrm{Sh}(w) = w^{-1}(1)$ est un ensemble saturé. Ceci est même une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application 2–valuée w soit un prémorphisme. Inversement, un ensemble saturé $\mathcal{S}$ étant donné, sa fonction caractéristique est un prémorphisme 2–valué et réciproquement.

Proposition 6 : une partie saturée de $\mathcal{A}$ est un ultrapréfiltre de **A**. Nous dirons que A a pour conséquence logique B (ou que de A on peut déduire B) si pour toute valuation w, $w(A) = 1$ entraîne $w(B) = 1$.

Il est clair que de A on peut déduire B si et seulement si $A \models B$.

Appelons tautologie de **A**, un élément $A \in \mathcal{A}$ vérifiant $w(A) = 1$ pour toute valuation w de $\mathcal{A}$. On voit que l'ensemble des tautologies de **A** est l'intersection de toutes les parties saturées de **A**, *i.e.* la classe de $\top$ dans le quotient $\mathbf{A}/\equiv$ de la propriété 2, ou encore l'ensemble des éléments qu'on peut déduire de $\top$.

Disons qu'un élément $A \in \mathcal{A}$ est réalisable s'il vérifie $w(A) = 1$ pour au moins une valuation w de **A**. On voit que l'ensemble des éléments réalisables de **A** est l'union des parties saturées de **A**.

Procédant à la Stone, soit Sat (A) l'ensemble des parties saturées de **A** contenant A, *i.e.* l'ensemble des ultrapréfiltres de **A** contenant A. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties saturées de **A**, que l'on peut munir canoniquement d'une structure d'algèbre, donc de préalgèbre de Boole (et alors on la note **S**).

Proposition 7 : l'application Sat : $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ est en fait un prémorphisme de $\mathcal{A}$ dans **S**, *i.e.* on a :

(1) $\mathrm{Sat}(A \wedge B) = \mathrm{Sat}(A) \cap \mathrm{Sat}(B)$

(2) $\mathrm{Sat}(A \vee B) = \mathrm{Sat}(A) \cup \mathrm{Sat}(B)$

(3) $\mathrm{Sat}(A \Rightarrow B) = \mathcal{S} - (\mathrm{Sat}(A) - \mathrm{Sat}(B))$

(4) $\mathrm{Sat}(\neg A) = \mathcal{S} - \mathrm{Sat}(A)$

(5) $A \models B$ si et seulement si $\mathrm{Sat}(A) \subset \mathrm{Sat}(B)$

(6) $\mathrm{Sat}(\bot) = \varnothing$ et $\mathrm{Sat}(\top) = \mathcal{S}$.

L'application sous-jacente au prémorphisme Sat peut être étendue à une application de $\mathfrak{P}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{S}$ (qui n'est plus un prémorphisme). On en déduit la notion de réalisabilité pour les parties de $\mathcal{A}$: $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ sera dit réalisable (ou admettre un modèle) si chaque $A \in B$ est réalisable simultanément (*i.e.* pour la même valuation). De même on dira que de $\mathcal{B}$ on peut déduire B si pour chaque $A \in \mathcal{B}$, de A on peut déduire B. Autrement dit on a $\mathcal{B} \models B$ si pour chaque $A \in \mathcal{B}$ on a $A \models B$.

Lorsque $\mathcal{B} \models \bot$, on dira que $\mathcal{B}$ est inconsistante. $\mathcal{B}$ est consistante dans le cas contraire.

Proposition 8 : soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{A}$, support de la préalgèbre de Boole **A**. Sont équivalentes les conditions suivantes :

(1) $\mathcal{B}$ est réalisable (admet un modèle).

(2) Il existe un ensemble saturé de **A** contenant $\mathcal{B}$.

(3) $\mathrm{Sat}(\mathcal{B}) \neq \varnothing$.

(4) Il existe un ultrapréfiltre de **A** contenant $\mathcal{B}$.

(5) $\mathcal{B}$ est consistante.

Corollaire : sont équivalentes

(1) $\mathcal{B}$ est inconsistante.

(2) Sat $(\mathcal{B}) = \varnothing$.

(3) Le seul préfiltre contenant $\mathcal{B}$ est le filtre impropre (confondu avec $\mathcal{A}$).

(4) Tout préfiltre contenant $\mathcal{B}$ contient $\perp$.

3. TABLEAUX DE SMULLYAN

Smullyan donne les règles suivantes pour la construction des tableaux (dits non-signés) :

$$(T\,0)\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

$$(T\,1)\ \frac{A \wedge B}{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}$$

$$(T\,1')\ \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B}$$

$$(T\,2)\ \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{matrix}\neg A\\\neg B\end{matrix}}$$

$$(T\,2')\ \frac{A \vee B}{A \mid B}$$

$$(T\,3)\ \frac{\neg(A \Rightarrow B)}{\begin{matrix}A\\\neg B\end{matrix}}$$

$$(T\,3')\ \frac{A \Rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

auxquelles nous adjoignons les règles suivantes (dont Smullyan n'a pas l'usage, son calcul des propositions ne comportant pas les éléments $\perp$ et $\top$) :

$$(T\,4)\ \frac{\neg\perp}{\top}$$

$$(T\,5)\ \frac{\neg\top}{\perp}$$

On dira qu'une de ces règles est applicable à un élément X si la dite règle est de la forme $\frac{X}{Y}$ ou $\frac{X}{\begin{matrix}Y\\Z\end{matrix}}$ ou $\frac{X}{Y \mid Z}$.

Voici maintenant la définition d'un tableau pour un élément $X \in \mathcal{A}$: c'est un arbre ordonné, au plus binaire, dont les nœuds sont des éléments de $\mathcal{A}$ et qu'on construit selon les processus suivants :

(C 0) Placer à l'origine X.

(C 1) Supposons que P soit un sommet pendant de l'arbre à une certaine étape. Alors :

(1) Si l'une des règles (T 0), T 4), (T 5) est applicable, prolonger la branche où se trouve P en y inscrivant l'élément sous la ligne.

(2) Si l'une des règles (T 1), (T 2), (T 3) est applicable, prolonger la branche où se trouve P en y inscrivant successivement (et dans l'ordre) les éléments sous la ligne.

(3) Si l'une des règles (T 1') (T 2'), (T 3') est applicable, faire bifurquer la branche où se trouve P, en inscrivant sur la branche de gauche (resp. de droite) l'élément qui se trouve à gauche (resp. à droite) de la barre, sous la ligne.

(4) Sur chaque branche contenant à la fois les éléments A et $\neg$ A, inscrire l'élément $\perp$ (à la suite).

(C 2) Sur chaque branche ne contenant pas l'élément $\perp$ recommencer en (C 1).

Une branche contenant l'élément $\perp$ sera dite close. Sinon elle sera dite ouverte.

Une branche sera dite épanouie si le processus défini ci-dessus a été mené aussi loin que possible. Un tableau pour X sera dit épanoui si chaque branche de l'arbre est soit close soit épanouie.

Remarque :

La construction d'une branche épanouie se termine après un nombre fini de pas si la préalgèbre considérée est atomique, le degré (nombre d'opérations affectées de leurs arités) baissant après chaque application d'une règle. C'est le cas du calcul des propositions classique.

Un tableau sera dit ouvert s'il contient au moins une branche ouverte.

Suivant Smullyan (mais dans le cadre des préalgèbres) nous allons montrer que toute branche épanouie ouverte d'un tableau est simultanément réalisable (« lemme de Hintikka »).

4. ENSEMBLES DE HINTIKKA

Une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}$, support de la préalgèbre **A** sera appelée ensemble de Hintikka si elle vérifie, pour tout A, B $\in \mathcal{A}$ les conditions suivantes :

(H 0) $\perp \notin \mathcal{H}$.

(H 1) si A $\wedge$ B $\in \mathcal{H}$, alors A $\in \mathcal{H}$ et B $\in \mathcal{H}$

(H 1′) si $\neg$ (A $\wedge$ B) $\in \mathcal{H}$, alors $\neg$ A $\in \mathcal{H}$ ou $\neg$ B $\in \mathcal{H}$

(H 2) si $\neg$ (A $\vee$ B) $\in \mathcal{H}$, alors $\neg$ A $\in \mathcal{H}$ et $\neg$ B $\in \mathcal{H}$

(H 2′) si A $\vee$ B $\in \mathcal{H}$, alors A $\in \mathcal{H}$ ou B $\in \mathcal{H}$

(H 3) si $\neg$ (A $\Rightarrow$ B) $\in \mathcal{H}$, alors A $\in \mathcal{H}$ et $\neg$ B $\in \mathcal{H}$

(H 3′) si A $\Rightarrow$ B $\in \mathcal{H}$, alors $\neg$ A $\in \mathcal{H}$ ou B $\in \mathcal{H}$

(H 4) si $\neg\neg$ A $\in \mathcal{H}$, alors A $\in \mathcal{H}$.

Proposition 9 : un ensemble de Hintikka $\mathcal{H}$ est une base d'ultrapréfiltre.

Corollaire 1 (lemme de Hintikka) : l'ensemble des éléments situés sur une branche épanouie ouverte est (simultanément) réalisable.

Corollaire 2 : A est une tautologie si et seulement si tout tableau épanoui pour $\neg$ A a toutes ses branches closes.

Remarque :

L'intérêt véritable de ces résultats se limite au cas d'une préalgèbre atomique; on a alors des procédés effectifs.

On peut définir la notion de tableau pour un ensemble fini d'éléments, *i.e.* pour une partie finie de $\mathcal{A}$, et démontrer l'analogue du lemme de Hintikka. En munissant l'ensemble $\mathcal{S}$ des parties saturées de **A** d'une topologie, on obtient le théorème de compacité qui nous ramène du cas de la réalisabilité d'une partie quelconque de $\mathcal{A}$ à celui d'une partie finie de $\mathcal{A}$.

5. LINDENBAUM ET HINTIKKA

Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{A}$, support de la préalgèbre **A**. On dira que $\mathcal{C}$ est consistante maximale si $\mathcal{C}$ est consistante et si aucune partie de $\mathcal{A}$ contenant strictement $\mathcal{C}$ n'est consistante.

Proposition 10 : toute partie consistante maximale de $\mathcal{A}$ est un ensemble saturé (*i.e.* un ultrafiltre).

Corollaire (théorème de Lindenbaum) : toute partie consistante de $\mathcal{A}$ peut être étendue à une partie consistante maximale (*i.e.* un ultrafiltre).

Remarque :

A nouveau, ces propositions ne prennent leur véritable intérêt que dans le cadre d'une préalgèbre atomique, et même dans le cas où l'ensemble des atomes est dénombrable.

Les propositions 9 et 10 (avec leurs corollaires) permettent de saisir la différence entre les constructions de Hintikka et de Lindenbaum : alors que Lindenbaum prend une partie consistante et l'étend à un ultrafiltre, Hintikka construit d'abord une base d'un tel ultrafiltre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki N., *Topologie générale*, chap. 1 : « Structures topologiques », Paris, Hermann, 1965.

[2] Beth E., *Formal methods*, Dordrecht, Reidel, 1962.

[3] Hintikka J., « Form and content in quantification theory », *Acta Philosophica Finnica*, 8 (1955), pp. 57-55.

[4] Lambek J., « Deductive systems and categories III », *Lecture notes in mathematics* 274, pp. 57-82, Berlin, Springer, 1972.

[5] Lawvere W. « Adjointness in foundations », *Dialectica* 23 (1967), pp. 281-296.

[6] Rasiowa H., Sikorski R., « The mathematics of metamathematics, Varsovie », *Polska Akademia Nauk*, 1963.

[7] Smullyan R., *First-order logic*, Berlin, Springer, 1968.