

G. RIBEILL

**Équilibre, équivalence, ordre et préordre à distance  
minimum d'un graphe complet**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 43 (1973), p. 71-106

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1973\\_\\_43\\_\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__43__71_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉQUILIBRE, ÉQUIVALENCE, ORDRE ET PRÉORDRE A DISTANCE MINIMUM D'UN GRAPHE COMPLET

par

G. RIBEILL <sup>1</sup>

## RÉSUMÉ

*Les problèmes que nous traitons ici sont en partie familiers aux lecteurs de la revue. L'apport original consiste selon nous dans le fait d'avoir rapproché des problèmes classiques (équilibre d'un graphe, ordre à distance minimum) pour en souligner les analogies profondes et, du coup, plonger de manière féconde ces problèmes dans un ensemble plus large, en particulier en posant le problème de l'équivalence et du préordre à distance minimum d'un graphe complet. Notre exposé se présente donc comme le développement en parallèle de quatre problèmes très apparentés. Pour souligner les analogies, nous avons parfois adopté une terminologie commune relativement à certains concepts. A partir de concepts relatifs à un sommet et de propriétés locales définies sur les sommets, nous avons ainsi construit un algorithme pour résoudre le problème de l'équilibre, de l'équivalence et de l'ordre à distance minimum d'un graphe complet, le cas du préordre pouvant être résolu par un algorithme semblable mais plus lourd. Enfin, pour terminer cette note, nous proposons une méthode heuristique générale qui s'applique indifféremment à n'importe lequel des quatre problèmes traités.*

## SUMMARY

*The problems which we treat in this paper are partly familiar to the reader of this journal. The originality of the contribution consists, according to us, in the fact that we have brought together classical problems (balance of a graph, ordering at minimal distance) in order to underline their profound analogies, and at the same time, to immerse the problems in a larger framework in a fruitful manner, particularly by posing the problem of equivalence and preordering at minimal distance of a complete graph. Our exposition is presented, therefore, as the parallel development of*

---

1. SEMA (Metra International). Direction Scientifique.

*four very closely related problems. In order to bring out the analogies, we have at times adopted a common terminology with respect to certain concepts. Aside from concepts concerning a vertex and local properties defined on vertices, we have also constructed an algorithm to solve the problem of balance, equivalence and of the ordering at minimal distance of a complete graph. The case of preordering could be resolved by a similar but more ponderous algorithm. Finally, to end this note, we propose a general heuristic method which can be applied indifferently to each of the four treated problems.*

## 1. RAPPELS SUR LES PROBLÈMES ÉTUDIÉS

Vis-à-vis des quatre problèmes que nous nous proposons de traiter, deux seuls sont classiques : l'un est l'objet de la théorie des graphes équilibrés, l'autre est le problème de l'ordre à distance minimum d'un tournoi. Ce sont ces deux problèmes qui, généralisés, conduisent à l'étude des relations d'équivalence et de préordre à distance minimum d'un graphe complet donné.

La théorie des graphes (dés)équilibrés [angl. (*un*) *balanced graphs*] est relativement ancienne. Elle s'est développée à partir de la modélisation de la dynamique des groupes en permettant une représentation schématique des conflits. Les principaux auteurs qui ont élaboré cette théorie sont aux États-Unis F. Harary [7], [8], [9], R. Abelson et M. Rosenberg [1] et en France C. Flament [5], [6].

Un graphe équilibré définit sur l'ensemble  $X$  des sommets une ou deux classes d'équivalence disjointes. Nous avons généralisé (cf. [13]) le concept de graphe équilibré à celui de *graphe  $N$ -équilibré*, le graphe  *$N$ -équilibré* pouvant représenter 1, 2, ...,  $N$  classes d'équivalence disjointes ( $1 \leq N \leq n$ ), les graphes équilibrés au sens précédent étant alors les graphes 2-équilibrés. Nous n'étudions ici que les graphes  *$n$ -équilibrés*,  $n = |X|$ .

Les problèmes relatifs aux graphes associés à une relation d'ordre total sont classiques. Citons comme principaux auteurs Slater [15], Remage et Thompson [12], Barbut [2], Durand [4], Jacquet-Lagrèze [10] et Bermond [3].

Par contre, les problèmes analogues relatifs aux relations de préordre total n'ont pas à notre connaissance été déjà abordés. Nous présenterons quelques résultats à leur sujet, résultats qui apparaissent souvent comme une synthèse des résultats relatifs aux problèmes, d'une part des relations d'équivalence, d'autre part des relations d'ordre.

## 2. GRAPHES ÉTUDIÉS

### 2.1. Équilibre et équivalence

Les graphes considérés ici sont des graphes  $G = (X, U)$  complets, non-orientés où, à chaque arête, est associée une variable bivalente dont les valeurs seront notées  $+$  et  $-$  (resp. *arêtes positives ou négatives*). On appellera *graphes algébriques complets* (G.A.C.) de tels graphes.  $n = |X|$  désignera la cardinalité de l'ensemble  $X$ ,  $m = |U|$  celle de l'ensemble  $U$ . L'ensemble  $U$  se décomposant en arêtes positives formant le sous-ensemble  $P$ , en arêtes négatives formant le sous-ensemble  $N$ , on notera de tels graphes  $A = (X ; P, N)$ . Un G.A.C. quelconque à  $n$  sommets sera noté  $A_n$ .

A de tels graphes, on peut associer deux relations dites *antagonistes*, l'une *positive*  $\mathcal{R}$ , l'autre *négative*  $\mathcal{S}$ , telles que, si l'une est vérifiée, l'autre ne peut l'être et, si l'une n'est pas vérifiée, l'autre l'est.

Alors, notant  $(x, y)$  l'arête reliant les sommets  $x$  et  $y$  :

$$(x, y) \in P \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$$

$$(x, y) \in N \Leftrightarrow x \mathcal{S} y.$$

## 2.2. Ordre total

Les graphes étudiés sont des 1-graphes complets et antisymétriques appelés *tournois*  $T$ ,  $T = (X, U)$ . Dans un tournoi, ou  $(x, y) \in U$  ou  $(y, x) \in U$ . On appelle *demi-degré extérieur ou score* (cas d'un tournoi) d'un sommet  $x$  le nombre d'arcs  $(x, y)$  du graphe  $G$ , d'extrémité initiale  $x$ , soit  $d^+(x)$ . Le *demi-degré intérieur* de  $x$  sera le nombre d'arcs  $(y, x)$  d'extrémité terminale  $x$ , soit  $d^-(x)$ . Un tournoi quelconque à  $n$  sommets sera noté  $T_n$ .

## 2.3. Préordre total

Les graphes étudiés sont des graphes orientés, complets tels que

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \notin U \\ (y, x) \in U \end{array} \right. \quad \text{ou } \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in U \\ (y, x) \notin U \end{array} \right. \quad \text{ou } \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in U \\ (y, x) \in U \end{array} \right. \quad (\text{arcs à double sens})$$

Par analogie avec l'appellation précédente des tournois, nous appellerons de tels graphes *matches*  $M$ .

# 3. ÉQUILIBRE, ÉQUIVALENCE, ORDRE ET PRÉORDRE

## 3.1. Graphes 2-équilibrés

Un G.A.C. est 2-équilibré ou équilibré au sens classique<sup>1</sup> si

—  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. En particulier  $(x, y) \in P$  et  $(y, z) \in P \Rightarrow (x, z) \in P$ .

—  $\mathcal{S}$  est une relation symétrique anti-transitive.

$$(x, y) \in N \text{ et } (y, z) \in N \Rightarrow (x, z) \notin N \Rightarrow (x, z) \in P.$$

Il découle de la définition de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  que :  $(x, y) \in P$ ,  $(y, z) \in N \Rightarrow (x, z) \in N$ .

Les graphes équilibrés ne sont autres que des *bipartitions* de  $X$  en  $X_1 \cup X_2$  (éventuellement  $X_1$  ou  $X_2 = \emptyset$ ), telles que :

$$P = X_1^2 \cup X_2^2, \quad N = X_1 \times X_2.$$

Autrement dit, les sommets du graphe  $A = (X; P, N)$  peuvent être partitionnés en deux classes  $X_1$  et  $X_2$ , toutes les arêtes intraclasse étant positives, toutes les arêtes interclasse étant négatives.

1. Parlant par la suite de graphes équilibrés, il s'agira toujours de graphes 2-équilibrés. Nous conservons donc l'appellation classique.

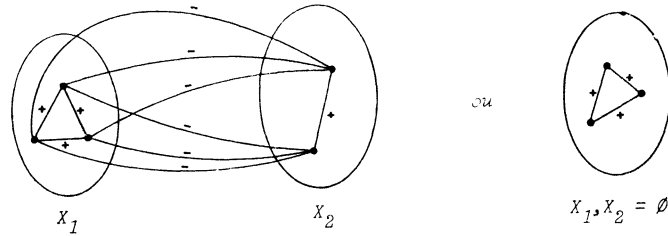


Figure 1

A un graphe équilibré, on peut alors associer *une ou deux classes d'équivalence*.

Signalons quelques-unes de leurs propriétés immédiates (voir C. Flament [5]). On a équivalence entre :

- (i)  $A_n$  est un graphe algébrique équilibré.
- (ii) Appelant signe d'un cycle le produit algébrique des signes des arêtes composant ce cycle, tous les cycles de  $A_n$  sont positifs.
- (iii) Tous les triplets (3-cycles) sont positifs. Autrement dit,  $A_n$  ne contient aucun triplet tels que :



Figure 2

Ces triplets seront dits *non-admissibles*, tous les autres étant *admissibles*.

### 3.2. Graphes $n$ -équilibrés

Un G.A.C. est  $n$ -équilibré si :

- $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence
- $\mathcal{S}$  est quelconque du point de vue de la transitivité :

$$(x, y) \in N \text{ et } (y, z) \in N \Rightarrow (x, z) \in P \text{ ou } (x, z) \in N.$$

On a toujours cependant nécessairement :

$$\begin{cases} (x, y) \in P \Rightarrow (x, z) \in N \\ (y, z) \in N. \end{cases}$$

Les graphes  $n$ -équilibrés ne sont autres que des *multipartitions* de  $X$  en classes  $X_1, X_2, \dots, X_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , telles que :

$$P = X_1^2 \cup X_2^2 \cup \dots \cup X_k^2$$

$$N = \bigcup_{i \neq j} X_i \times X_j.$$

A un graphe  $n$ -équilibré, on peut associer une *relation d'équivalence* définissant  $k$  classes d'équivalence.

Une propriété des graphes  $n$ -équilibrés est immédiate : si l'on appelle *triplets non-admissibles* les 3-cycles formés de deux arêtes positives et d'une arête négative, il est nécessaire et suffisant pour qu'un graphe soit  $n$ -équilibré qu'il ne possède aucun triplet non-admissible, soit :

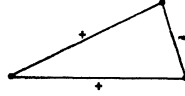


Figure 3

### 3.3. Tournois transitifs

Un tournoi est *transitif* si :

$$(x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U.$$

Les tournois transitifs définissent sur  $X$  un *ordre total*.

On peut résumer avec Bermond [3] leurs propriétés. Si on suppose les sommets de  $T_n$  rangés par scores non-croissants

$$d^+(x_1) \geq d^+(x_2), \dots, \geq d^+(x_n)$$

On a équivalence entre :

- (i)  $T_n$  est un tournoi transitif.
- (ii)  $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow i < j$ .
- (iii) La suite des scores  $d^+(x_1), \dots, d^+(x_n)$  est  $n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ .
- (iv)  $T_n$  ne contient pas de circuits.
- (v)  $T_n$  ne contient pas de 3-circuits, soit :



Figure 4

Les triplets non-admissibles se réduisent donc ici aux 3-circuits.

### 3.4. *Matches transitifs*

Un match est *transitif* si :

$$(x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in U \Rightarrow (x, z) \in U.$$

Les matches transitifs définissent sur  $X$  un *préordre total*.

On a équivalence entre :

- (i)  $M_n$  est un match transitif.
- (ii)  $(x_i, x_j) \in U \Rightarrow i \leq j$ .
- (iii)  $M_n$  ne contient pas de triplets tels que :



Figure 5

Ces triplets seront dits *triplets non-admissibles*.

— Dans un match transitif, les ensembles des arcs à double sens définissent des classes d'équivalence, composées de *sommets à égalité*. Si l'on appelle  $C_1, C_2, \dots, C_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) ces classes, tout sous-graphe formé de  $k$  sommets appartenant respectivement à chacune des classes est un tournoi transitif.

— Dans un match transitif, si l'on transforme l'ensemble des arcs à double sens en arêtes positives, l'ensemble des arcs à sens unique en arêtes négatives, le graphe algébrique complet obtenu est  $n$ -équilibré.

## 4. MESURE DU DÉSÉQUILIBRE OU DE LA NON-TRANSITIVITÉ

Pour mesurer à propos de graphes quelconques l'écart à l'équilibre ou à la transitivité, deux types de mesures ont été proposées, l'un basé sur le dénombrement des triplets non-admissibles, l'autre distance minimale entre le graphe quelconque et les graphes possédant la propriété d'équilibre ou de transitivité selon les cas. Nous les appellerons respectivement *indices* et *degrés*.

### 4.1. *Indices de déséquilibre et de non-transitivité*

Quels que soient les graphes étudiés (G.A.C., tournois ou matches), appelons  $C_3^-(G)$  le nombre de triplets non-admissibles contenus dans le graphe  $G$  à  $n$  sommets. La valeur normalisée de l'indice sera :

$$k(G) = \frac{C_3^-(G)}{\max_{G_n} C_3^-(G_n)} \quad 0 \leq k(G) \leq 1.$$

On définit ainsi :

- un indice de déséquilibre (ou de 2-déséquilibre) à propos des G.A.C. 2-équilibrés ou non, déjà défini par Harary ([7], [9]) ;
- un indice de  $n$ -déséquilibre à propos des G.A.C.  $n$ -équilibrés ou non ;
- un indice de non-transitivité à propos des tournois transitifs ou non, déjà défini par Kendall, Babington et Smith [11] ;
- un indice de non-transitivité à propos des matches transitifs ou non.

Valeur de  $\max_{G_n} \bar{C}_3(G_n)$  :

$$\text{— G.A.C. non 2-équilibrés : } \max_{A_n} \bar{C}_3(A_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

En effet, dans un graphe  $A_n = (X ; P, N)$  tel que  $P = \emptyset$ , tous les triplets sont à 3 arêtes négatives, donc non-admissibles.

— G.A.C. non- $n$ -équilibrés

Soit  $d^+(x_i)$  le nombre d'arêtes positives d'extrémité  $x_i$ ,  $T^+(A_n)$  le nombre de 3-cycles aux arêtes positives de  $A_n$ .

Le nombre de triplets non-admissibles d'un graphe  $A_n$  est alors :

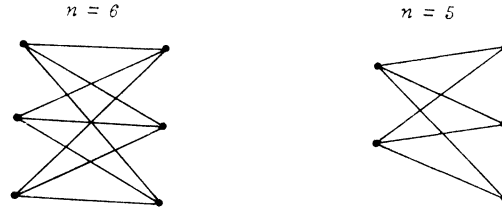
$$\bar{C}_3(A_n) = \sum_{i=1}^n \binom{d^+(x_i)}{2} - 3 T^+(A_n).$$

Or il est possible de construire des graphes  $A_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \binom{d^+(x_i)}{2}$  soit maximum,  $T^+(A_n)$  étant nul.

Ces graphes sont tels que :

- pour  $n$  pair  $d^+(x_i) = \frac{n}{2} \quad \forall x_i$
- pour  $n$  impair  $d^+(x_i) = \frac{n+1}{2}$  pour  $\frac{n-1}{2}$  sommets  
 $d^+(x_i) = \frac{n-1}{2}$  pour  $\frac{n+1}{2}$  sommets.





Arêtes positives seulement représentées.

Figure 6

L'addition d'une quelconque arête positive entraîne une variation de  $T^+$ ,  $\Delta T^+ \geq \frac{n-1}{2}$ ,  
alors qu'elle fait augmenter  $\Sigma \binom{d^+(\mathbf{x}_i)}{2}$  d'au plus  $2\binom{n+1}{2}$ .

Autrement dit  $C_3^-(A_n)$  ne peut que diminuer puisque  $2\binom{n+1}{2} - 3\binom{n-1}{2} < 0$  pour  $n \geq 3$ .

De la structure particulière de ces graphes, on déduit aisément :

$$\begin{aligned} \max_{A_n} C_3^-(A_n) &= \frac{n^2(n-2)}{8} && \text{si } n \text{ pair} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{8} && \text{si } n \text{ impair.} \end{aligned}$$

#### — Tournois non-transitifs

On a (cf. Bermond [3])

$$C_3^-(T_n) = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^n \binom{d^+(\mathbf{x}_i)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{On déduit } \max_{T_n} C_3^-(T_n) &= \frac{n(n^2-1)}{24} \text{ si } n \text{ impair} \\ &= \frac{n(n^2-4)}{24} \text{ si } n \text{ pair.} \end{aligned}$$

$$\text{Pour } n \text{ impair, } d^+(\mathbf{x}) = \frac{n-1}{2} \quad \forall \mathbf{x} \text{ (tournois réguliers)}$$

Pour  $n$  pair,  $d^+(x) = \frac{n}{2}$  pour  $\frac{n}{2}$  sommets

$$= \frac{n-2}{2} \text{ pour } \frac{n}{2} \text{ sommets (tournois quasi-réguliers).}$$



Figure 7

— *Matches non-transitifs*

Rappelons les 3 types de triplets non-admissibles :

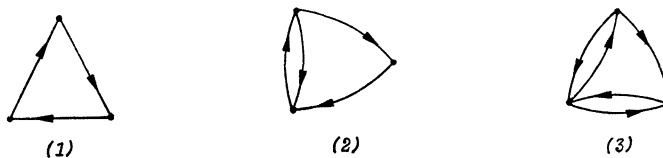


Figure 8

On remarque que, pour tout triplet du type (1), l'addition d'un arc quelconque conserve la non-admissibilité du triplet qui devient du type (2), en ne pouvant qu'accroître le nombre de triplets non-admissibles adjacents si ceux-ci ne sont pas du type (3). Même chose pour les triplets du type (2) transformés en triplets du type (3). Ainsi arrive-t-on à construire tout d'abord le nombre maximum de triplets non-admissibles du type (3). Cette construction équivaut à celle élaborée à propos de l'indice maximum de  $n$ -déséquilibre, par substitution aux arcs uniques entre sommets d'arêtes négatives, aux arcs doubles d'arêtes positives. D'où les configurations d'arcs doubles suivantes si  $n$  pair et si  $n$  impair.



Figure 9

A l'intérieur de chaque sous-graphe de dimension  $k$ , on peut montrer qu'il ne peut y avoir entre couples de sommets que des arcs uniques, les arcs doubles entraînant toujours une réduction des 3-circuits. On maximisera donc le nombre de 3-circuits en recourant aux configurations particulières obtenues à propos des tournois, c'est-à-dire les tournois réguliers si  $k$  impair, quasi-réguliers si  $k$  pair.

Le dénombrement de triplets non-admissibles est alors simple, à partir des formules calculées précédemment donnant  $\max_{A_n} \bar{C}_3(A_n)$  et  $\max_{T_n} \bar{C}_3(T_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{— Si } n = 4k \quad \max_{M_n} \bar{C}_3(M_n) &= \frac{n^2(n-2)}{8} + 2 \left[ \frac{1}{24} \left( \frac{n^3}{8} - 4 \frac{n}{2} \right) \right] \\ &= \frac{13n^3 - 24n^2 - 16n}{96} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{— Si } n = 4k + 2 \quad \max_{M_n} \bar{C}_3(M_n) &= \frac{n^2(n-2)}{8} + 2 \left[ \frac{1}{24} \left( \frac{n^3}{8} - \frac{n}{2} \right) \right] \\ &= \frac{13n^3 - 24n^2 - 4n}{96} \end{aligned}$$

$$\text{— Si } n = 2k + 1, \frac{n-1}{2} \text{ pair, } \frac{n+1}{2} \text{ impair}$$

$$\begin{aligned} \max_{M_n} \bar{C}_3(M_n) &= \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{8} + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{n+1}{2} \right)^3 - \frac{n+1}{2} \right] + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)^3 - 4 \left( \frac{n-1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{13n^3 - 24n^2 - 19n + 30}{96} \end{aligned}$$

$$\text{— Si } n = 2k + 1, \frac{n-1}{2} \text{ impair, } \frac{n+1}{2} \text{ pair}$$

$$\begin{aligned} \max_{M_n} \bar{C}_3(M_n) &= \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{8} + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{n+1}{2} \right)^3 - 4 \left( \frac{n+1}{2} \right) \right] + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)^3 - \frac{n-1}{2} \right] \\ &= \frac{13n^3 - 24n^2 - 19n + 18}{96} \end{aligned}$$

#### 4.2. Degrés de déséquilibre et de non-transitivité

— *Cas des G.A.C. et des tournois :*

Pour ces graphes, il n'existe que deux possibilités pour l'arête ou l'arc (x, y), signe positif ou négatif pour les G.A.C., arc (x, y) ou arc (y, x) pour les tournois. Un changement de nature des arêtes ou des arcs est donc non ambigu.

On appelle *degré de 2-déséquilibre (resp. de n-déséquilibre)* d'un G.A.C. le nombre minimum de changements de signe des arêtes nécessaires pour obtenir un G.A.C. 2-équilibré (resp. n-équilibré).

De même, le *degré de non-transitivité d'un tournoi* sera le nombre minimum d'arcs à inverser pour obtenir un tournoi transitif.

Soit  $\bar{G} = (X, \bar{U})$  appartenant à la famille  $\mathbf{g}_n$  des graphes à  $n$  sommets représentant une relation telle que l'équilibre, l'équivalence ou l'ordre total. Le degré d'un graphe  $G = (X, U)$  à  $n$  sommets, vis-à-vis d'une de ces relations, sera donc :

$$\delta(G) = \min_{\bar{G} \in \mathbf{g}_n} \frac{1}{2} |U \Delta \bar{U}|$$

Cette mesure qui est une *distance* est classique en matière de 2-équilibre (cf. Abelson et Rosenberg [1]) et d'ordre total (cf. Slater [15]).

— *Cas des matches* :

Entre deux sommets, on peut avoir 3 types de liaisons, deux dissymétriques, une symétrique formée de deux arcs. On peut adopter alors une première *distance* entre deux matches de la forme  $d(M_n, M'_n) = |U \Delta U'|$  conduisant au tableau élémentaire suivant, exprimant  $d(u, u')$ , distance entre arcs analogues.

| $u \backslash u'$         | $x \longrightarrow y$ | $x \longleftarrow y$ | $x \longleftrightarrow y$ |
|---------------------------|-----------------------|----------------------|---------------------------|
| $x \longrightarrow y$     | $d = 0$               | $d = 2$              | $d = 1$                   |
| $x \longleftarrow y$      |                       | $d = 0$              | $d = 1$                   |
| $x \longleftrightarrow y$ |                       |                      | $d = 0$                   |

Figure 10

$$\text{D'où le degré } \delta(M) = \min_{\bar{M} \in \mathcal{M}_n} |U \Delta \bar{U}|$$

$\bar{M}$  étant défini comme appartenant à la famille  $\mathcal{M}_n$  des matches transitifs de  $n$  sommets.

Mais on peut évaluer aussi la non-transitivité au moyen du nombre minimum de changements de *nature* des liaisons qu'il faut opérer pour obtenir un match transitif. Ce qui revient à considérer la distance entre deux arcs opposés joignant les mêmes sommets comme égale à 1.

D'où le degré  $\delta'(M)$ , différent de  $\delta(M)$ , calculé à partir de la distance  $d'(M_n, M'_n) = |V \Delta V'|$  où les liaisons symétriques ne sont plus considérées alors comme formées de deux arcs inversés.

## 5. PROPRIÉTÉS LOCALES

C'est Harary [8] qui a défini à propos des G.A.C. la notion d'*équilibre local en un sommet*, un G.A.C.  $A_n$  étant *localement 2-équilibré en un sommet a* si et seulement si tous les 3-cycles passant par  $a$  sont

positifs. Alors que ce concept d'équilibre local est peu fécond à propos du 2-équilibre puisque l'équilibre local en un sommet signifie du même coup l'équilibre du graphe, propriété remarquable des graphes 2-équilibrés, il va s'avérer avoir une portée très intéressante à propos de l'équivalence, de l'ordre et du préordre. Des relations intéressantes relient en effet de telles propriétés valables localement aux propriétés globales d'un graphe complet : c'est la voie d'une série d'algorithmes très analogues, basés sur une succession de problèmes locaux pour résoudre un problème global.

Pour chaque type de relation  $\mathcal{R}$  étudié (équilibre, équivalence, ordre et préordre), on a défini un type d'admissibilité des triplets que l'on qualifiera de  $\mathcal{R}$ -admissibilité.

Un graphe  $G$  sera dit *localement  $\mathcal{R}$ -régulier* en  $a$  si  $G$  ne contient pas de triplets non- $\mathcal{R}$ -admissibles contenant  $a$ . Un graphe sera dit  $\mathcal{R}$ -régulier s'il est  $\mathcal{R}$ -régulier en chacun de ses sommets.

### 5.1. 2-équilibre local en un sommet d'un G.A.C.

S'il y a équilibre local en  $a$ , on en déduit aisément la décomposition du graphe  $A_n = (X ; P, N)$  en deux sous-graphes  $(X_1 ; P_1)$  et  $(X_2 ; P_2)$  appelés *clans* (graphes complets à seules arêtes positives) :

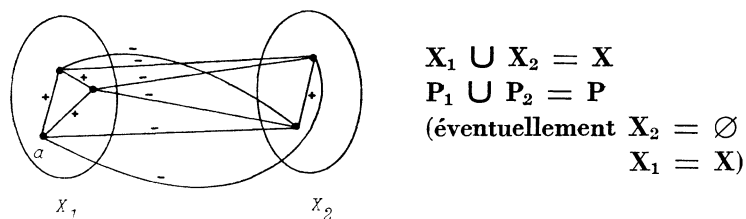


Figure 11

Une propriété remarquable identifie l'équilibre local en un sommet avec l'équilibre du graphe :

Pour qu'un G.A.C. soit 2-équilibré, il faut et il suffit qu'il soit localement équilibré en un sommet  $a$ .

En effet, notant  $s(xyz)$  le signe du triplet  $xyz$ , on montre facilement que :

$$s(bcd) = s(abc) \times s(abd) \times s(acd).$$

Si tout triplet passant par  $a$  est positif, on déduit  $s(bcd) = +$ .

### 5.2. $n$ -équilibre local en un sommet d'un G.A.C.

Un graphe  $A_n$  sera *localement  $n$ -équilibré en  $a$*  si tout triplet contenant  $a$  est admissible.

On déduit de ceci, relativement à un sommet  $a$ , une décomposition du graphe  $A_n = (X ; P, N)$  de la sorte :

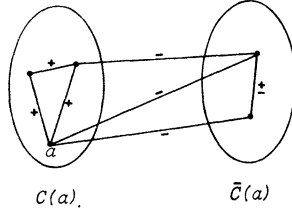


Figure 12

où l'ensemble  $X$  des sommets se décompose en *clan associé* à  $a$ ,  $C(a)$  et *anti-clan*  $\bar{C}(a)$ , avec  $C(a) \cup \bar{C}(a) = X$ .

Un graphe  $(X ; P, N)$  sera dit *localement  $n$ -équilibré en  $b$  partiellement sur  $X - A$*  lorsque tout triplet défini sur l'ensemble  $X - A$  et contenant  $b$  est admissible.

On peut alors donner quelques propriétés dont nous ne donnerons pas ici les démonstrations très simples.

**Propriété 1 :** Si un graphe est localement  $n$ -équilibré en  $a$ , alors il est localement  $n$ -équilibré pour tout sommet  $x$  appartenant au clan  $C(a)$ .

**Propriété 2 :** Si un graphe est localement  $n$ -équilibré en  $a$ , localement  $n$ -équilibré en  $b$  sur  $X - C(a)$ , alors le graphe est localement  $n$ -équilibré en  $b$ .

D'où :

**Propriété 2 bis :** Si un graphe est

localement  $n$ -équilibré en  $a$  sur  $X$

localement  $n$ -équilibré en  $b$  sur  $X - C(a)$

localement  $n$ -équilibré en  $c$  sur  $X - C(a) - C(b)$

.....

localement  $n$ -équilibré en  $l$  sur  $X - \sum_{i=a}^{l-1} C(i)$

alors il est localement  $n$ -équilibré en  $a, b, c, \dots, l$ .

Semblablement, à la mesure du déséquilibre global, on peut chercher des indicateurs de déséquilibre local :

**Indice local de  $n$ -déséquilibre**

$$k(a) = \frac{C_3^-(a)}{\max_{A_n} C_3^-(a)} \text{ où } C_3^-(a) \text{ désigne le nombre de triplets non-admissibles passant par } a.$$

Calcul de  $\max_{A_n} C_3^-(a)$  :

Tous les triplets contenant  $a$  peuvent être choisis non-admissibles. Il suffit d'exhiber la configuration suivante, généralisable à tout  $A_n$ .

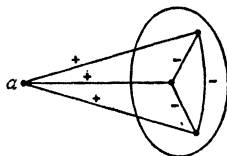


Figure 13

$$\text{Donc } \max_{A_n} C_3^-(a) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

### Degré de $n$ -déséquilibre local

$\delta(a)$  sera défini comme le nombre minimum d'arêtes de  $A_n$  dont il faut changer le signe pour obtenir un graphe localement  $n$ -équilibré en  $a$ .

$$\delta(a) = \min_i \{|\varepsilon_i(a)|\}, \quad \varepsilon_i(a) \text{ ensemble d'équilibrage local en } a.$$

### 5.3. Transitivité locale en un sommet d'un tournoi

Un tournoi  $T_n$  sera *localement transitif en  $a$*  si  $T_n$  ne contient pas de 3-circuits passant par  $a$ .

On déduit de ceci, relativement à  $a$ , une décomposition de  $T_n$  de la sorte :

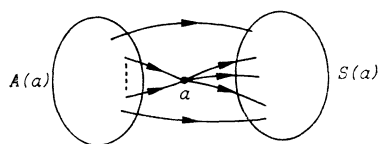


Figure 14

où  $X$  se décompose en  $a$ , *ensemble antécédent* de  $a$ ,  $A(a)$ , et *ensemble suivant* de  $a$ ,  $S(a)$ , avec  $a \cup A(a) \cup S(a) = X$ .

Un tournoi  $(X, U)$  sera dit *localement transitif en  $a$  partiellement sur  $X - A$*  lorsqu'il n'existe pas de 3-circuits définis sur  $X - A$  et passant par  $a$ .

On établit facilement la propriété suivante :

**Propriété 1 :** Si un tournoi est localement transitif en  $a$ , localement transitif en  $b$  sur  $X - a$ , alors le tournoi est localement transitif en  $b$ .

D'où :

*Propriété 1 bis* : Si un tournoi est :

localement transitif en  $a$  sur  $X$

$b$  sur  $X \rightarrow a$

$c$  sur  $X \rightarrow a \rightarrow b$

$k$

$l$  sur  $X \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \dots \rightarrow k$

alors il est localement transitif en  $a, b, c, \dots, l$ .

*Indice local de non-transitivité*

$$k(a) = \frac{C_3(a)}{\max_{T_n} C_3(a)} \text{ où } C_3^-(a) \text{ désigne le nombre de 3-circuits passant par } a.$$

Calcul de  $\max_{T_n} C_3^-(a)$

A partir de la configuration suivante :

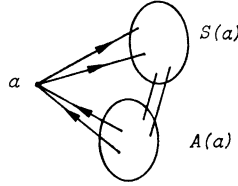


Figure 15

maximiser le nombre de 3-circuits passant par  $a$  revient à maximiser le nombre d'arêtes qui relient  $S(a)$  à  $A(a)$ , avec  $|S(a) \cup A(a)| = n - 1$ .

$$\text{Si } n \text{ impair, } |S(a)| = \frac{n-1}{2}, \quad |A(a)| = \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \max_{T_n} C_3^-(a) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$\text{Si } n \text{ pair, } |S(a)| = \frac{n}{2} \text{ (resp. } \frac{n-2}{2}), \quad |A(a)| = \frac{n-2}{2} \text{ (resp. } \frac{n}{2}), \quad \max_{T_n} C_3^-(a) = \frac{n(n-2)}{4}.$$

*Degré local de non-transitivité*

$\delta(a)$  sera défini comme le nombre minimum d'arcs de  $T_n$  dont il faut inverser l'orientation pour obtenir un tournoi localement transitif en  $a$ .



#### 5.4. Transitivité locale en un sommet d'un match

Un match  $M_n$  sera *localement transitif en a* si  $M_n$  ne contient pas de triplets non-admissibles contenant a.

On déduit de ceci, relativement à a, une décomposition des matches  $M_n$  de la sorte

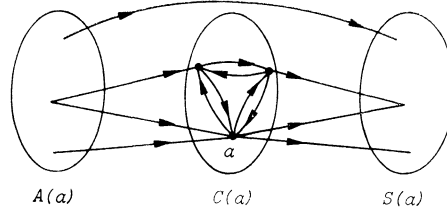


Figure 16

où X se décompose en *clan associé* à a,  $C(a)$ , composé de a et de sommets à égalité, en *ensemble antécédent*  $A(a)$  et *ensemble suivant*  $S(a)$  avec  $C(a) \cup A(a) \cup S(a) = X$ .

Un match  $(X, U)$  sera dit *localement transitif en b partiellement sur  $X - A$*  lorsqu'il n'existe pas de triplets non-admissibles définis sur  $X - A$  passant par b.

Des propriétés élémentaires découlent de ces concepts :

**Propriété 1 :** Si un match est localement transitif en a, alors il est localement transitif pour tout sommet x appartenant au clan  $C(a)$ .

**Propriété 2 :** Si un match est localement transitif en a, localement transitif en b sur  $X - C(a)$ , alors il est localement transitif en b.

**Propriété 2 bis :** Si un match est :

localement transitif en a sur X

localement transitif en b sur  $X - C(a)$

localement transitif en c sur  $X - C(a) - C(b)$

.....

localement transitif en l sur  $X - \sum_{i=a}^{l-1} C(i)$

alors il est localement transitif en a, b, c, ..., l.

**Indice local de non-transitivité**

$$k(a) = \frac{C_3^-(a)}{\max_{M_n} C_3^-(a)} \quad \text{où } C_3^-(a) \text{ désigne le nombre de triplets non-admissibles passant par a.}$$

Calcul de  $\max_{M_n} \bar{C}_3(a)$

Tous les triplets passant par  $a$  peuvent être non-admissibles. Il suffit d'exhiber la configuration suivante, généralisable à tout  $M_n$ .

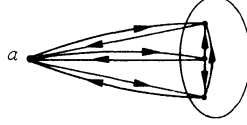


Figure 17

$$\text{Donc } \max_{M_n} \bar{C}_3(a) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

### Degrés locaux de non-transitivité

A partir des deux distances définies à propos des matchs (cf. 4.2), on définit deux degrés locaux  $\delta(a)$  et  $\delta'(a)$ .

## 6. LIENS ENTRE PROPRIÉTÉS LOCALES ET PROPRIÉTÉS GLOBALES

Un certain nombre de relations intéressantes permettent de lier des propriétés locales aux propriétés globales. Les démonstrations faciles ne seront pas exposées.

### 6.1. 2-équilibre dans un G.A.C.

2-équilibre local en un sommet et 2-équilibre global sont des propriétés équivalentes.

### 6.2. $n$ -équilibre dans un G.A.C.

**Propriété 1** : Tout graphe  $n$ -équilibré est localement  $n$ -équilibré en chacun de ses sommets (évident).

**Propriété 2** (réciproque) : Si un graphe  $A_n$  est localement  $n$ -équilibré en  $K$  sommets  $x, y, \dots$  formant pôles, soient tels que les clans associés  $C(x), C(y), \dots$  forment une partition de  $X$ , alors  $A_n$  est  $n$ -équilibré (évident).

Utilisant la propriété 2 bis du paragraphe 5.2, on en déduit :

**Propriété 3** : Pour qu'un graphe  $A_n = (X ; P, N)$  soit  $n$ -équilibré il faut et il suffit qu'il soit :

localement  $n$ -équilibré en  $a$  sur  $X$

localement  $n$ -équilibré en  $b$  sur  $X - C(a)$

localement  $n$ -équilibré en  $k$  sur  $X$  —  $\sum_a^{k-1} C(i)$ , les  $K$  sommets  $a, b, \dots, k$  formant pôles.

**Propriété 4 :** Si l'anti-clan associé à un sommet  $a$  se réduit à 1 ou 2 sommets, le graphe est globalement équilibré.

### 6.3. Transitivité dans un tournoi

**Propriété 1 :** Tout tournoi transitif est localement transitif en chacun de ses sommets.

**Propriété 2 :** Si un tournoi  $T_n$  est localement transitif en chacun de ses sommets,  $T_n$  est transitif.

**Propriété 2 bis :** Si un tournoi  $T_n$  est localement transitif en  $n - 2$  sommets,  $T_n$  est transitif.

**Propriété 3 :** Pour qu'un tournoi  $T_n = (X, U)$  soit transitif, il faut et il suffit qu'il soit :

localement transitif en  $a$  sur  $X$

globalement transitif pour le sous-graphe  $S(a)$

globalement transitif pour le sous-graphe  $A(a)$ .

### 6.4. Transitivité dans un match

**Propriété 1 :** Tout match transitif est localement transitif en chacun de ses sommets.

**Propriété 2 :** Si un match  $M_n$  est localement transitif en chacun de ses sommets,  $M_n$  est transitif.

**Propriété 3 :** Pour qu'un match  $M_n = (X, U)$  soit transitif, il faut et il suffit qu'il soit :

localement transitif en  $a$  sur  $X$

globalement transitif pour le sous-graphe  $S(a)$

globalement transitif pour le sous-graphe  $A(a)$ .

**Propriété 4 :** Pour qu'un match  $M_n = (X, U)$  soit transitif, il faut et il suffit qu'il soit :

localement transitif en  $a$  sur  $X$

$b$  sur  $X$  —  $C(a)$

.....

$k$  sur  $X$  —  $\sum_a^{k-1} C(i)$

les  $K$  sommets  $a, b, \dots, k$  formant pôles  $[\bigcup_i^r C(i) = X, C(i) \cap C(j) = \emptyset]$ .

## 7. ALGORITHMES DE CONSTRUCTION DE GRAPHES LOCALEMENT $\mathcal{R}$ -RÉGULIERS EN UN SOMMET

A propos d'un graphe  $G$ , on peut se poser une première série de problèmes :

- 1) trouver le (ou les) *ensembles de  $\mathcal{R}$ -régularisation* de  $G$  au sommet  $a$ , soit les ensembles  $\varepsilon_i(a)$  d'arêtes ou d'arcs dont la transformation rend le graphe  $\mathcal{R}$ -régulier en  $a$  ;
- 2) trouver le degré local en  $a$  pour la relation  $\mathcal{R}$ , soit  $\delta(a)$  ;
- 3) trouver les ensembles minimaux de  $\mathcal{R}$ -régularisation en  $a$ , soit ceux pour lesquels :

$$\delta(a) = \min_i |\varepsilon_i(a)|.$$

### 7.1. $\mathcal{R} = \text{relation d'équilibre}$ ; *Algorithme de 2-équilibrage local (ou global) optimal*

Par des considérations assez simples de nature combinatoire, Flament [5] a mis au point un algorithme permettant de résoudre les trois problèmes ci-dessus, relatifs au 2-équilibre.

Nous ne ferons ici que rappeler les résultats de l'auteur, l'ensemble de la démarche étant repris en détail à propos du  $n$ -équilibrage local.

#### *Théorème 1*

Soit, dans l'ensemble  $V(a)$  des arêtes passant par  $a$ , un sous-ensemble  $V'(a)$ ,  $X'(a)$  étant l'ensemble des sommets de  $X$  reliés à  $a$  par des arêtes de  $V'(a)$

$$X'(a) = \{x \mid x \in X, (a, x) \in V'(a)\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Définissons } p(a, x) &= +1 \text{ si } (a, x) \in P \\ &= 0 \text{ si } (a, x) \in N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'(a, x) &= 1 - p(a, x) \text{ si } (a, x) \in V'(a) \\ &= p(a, x) \text{ si } (a, x) \notin V'(a). \end{aligned}$$

Construisons l'ensemble  $\bar{V}'(a)$  d'arêtes ne contenant pas  $a$  en faisant  $(x, y) \in \bar{V}'(a)$  si :

$$\begin{aligned} p'(a, x) + p'(a, y) &= 0 \text{ et } p(x, y) = 0 \\ p'(a, x) + p'(a, y) &= +1 \text{ et } p(x, y) = +1 \\ p'(a, x) + p'(a, y) &= +2 \text{ et } p(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Alors  $\varepsilon(a) = \{V'(a) \cup \bar{V}'(a)\}$  est un ensemble d'équilibrage local de  $a$ .

#### *Théorème 2*

Soit  $K(a)$ , le nombre de triplets non-admissibles contenant  $a$

$d_0(b)$ , le nombre de triplets contenant  $(a, b)$ , n'ayant aucune arête positive

$d_2(b)$ , le nombre de triplets contenant  $(a, b)$  ayant deux arêtes positives.

$$t_2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 \text{ si } s(\mathbf{bc}) = +1, s(\mathbf{ab}) \times s(\mathbf{ac}) = -1 \\ = 0 \text{ sinon.}$$

$$t_0(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 \text{ si } s(\mathbf{ab}) = s(\mathbf{bc}) = s(\mathbf{ac}) = -1 \\ = 0 \text{ sinon.}$$

Si on modifie les arêtes passant par  $\mathbf{a}$  formant l'ensemble  $V'(\mathbf{a})$ , on a :

$$|\varepsilon(\mathbf{a})| = |\varepsilon(\mathbf{G})| = K(\mathbf{a}) + |X'(\mathbf{a})| (|X| - |X'(\mathbf{a})|) - 2 \sum_{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})} [d_0(\mathbf{b}) + d_2(\mathbf{b})] \\ + 4 \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} [t_0(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + t_2(\mathbf{b}, \mathbf{c})].$$

L'algorithme de Flament repose sur l'exploration systématique des ensembles  $V'(\mathbf{a})$  par dimension croissante. Nous ne développons pas plus la démarche puisqu'elle sera reprise dans ses grandes lignes à propos du  $n$ -équilibre.

## 7.2. $\mathcal{R}$ = relation d'équivalence ; Algorithme de $n$ -équilibre local optimal

Le théorème suivant nous donne un moyen simple de trouver les ensembles d'arêtes d'équilibre local en  $\mathbf{a}$  de manière systématique.

**Théorème 1 :** Soit, dans l'ensemble  $V(\mathbf{a})$  des arêtes passant par  $\mathbf{a}$ , un sous-ensemble  $V'(\mathbf{a})$ ,  $X'(\mathbf{a})$  étant l'ensemble des sommets de  $X$  reliés à  $\mathbf{a}$  par des arêtes de  $V'(\mathbf{a})$

$$X'(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in V'(\mathbf{a})\}.$$

$$\text{Définissons } p(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = +1 \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in P \\ = 0 \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in N$$

$$s(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = +1 \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in P \\ = -1 \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in N.$$

$$\text{Appelons } p'(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1 - p(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \in V'(\mathbf{a}) \\ = p(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \text{ si } (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \notin V'(\mathbf{a}).$$

Construisons l'ensemble  $\bar{V}'(\mathbf{a})$  d'arêtes ne contenant pas  $\mathbf{a}$  en faisant  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bar{V}'(\mathbf{a})$  si :

$$p'(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + p'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = +1 \text{ et } p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = +1 \quad (1)$$

$$\text{ou si } p'(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + p'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = +2 \text{ et } p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (2)$$

et facultativement  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \bar{V}'(\mathbf{a})$  si :

$$p'(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + p'(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = 0 \quad (3)$$

Alors  $\varepsilon(\mathbf{a}) = \{V'(\mathbf{a}) \cup \bar{V}'(\mathbf{a})\}$  est un ensemble d'équilibre local de  $\mathbf{a}$ .

En examinant de manière systématique l'ensemble des parties de  $V(\mathbf{a})$ , on construira ainsi la famille  $\{\varepsilon_i(\mathbf{a})\}$  des ensembles d'équilibre local de  $\mathbf{a}$ .

Dans la recherche d'ensembles de dimension minimum, on supprimera le cas (3).

**Démonstration :**

En effet, ayant changé ou non le signe de  $(a, x)$  selon son appartenance ou non à  $V'(a)$ , on a d'ores et déjà dans le triplet  $axy$ ,  $p'(a, x) + p'(a, y)$  arêtes positives. Pour que le triplet  $axy$  soit équilibré, il faut alors que  $p^*(x, y) + p'(a, x) + p'(a, y) = 0, 1$  ou  $3$ ,  $p^*(x, y)$  étant la valeur de  $p$  après ou non changement de signe de  $(x, y)$ .

— ou bien  $p'(a, x) + p'(a, y) = 0$

alors indifféremment on peut changer ou non le signe de  $(x, y)$ ,

$$\begin{aligned} p^*(x, y) &= 1 - p(x, y) \\ &\text{ou} \\ &= p(x, y) \end{aligned}$$

soit  $(x, y) \in \bar{V}'a$  ou  $(x, y) \notin \bar{V}'a$

— ou bien  $p'(a, x) + p'(a, y) = +1$

- si  $p(x, y) = +1$ , il faut changer le signe de  $(x, y)$

$$p^*(x, y) = 1 - p(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) \in \bar{V}'(a)$$

- si  $p(x, y) = 0$ , il ne faut pas changer le signe de  $(x, y)$

— ou bien  $p'(a, x) + p'(a, y) = +2$

- si  $p(x, y) = +1$ , il ne faut pas changer le signe de  $(x, y)$
- si  $p(x, y) = 0$ , il faut changer le signe de  $(x, y)$

$$p^*(x, y) = 1 - p(x, y) = 1$$

D'où le théorème 1.

Cherchons maintenant à calculer le degré de déséquilibre local  $\delta(a)$  en un sommet  $a$ . Rappelons que, par définition, c'est  $\delta(a) = \min \{|\varepsilon_i(a)|\}$ . On va chercher alors à calculer  $|\varepsilon_i(a)|$  correspondant à un  $X'_i(a)$  donné [ou de manière équivalente à un  $V'_i(a)$ ]. Adoptons la terminologie suivante. Soit :

$K(a)$  le nombre de triplets non-admissibles contenant  $a$

$d_0(b)$  le nombre de triplets contenant  $ab$ , ayant *zéro* arête positive

$d_1(b)$  le nombre de triplets contenant  $ab$ , ayant *une* arête positive

$d_2(b)$  le nombre de triplets contenant  $ab$ , ayant *deux* arêtes positives

$d_3(b)$  le nombre de triplets contenant  $ab$ , ayant *trois* arêtes positives

$t_1(b, c) = 1$  si  $s(b, c) = -1$  et  $s(a, b), s(a, c)$  de signes opposés

$t_2(b, c) = 1$  si  $s(b, c) = +1$  et  $s(a, b), s(a, c)$  de signes opposés

$t_3(b, c) = 1$  si  $s(b, c) = +1$  et  $s(a, b), s(a, c)$  de même signe

$t_0(b, c) = 1$  si les 3 arêtes sont négatives,

$t(+, -, +) = 1$  si  $s(ab) = +, s(ac) = -, s(bc) = +, \dots$

tous ces  $t_i$  et  $t$  nuls lorsque différents de 1.

Rappelons que  $|X'(a)|$  est la dimension de  $X'(a)$ , ensemble des arêtes passant par  $a$  que l'on change de signe pour réaliser l'équilibre local.

**Théorème 2** : Si, avant modification des arêtes de  $V'(a)$ , il y a  $K(a)$  triplets non-admissibles passant par  $a$ , on a :

$$|\varepsilon(a)| = K(a) + \frac{|X'(a)| (|X'(a)| + 1)}{2} + \sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = -1}} d_1(b) + \sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = +1}} d_3(b) \\ - \sum_{b \in X'(a)} d_2(b) + \sum_{b, c \in X'(a)} [t_2(b, c) - 2t_1(b, c) - 3t_3(b, c)]$$

**Démonstration**

— Supposons d'abord que seule l'arête  $(a, b)$  soit changée de signe. Cherchons le nombre de triplets qui changent de nature.

Si  $s(a, b) = +1$  :

- tout triplet  $abx$ , non-admissible, devient admissible, à une arête positive. Leur nombre est :

$$\sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = +1}} d_2(b)$$

- tout triplet  $abx$ , admissible à trois arêtes positives, devient non-admissible à deux arêtes positives.

Leur nombre est  $\sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = +1}} d_3(b)$

Si  $s(a, b) = -1$  :

- tout triplet  $abx$ , admissible à une arête positive, devient déséquilibré. Leur nombre est :

$$\sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = -1}} d_1(b)$$

- tout triplet  $abx$ , non-admissible, devient admissible, à 3 arêtes positives. Leur nombre est :

$$\sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = -1}} d_2(b)$$

Le nombre total de changements est donc :

$$\sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = -1}} d_1(b) + \sum_{\substack{b \in X'(a) \\ s(a, b) = +1}} d_3(b) + \sum_{b \in X'(a)} d_2(b) \quad (I)$$

— Supposons maintenant que plusieurs arêtes soient changées de signe. Dans certains triplets  $abc$  tels que  $ab$  et  $ac$  appartiennent à  $V'(a)$ , le changement de signe de deux arêtes provoque des changements de nature ou non des triplets selon les divers types de triplets possibles :

- 1) Si  $s(a, b) = s(a, c) = s(b, c) = -1$

le triplet  $abc$  devient non admissible.

Ces triplets sont en nombre  $\sum_{b, c \in X'(a)} t(-, -, -)$  qu'il faut ajouter à l'expression (I).

2) Si  $s(a, b) = s(a, c) = -1$ ,  $s(b, c) = +1$

le changement de signe des arêtes seules  $(a, b)$  ou  $(a, c)$  rend le triplet non-admissible, alors que le changement simultané annule le déséquilibre en faisant de  $abc$  un triplet à 3 arêtes positives. Dans le comptage du nombre de changement de nature des triplets, il faut donc retrancher à l'expression (I), 2 fois le nombre de tels triplets, soit :

$$- 2 \left[ \sum_{b, c \in X'(a)} t(-, -, +) \right]$$

3) Si  $s(a, b) = -1$ ,  $s(a, c) = +1$ ,  $s(b, c) = -1$  ou si  $s(a, b) = +1$ ,  $s(a, c) = -1$ ,  $s(b, c) = -1$  le changement d'une arête unique  $(a, b)$  dans le premier cas,  $(a, c)$  dans le second cas, rend le triplet non-admissible ; celui de deux arêtes, admissible à une arête positive.

Il faut retrancher une fois le nombre de tels triplets, soit :

$$- \left[ \sum_{b, c \in X'(a)} t(-, +, -) + \sum_{b, c \in X'(a)} t(+, -, -) \right]$$

4) Si  $s(a, b) = -1$ ,  $s(a, c) = +1$ ,  $s(b, c) = +1$  ou si  $s(a, b) = +1$ ,  $s(a, c) = -1$ ,  $s(b, c) = +1$  les deux changements possibles d'une arête unique  $(a, b)$  ou  $(a, c)$  rendent ces triplets admissibles ; le changement simultané de  $(a, b)$  et  $(a, c)$  rend non-admissibles à nouveau ces triplets.

Il faut retrancher deux fois le nombre de tels triplets, soit :

$$- 2 \left[ \sum_{b, c \in X'(a)} t(-, +, +) + \sum_{b, c \in X'(a)} t(+, -, +) \right]$$

5) Si  $s(a, b) = s(a, c) = s(b, c) = +1$  les deux changements possibles d'une arête unique  $(a, b)$  ou  $(a, c)$  déséquilibrent le triplet alors que le changement simultané le rend admissible à une arête positive.

Il faut retrancher deux fois le nombre de tels triplets, soit :

$$- 2 \left[ \sum_{b, c \in X'(a)} t(+, +, +) \right]$$

6) Enfin, dernier cas possible, si  $s(b, c) = -1$ ,  $s(a, b) = s(a, c) = +1$ , les deux changements possibles d'une arête unique  $(a, b)$  ou  $(a, c)$  équilibrent le triplet alors que le changement simultané a le même effet.

Il faut donc retrancher une fois le nombre de tels triplets, soit :

$$- \left[ \sum_{b, c \in X'(a)} t(+, +, -) \right]$$



D'où  $m$ , nombre de changements de nature des triplets :

$$\begin{aligned}
m = & \sum_{\substack{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a}) \\ s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +1}} d_3(\mathbf{b}) + \sum_{\substack{s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1 \\ \mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})}} d_1(\mathbf{b}) + \sum_{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})} d_2(\mathbf{b}) \\
& + \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} [t(-, -, -) - 2t(-, -, +) - t(-, +, -) - t(+, -, -) \\
& - 2t(-, +, +) - 2t(+, -, +) - 2t(+, +, +) - t(+, +, -)]
\end{aligned}$$

Parmi ces  $m$  changements,  $h$  se font de la non-admissibilité vers l'admissibilité avec :

$$h = \sum_{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})} d_2(\mathbf{b}) - \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} [t(+, +, -) + 2t(-, +, +) + 2t(+, -, +)]$$

Ceci s'obtient aisément en reprenant les divers cas de figures précédents.

D'où  $k = m - h$  triplets passant de l'admissibilité à la non-admissibilité. Comme il y a initialement avant modification des arêtes,  $K(\mathbf{a})$  triplets non-admissibles, on a maintenant  $K'(\mathbf{a})$  triplets non-admissibles :

$$K'(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a}) - h + k = K(\mathbf{a}) - 2h + m$$

soit

$$\begin{aligned}
K'(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a}) + & \sum_{\substack{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a}) \\ s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1}} d_1(\mathbf{b}) + \sum_{\substack{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a}) \\ s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1}} d_3(\mathbf{b}) - \sum_{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})} d_2(\mathbf{b}) \\
& + \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} [t(-, -, -) - 2t(-, -, +) - t(-, +, -) - t(+, -, +) \\
& + 2t(-, +, +) + 2t(+, -, +) - 2t(+, +, +) + t(+, +, -)]
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que le nombre des triplets  $abc$ ,  $[\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})]$  est :

$$\frac{|X'(\mathbf{a})| (|X'(\mathbf{a})| - 1)}{2} = \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} t(\pm, \pm, \pm) \text{ (somme des 8 combinaisons possibles)}$$

il vient

$$\begin{aligned}
K'(\mathbf{a}) = K(\mathbf{a}) + & \frac{|X'(\mathbf{a})| (|X'(\mathbf{a})| - 1)}{2} + \sum_{\substack{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a}) \\ s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1}} d_1(\mathbf{b}) + \sum_{\substack{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a}) \\ s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +1}} d_3(\mathbf{b}) \\
& - \sum_{\mathbf{b} \in X'(\mathbf{a})} d_2(\mathbf{b}) + \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{c} \in X'(\mathbf{a})} [-3 [t(-, -, +) + t(+, +, +)] \\
& - 2 [t(-, +, -) + t(+, -, -)] + [t(-, +, +) + t(+, -, +)]]
\end{aligned}$$

Si le triplet  $ax'y'$  est parmi les  $K'(a)$  triplets non-admissibles, on peut le rendre admissible seulement en changeant l'arête  $xy$ , toutes les arêtes contenant  $a$  que nous désirions changer ayant été déjà changées [arêtes de  $V'(a)$ ]. Il y a donc au total, pour équilibrer le graphe localement en  $a$ , un changement d'arêtes égal à :

$$|\varepsilon(a)| = |X'(a)| + K'(a) = |X'(a)| + K(a) - 2h + m$$

d'où le résultat énoncé, compte tenu des définitions de  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ .

Du théorème 2, on déduit un algorithme permettant de calculer le degré de déséquilibre local en tout sommet  $x$  d'un graphe complet algébrique. Il suffit d'explorer progressivement toutes les parties  $V'(a)$  de  $V(a)$ , à partir des ensembles de dimension croissante, depuis  $|X'(a)| = 0$ , soit  $V'(a) = \emptyset$  jusqu'à  $X'(a) = X(a)$ , soit  $V'(a) = V(a)$ .

En fait, on peut concevoir une règle d'arrêt simple, limitant l'exploration des parties  $V'(a)$ .

En effet,  $V'(a) \subset \varepsilon(a) \Rightarrow |\varepsilon(a)| \geq |V'(a)| = |X'(a)|$ .

Si après avoir exploré les ensembles  $|V'(a)|$  tels que  $|X'(a)| = 0, |X'(a)| = 1, \dots, |X'(a)| = k$ , on a trouvé un ensemble d'équilibrage de dimension  $|\varepsilon(a)|$  minimum égal à  $k$ , il est inutile de poursuivre l'exploration, puisqu'elle conduirait nécessairement à des  $|\varepsilon(a)| \geq k + 1$ . Le degré de déséquilibre local est alors égal à  $k$ .

Il existe une borne supérieure très simple de  $\delta(a)$  qui peut jouer le même rôle, à savoir le nombre d'arêtes positives passant par  $a$ . En changeant le signe de telles arêtes, on équilibre toujours le sommet  $a$ .

Considérons l'exemple suivant, qui illustre l'algorithme de Flament (cf. [5]).

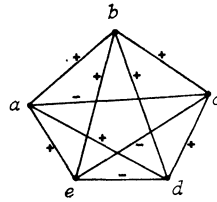


Figure 18

Calculons d'abord les coefficients suivants  $d'$  et  $t'$  représentant les valeurs des  $d$  et  $t$  affectées des coefficients algébriques avec lesquels ils apparaissent dans les formules donnant  $|\varepsilon(a)|$  :

$$d'(b) = d_3(b) - d_2(b) = 2 - 1 = 1.$$

$\begin{matrix} abd & abc \\ abc \end{matrix}$

Semblablement  $d'(c) = -1$ ,  $d'(d) = -1$ ,  $d'(e) = 0$

$$t'(b, c) = t_2(b, c) = +1$$

$$t'(b, d) = -3 \quad t_3(b, d) = -3$$

$$t'(b, e) = -3 \quad t_3(b, e) = -3$$

$$t'(c, d) = t_2(b, c) = + 1$$

$$t'(c, e) = - 2 \quad t_1(c, e) = - 2$$

$$t'(d, e) = 0.$$

Construisons alors progressivement le tableau suivant qui permet de calculer  $|\varepsilon(a)|$  pour un certain  $X'(a)$ . On s'arrête dès que la règle d'arrêt est satisfaite.

| $V'(a) =  X'(a) $ | (1)<br>$K(a) + \frac{ X'(a)  ( X'(a)  + 1)}{2}$ | $V'(a)$                                                  | (2)<br>$\sum_{b \in V'(a)} d'(b)$ | (3)<br>$\sum_{b, c \in X'(a)} t'(b, c)$ | (1) + (2) + (3)<br>$ \varepsilon(a) $ |
|-------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|
| 0                 | 3                                               | $\emptyset$                                              |                                   |                                         | 3                                     |
| 1                 | 4                                               | ab<br>ac<br>ad<br>ae                                     | + 1<br>- 1<br>- 1<br>0            |                                         | 5<br>3<br>3<br>4                      |
| 2                 | 6                                               | ab, ac<br>ab, ad<br>ab, ae<br>ac, ad<br>ac, ae<br>ad, ae | 0<br>0<br>1<br>- 2<br>- 1<br>- 1  | 1<br>- 3<br>- 3<br>1<br>- 2<br>0        | 7<br>3<br>4<br>5<br>3<br>5            |
| 3                 | 9                                               | ab, ac, ad<br>ab, ac, ae<br>ab, ad, ae<br>ac, ad, ae     | - 1<br>0<br>0<br>- 2              | - 1<br>- 4<br>- 6<br>- 1                | 7<br>5<br>3<br>6                      |

Le degré de déséquilibre local  $\delta(a)$  est égal à 3. La propriété 6 permet de construire les divers ensembles minimaux d'équilibrage  $\varepsilon_i(a)$ . Ce sont, dans l'ordre correspondant d'apparition :

(1) (bc, cd, de)

(2) (ac, ce, de)

(3) (ad, bc, bd)

(4) (ab, ad, be)

(5) (ac, ae, be)

(6) (ab, ad, ae)

Donnons les graphes équilibrés en  $a$  correspondant à ces solutions :

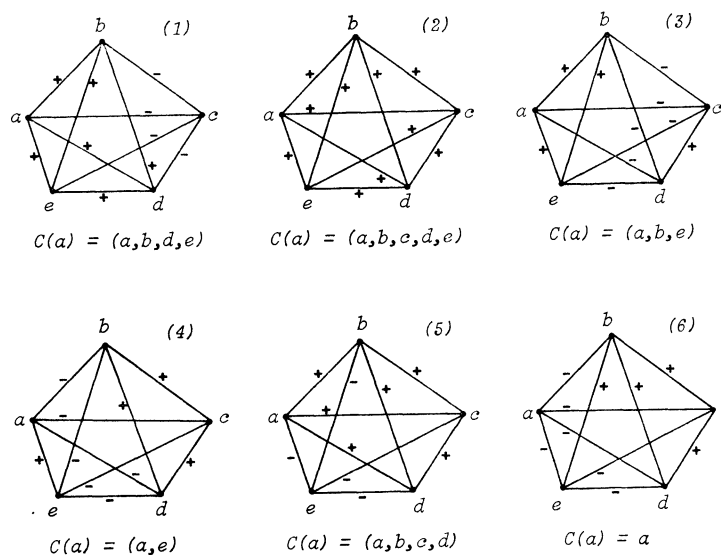


Figure 19

L'algorithme étant de nature exploratoire, rien n'empêche de se donner des contraintes particulières sur  $\varepsilon(a)$  ; au contraire, ces contraintes diminuent le champ d'exploration et rendent plus rapide l'emploi de l'algorithme.

On peut imaginer comme contraintes :

- seules les arêtes positives peuvent changer de signe (ou inversement). Alors, dans la construction progressive de  $V'(a)$ , toutes les combinaisons avec au moins une arête négative sont éliminées. De même pour les solutions obtenues, telles qu'au moins une arête négative appartienne à  $\bar{V}'(a)$  ;
- certaines arêtes ne peuvent changer de signe, extension du cas précédent, qui se traite semblablement ;
- on peut affecter des coûts de changement de signe à chaque arête  $(x, y)$ , soit  $c(x, y)$ . Alors un équilibrage optimum étant un équilibrage qui minimise  $\sum_{\varepsilon(a)} c(x, y)$ , il faut explorer dans le cas général tous les  $\varepsilon_i(a)$ , y compris ceux pour lesquels on n'a pas forcément  $\delta(a) = |\varepsilon_i(a)|$ .

### 7.3. $\mathcal{R}$ = relation d'ordre ; Algorithme de construction optimale d'un tournoi transitif localement

La démarche est entièrement parallèle à celle suivie pour l'élaboration d'un algorithme de  $n$ -équilibrage local. Nous ne ferons que présenter les résultats analogues correspondants, sans démonstration.

Le théorème 1 prend la forme suivante :

**Théorème 1 :** Soit, dans l'ensemble  $V(a)$  des arcs passant par  $a$ , un sous-ensemble  $V'(a)$ ,  $X'(a)$  étant l'ensemble des sommets de  $X$  reliés à  $a$  par des arcs de  $V'(a)$  :

$$X'(a) = \{x \mid x \in X, (a, x) \text{ ou } (x, a) \in U\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Définissons } s(a, x) &= +1 \text{ si } (a, x) \in U \\ &= -1 \text{ si } (x, a) \in U. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Appelons } s'(a, x) &= (-1) \times s(a, x) \text{ si } (a, x) \in V'(a) \\ &= s(a, x) \quad \text{si } (a, x) \notin V'(a). \end{aligned}$$

Construisons l'ensemble  $\bar{V}'(a)$  d'arcs ne contenant pas  $a$  en faisant  $(x, y) \in \bar{V}'(a)$

$$\text{si } s'(a, x) = +1, s'(a, y) = -1 \text{ et } s(x, y) = -1$$

$$\text{ou si } s'(a, x) = -1, s'(a, y) = +1 \text{ et } s(x, y) = +1.$$

Alors  $\varepsilon(a) = \{V'(a) \cup \bar{V}'(a)\}$  est un ensemble d'arcs dont l'inversion rend le tournoi localement transitif en  $a$  et  $\delta(a) = \min |\varepsilon(a)|$  :

— soit  $K(a)$  le nombre de 3-circuits passant par  $a$  avant modification ;

— aux triplets  $axy$  contenant  $a$ , associons les nombres :

$$\begin{aligned} t^{+, -, +}(xy) &= 1 \text{ si } s(a, x) = +1, s(x, y) = -1, s(y, a) = +1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{+, +, +}(xy) &= 1 \text{ si } s(a, x) = +1, s(x, y) = \pm 1, s(y, a) = +1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

etc. ;

— rappelons enfin que  $|X'(a)|$  est la dimension de  $K'(a)$ , ensemble d'arcs passant par  $a$  que l'on change de sens pour réaliser la transitivité locale en  $a$ .

Alors on montre que, par analogie avec les calculs effectués à propos du  $n$ -équilibre local :

$$\begin{aligned} m = - \frac{|X'(a)| (|X'(a)| - 1)}{2} &+ \sum_{x \in X'(a)} (t^{++}(x, y) + t^{--}(x, y)) \\ &+ 2 \sum_{x, y \in X'(a)} (t^{+-}(x, y) + t^{-+}(x, y)) \end{aligned}$$

$$h = \sum_{\substack{x \in X'(a) \\ s(a, x) = +1}} t^{+++}(x, y) + \sum_{\substack{x \in X'(a) \\ s(a, x) = -1}} t^{---}(x, y) - \sum_{x, y \in X'(a)} (t^{++}(x, y) + t^{--}(x, y))$$

$$K'(a) = K(a) - \frac{|X'(a)| (|X'(a)| - 1)}{2} + \sum_{x \in X'(a)} (t^{-++}(x, y) + t^{+-}(x, y) - t^{+++}(x, y) - t^{---}(x, y)) + 2 \sum_{x, y \in X'(a)} (t^{+-}(x, y) + t^{-+-}(x, y) + t^{++}(x, y) + t^{--}(x, y))$$

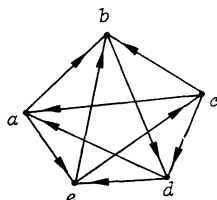
$$|\varepsilon(a)| = K(a) - \frac{|X'(a)| (|X'(a)| - 3)}{2} + \sum_{x \in X'(a)} (t^{-++}(x, y) + t^{+-}(x, y) - t^{+++}(x, y) - t^{---}(x, y)) + 2 \sum_{x, y \in X'(a)} (t^{+-}(x, y) + t^{-+-}(x, y) + t^{++}(x, y) + t^{--}(x, y))$$

On déduit un algorithme exploratoire analogue à celui de l'équilibre local avec la même règle d'arrêt sur  $|X'(a)|$  d'une part, avec une règle complémentaire issue de l'inégalité :

$$|\varepsilon(a)| \leq \min (d^+(a), d^-(a))$$

exprimant qu'en un sommet dont tous les sommets adjacents sont soit antécédents soit suivants, il y a transitivité locale.

Donnons un exemple d'application. Soit le tournoi :



$$K(a) = 3 \text{ (abc, abd, ace)}$$

Figure 20

| (1)                 | (2)    | (3)                               |                                                          | (4)                              | (5)                            | (1) + (2) + (3) + (4) + (5) |
|---------------------|--------|-----------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| $ X'(a)  =  V'(a) $ | $K(a)$ | $\frac{ X'(a)  ( X'(a)  - 1)}{2}$ | $V'(a)$                                                  | $\sum_x$                         | $\sum_{x, y}$                  | $ \varepsilon(a) $          |
| 0                   | 3      | 0                                 | $\emptyset$                                              | 0                                | 0                              | 3                           |
| 1                   | 3      | 0                                 | ab<br>ac<br>ad<br>ae                                     | -1<br>-1<br>-1<br>-1             | 0<br>0<br>0<br>0               | 3<br>3<br>3<br>3            |
| 2                   | 3      | -1                                | ab, ac<br>ab, ad<br>ab, ae<br>ac, ad<br>ac, ae<br>ad, ae | -2<br>-2<br>-2<br>-2<br>-2<br>-2 | +2<br>+2<br>0<br>0<br>+2<br>+2 | 4<br>4<br>2<br>2<br>4<br>4  |

Les deux règles d'arrêt jouent simultanément alors et le degré local de non-transitivité est donc égal à 2. La propriété 5 permet de construire les deux ensembles minimaux  $\varepsilon(a)$  de dimension  $\delta(a)$ . Ce sont respectivement simplement ici  $(ab, ae)$  et  $(ac, ad)$  conduisant aux tournois localement transitifs en  $a$ , non globalement transitifs (3-circuits  $bde$  et  $cde$ ).

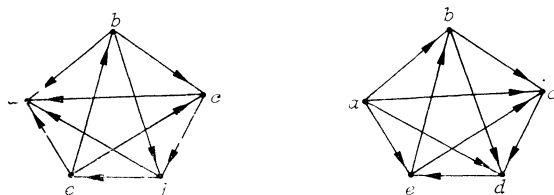


Figure 21

#### 7.4. $\mathcal{R}$ = relation de préordre ; Algorithme de construction optimale d'un match transitif localement

On conçoit aisément, en vertu de l'analogie des propriétés et formulations entre matchs et tournois, l'existence d'un algorithme de construction optimale d'un match transitif localement en un sommet  $a$  avec deux variantes possibles selon les distances choisies. Cependant, la formulation s'alourdit considérablement du fait que la relation qui lie deux sommets peut avoir non plus deux mais trois valeurs. On ne peut plus simplement parler de changement de signe d'une arête (cas des graphes algébriques) ou de l'inversion du sens d'un arc (cas des tournois). De ce fait, l'aspect exploratoire prend une dimension très lourde et rend complexe une démarche simple.

Pas plus que le problème global, nous ne traiterons ici le problème local. Une procédure heuristique valable quelle que soit la relation  $\mathcal{R}$  (équilibre, équivalence, ordre et préordre) et exposée à la fin de l'article vise à résoudre directement le problème de préordre à distance minimum d'un match quelconque.

## 8. ALGORITHMES DE CONSTRUCTION DE GRAPHES $\mathcal{R}$ -RÉGULIERS A DISTANCE MINIMUM D'UN GRAPHE QUELCONQUE

### 8.1. Équilibre à distance minimum d'un G.A.C.

Le problème est résolu par l'algorithme local (cf. 7.1.).

### 8.2. Équivalence à distance minimum d'un G.A.C.

A partir de la propriété 3 du paragraphe 6.2, on élabore facilement une procédure de  $n$ -équilibre d'un graphe. Il suffit d'équilibrer localement partiellement le graphe en un certain nombre de sommets dont la succession est construite de la manière suivante :

1) On part d'un sommet  $a$  quelconque, que l'on équilibre de toutes les manières possibles. A chaque  $V'_i(a)$  correspond un  $|\varepsilon_i(a)|$ , ainsi qu'un clan  $C_i(a)$  et un anti-clan  $\bar{C}_i(a)$ . Si  $|\bar{C}_i(a)| \leq 2$ , le graphe est équilibré.

2) Sinon, soit  $b$  un sommet quelconque appartenant à  $\bar{C}_i(a)$ . Si  $K(b)$ , nombre de triplets non-admissibles définis sur  $\bar{C}_i(a)$  est nul, le graphe  $G$  est équilibré et  $|\varepsilon(G)| = |\varepsilon_i(a)|$ . Sinon on équilibre localement en  $b$ , partiellement sur  $X - C_i(a)$ . D'où des  $|\varepsilon_j(b)|$ . Soit  $\bar{C}_j(b)$  l'anti-clan de  $C_j(b)$  sur  $X - C_i(a)$ . Si  $|\bar{C}_j(b)| \leq 2$ , le graphe est équilibré et  $|\varepsilon(G)| = |\varepsilon_i(a)| + |\varepsilon_j(b)|$ .

3) Sinon, soit  $c$  un sommet de  $\bar{C}_j(b)$ . Si  $K(c)$  défini sur  $\bar{C}_j(b)$  est nul,  $G$  est équilibré avec  $|\varepsilon(G)| = |\varepsilon_i(a)| + |\varepsilon_j(b)|$ .

Sinon, on équilibre en  $c$  sur  $X - C_i(a) - C_j(b)$ . D'où des  $|\varepsilon_k(c)|$ . Soit  $\bar{C}_k(c)$  l'anti-clan de  $c$  sur  $X - C_i(a) - C_j(b)$ . Si  $|C_k(c)| \leq 2$ ,  $G$  est équilibré et  $|\varepsilon(G)| = |\varepsilon_i(a)| + |\varepsilon_j(b)| + |\varepsilon_k(c)|$ .

4) On réitère ainsi en explorant toutes les combinaisons possibles  $E_n$  d'ensembles d'équilibrages partiels locaux, constituant l'ensemble :

$$E = \{(\varepsilon_1(a), \varepsilon_1(b), \dots), \dots (\varepsilon_i(a), \varepsilon_j(b), \dots), \dots\}$$

$$\text{où } E_k = (\varepsilon_i(a), \varepsilon_j(b), \dots).$$

Alors le degré de déséquilibre du graphe  $G(X ; P, N)$  est égal à  $\delta(G) = \min_{E_k} |E_k|$ .

Pour accélérer la procédure, on utilise évidemment des procédures par séparation et évaluation séquentielle (P.S.E.S.) (cf. B. Roy [14]).

Pour valider l'algorithme, il suffit de montrer qu'un quelconque ensemble d'équilibrage global du graphe  $G$  appartient toujours à l'ensemble  $E$  construit par la procédure.

Soit le graphe non-équilibré  $G(X ; P, N)$  et un équilibrage quelconque  $G'(X ; P', N')$ .

Soit  $a$  le sommet de départ de la procédure. On peut construire  $V'(a)$  ensemble d'arêtes passant par  $a$  de signe différent dans  $G$  et  $G'$  et  $V'(a)$  associé. Ces arêtes de signes différents dans  $\bar{G}$  et  $G'$  ont été ainsi transformées dans l'algorithme. Il suffit de réitérer ainsi en ne s'occupant plus que des arêtes et sommets de  $\bar{C}(a)$  et tout d'abord des arêtes  $V(b)$  définies sur  $X - C(a)$ ,  $b$  étant le second de la procédure choisie.

Appliquons l'algorithme à l'exemple du paragraphe 7.2.

A partir des 6 ensembles d'équilibrage optimaux locaux en  $a$ , on obtient les résultats suivants :

- $(bc, cd, de)$  définit un clan  $(a, b, d, e)$  et un anti-clan  $c$  ;
- $(ac, ce, de)$  définit un clan  $(a, b, c, d, e)$  avec anti-clan associé vide ;
- $(ad, bc, bd)$  définit un clan  $(a, b, e)$  avec un anti-clan  $(c, d)$  ;
- $(ab, ad, be)$  définit un clan  $(a, e)$  avec un anti-clan  $(b, c, d)$  ;  $(b, c, d)$  est équilibré, donc  $(ab, bc, bd)$  est un ensemble d'équilibrage optimum global ;
- $(ac, ae, be)$  définit un clan  $(a, b, c, d)$  et un anti-clan  $e$  ;
- $(ab, ad, ae)$  définit un clan  $a$  et un anti-clan  $(b, c, d, e)$  qui n'est pas équilibré localement par exemple en  $b$   $(bec, bed)$ .



Il est inutile de chercher à équilibrer celui-ci puisque cela conduit à un degré de déséquilibre supérieur à 3. On a donc en tout et pour tout 5 solutions optimales pour un degré de déséquilibre global et égal à 3.

### 8.3. Ordre à distance minimum d'un tournoi

On utilise la propriété 3 du paragraphe 6.3, qui permet de ramener la construction globale à une succession de constructions locales dans des sous-tournois de dimension décroissante. La propriété 2 bis définit une règle d'arrêt pratique.

Donnons les grandes lignes de l'algorithme :

(0)  $Y_0 = X$ .

(1) On cherche si un sommet  $x$  est localement transitif sur le tournoi considéré défini par  $Y_i$ . Si  $x$  existe, on va directement en (3).

(2) Sinon, on choisit un sommet  $x$  et on construit par l'algorithme précédent les tournois transitifs localement en  $x$  sur  $Y_i$  tels que  $\sum_{j=0}^i \delta(Y_j)$  soit inférieur au minimum de cette somme jusqu'alors trouvée, soit à un majorant d'initialisation de  $\delta(T)$ .

(3) Correspondant à  $x$ , on construit alors  $A_i(x)$  et  $S_i(x)$  sur  $Y_i$ , nouveaux sous-tournois  $Y_{i1}$  et  $Y_{i2}$ .

On se ramène alors à (1) pour résoudre un problème de construction de tournois transitifs sur des sous-tournois de dimension décroissante  $|A_i|$  et  $|S_i|$ , explorés selon une procédure arborescente. On s'arrête d'explorer ceux-ci dès que leur dimension est inférieure ou égale à 2.

On constate aisément que l'on a intérêt à dichotomiser au maximum les tournois et sous-tournois apparaissant en cours de procédure afin d'utiliser au mieux la règle d'arrêt portant sur la dimension. On a donc, dans le choix arbitraire de  $x$  (étape 2), intérêt à choisir des sommets dont on peut penser *a priori* que dans les sous-tournois  $Y_i$  en cours d'analyse, une fois ceux-ci rendus transitifs optimalement, *ils se trouveront ordonnés selon un rang moyen*. Une règle empirique consiste alors à choisir ceux-ci comme ceux vérifiant approximativement la relation :

$$d^+(x) - d^-(x) \neq 0.$$

Si l'on applique l'algorithme à l'exemple du paragraphe 7.3. :

— On partira des solutions localement optimales en  $a$  :

- dans la première,  $A(a) = (b, c, d, e)$ ,  $S(a) = \emptyset$  le sous-tournoi  $T'$  défini par  $(b, c, d, e)$  n'est pas transitif. L'inversion de  $d$  est la solution optimale unique (1) pour le rendre transitif, d'où  $\delta(T) \leq \delta(a) + \delta(T') = 2 + 1$ ,  $\varepsilon(T) = ab, ae, de$  ;
- dans la seconde,  $A(a) = \emptyset$ ,  $S(a) = (b, c, d, e)$ .

Solution (2) identique à la précédente, au rang près de  $a$ ,  $\varepsilon(T) = ac, ad, de$ .

- Il faut alors réexaminer dans les solutions déjà construites (définies par  $X'(a) \leq 2$ ) et relatives à la transitivité en  $a$ , celles pour lesquelles  $2 < \delta(a) \leq 3$ , soit  $\delta(a) = 3$ . S'il leur correspond des sous-tournois transitifs  $T'$  et  $T''$  définis par  $A$  et  $S$ , alors  $\delta(T) = \delta(a) + \delta(T') + \delta(T'') = 3 + 0 + 0$  est encore solution optimale globale.

Dans l'ordre des 5 solutions telles que  $X'(a) \leq 2$ , où elles apparaissent :

- La première associe à  $a$  le rang 3, donc  $A(a)$  et  $S(a)$  sont de dimension égale à 2 et le tournoi est transitif,  $\varepsilon(a) = \varepsilon(T) = bc, bd, ce$  (solution (3)).
- Dans la seconde,  $a$  a le rang 4,  $A(a) = (b, c, d)$  et le tournoi associé est transitif. Solution (4) :  $\varepsilon(T) = bd, cd, ac$ .
- Dans la troisième,  $a$  a le rang 2,  $S(a) = (b, c, e)$  et le tournoi associé est transitif. Solution (5) :  $\varepsilon(T) = bd, cd, ac$ .
- Dans les quatrième et cinquième, où  $a$  a le rang respectif de 2 et de 4, il existe toujours un sous-tournoi non-transitif (bde ou cde).

Il faut enfin chercher s'il existe des solutions telles que  $|V'(a)| = 3$ ,  $|\bar{V}'(a)| = 0$  et  $A(a)$  et  $S(a)$  correspondants transitifs. Le fait qu'il existe des 3-circuits ne passant pas par  $a$  (bde et cde) apporte une réponse négative immédiate. Il y a donc en tout et pour tout, 5 solutions optimales correspondant à  $\delta(T) = 3$ . Nous les récapitulons ci-dessous :

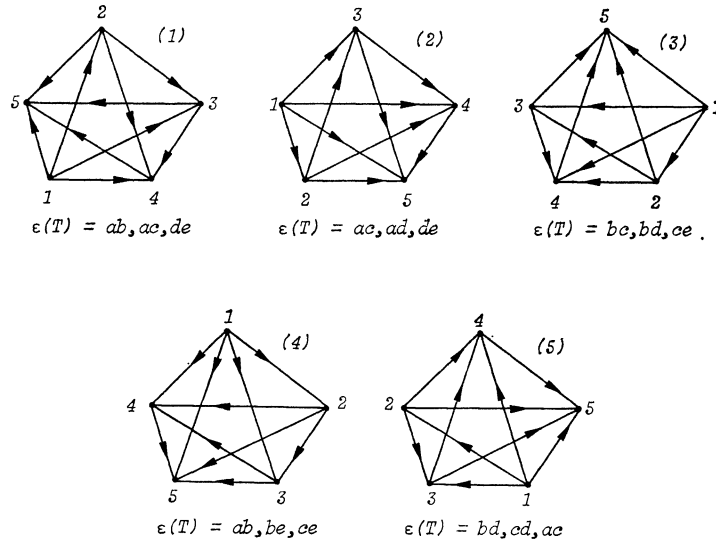


Figure 22

Du fait de la forte non-transitivité du tournoi initial, à la fois globale et locale en chacun de ses sommets, on obtient des ordres très différents, chaque sommet pouvant avoir en particulier n'importe quel rang dans l'ensemble des solutions.

#### 8.4. Préordre à distance minimum d'un match

Nous renvoyons à l'heuristique définie au paragraphe suivant.

## 9. HEURISTIQUE GÉNÉRALE POUR LA CONSTRUCTION DE RELATIONS PARTICULIÈRES A DISTANCE MINIMUM D'UN GRAPHE DONNÉ

Quel que soit l'un des quatre problèmes précédemment étudiés, dans un graphe quelconque, on peut recenser des triplets non-admissibles. Ainsi une liaison  $xy$  au sens le plus large peut être caractérisée par le nombre de triplets non-admissibles qui la contiennent, indice associé au couple  $(x, y)$  :

$$\bar{t}_1(x, y) = \sum_z T(x, y, z) \quad T(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(xyz) \text{ est un triplet non-admissible} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou complémentairement par le nombre de triplets admissibles qui la contiennent,

$$t_1^+(x, y) \text{ avec } t_1^+(x, y) + \bar{t}_1(x, y) = n - 2.$$

On peut de même définir le nombre de triplets qui deviennent ou restent non-admissibles :

- lorsqu'on change le signe d'une arête dans un  $A_n$  ou que l'on inverse le sens d'un arc dans un  $T_n$ , soit  $t_2(x, y)$  ;
- Lorsqu'on change dans un match selon les deux modalités possibles la nature de la liaison entre  $x$  et  $y$ , d'où  $t_{21}(x, y)$  et  $t_{22}(x, y)$ .

En fait, la modification d'un seul arc ou arête quelconque d'un triplet non-admissible rend toujours admissible le triplet dans le cas des graphes algébriques et des tournois. Mais la réciproque n'est pas vraie : un triplet admissible peut rester admissible (exception faite pour le 2-équilibre).

Ainsi à un facteur près,  $\Delta T(x, y) \equiv \bar{t}_1(x, y) - \bar{t}_2(x, y) \equiv t_2^+ - t_1^+$  représente la diminution algébrique de l'indice de déséquilibre ou non-transitivité du couple  $(x, y)$  par changement de nature de la relation. Dans le cas d'un match, on aurait deux valeurs  $\Delta T_1(x, y)$  et  $\Delta T_2(x, y)$ .

L'heuristique proposée est simple : il s'agit de choisir séquentiellement le changement de liaison  $xy$  dont la valeur unique  $\Delta T(x, y)$ , ou celle parmi les deux possibles, est maximum relativement à l'ensemble des couples  $x, y$ ,  $\Delta T(x, y)$  étant recalculé après chacune des modifications pour l'ensemble des couples  $(x, y)$ . On arrête la procédure dès que, pour tout  $(x, y)$ ,  $\Delta T(x, y) \leq 0$ .

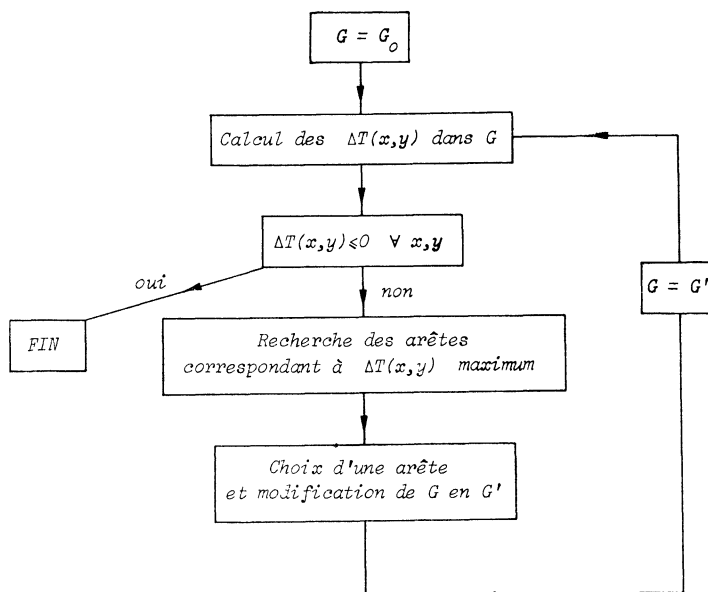


Figure 23

Pour obtenir toutes les solutions, il faut, à chaque itération, mettre en mémoire les arêtes ou arcs dont les  $\Delta T(x, y)$  sont égaux au maximum pour les reprendre par la suite.

La validité de cette méthode n'a pas été démontrée. En pratique cependant, elle a toujours conduit à des solutions optimales, relativement à des relations d'équilibre, équivalence, ordre et pré-ordre (en choisissant ici le degré  $\delta'$ ) et cela en des temps extrêmement rapides, hors de proportion avec les procédures usuelles exploratoires arborescentes. En fait, le temps est directement proportionnel au degré de déséquilibre ou de non-transitivité puisque chaque itération correspond à une diminution de celui-ci d'une unité.

Ce même temps est approximativement proportionnel au cube de la dimension du graphe

puisque le calcul des  $\Delta T(x, y)$  nécessite  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  opérations élémentaires. On peut accélérer

la procédure en évitant de recalculer systématiquement les  $\Delta T(x, y)$  dans le graphe modifié mais en faisant les seules corrections nécessaires, relatives par exemple pour la valeur  $\Delta T(x, y)$  après modification de l'arête  $(t, z)$ , à l'examen des seuls triplets contenant  $t$  et  $z$ , en nombre égal à  $n-2$ .

On conçoit aisément d'où vient l'efficacité de cette heuristique : devant modifier les arêtes, plutôt que d'élaborer des procédures basées sur les sommets et leurs propriétés, il est plus naturel et intuitif de chercher directement des indicateurs relatifs à chacune des arêtes. Cependant, la réduction optimale d'indices qui est au centre de la procédure n'est pas du tout équivalente à la réduction optimale des degrés. Ce que l'on peut illustrer par exemple à propos des tournois par le fait qu'à côté des seuls tournois réguliers ou quasi-réguliers  $T_n$  où le nombre de 3-circuits est maximum, il existe parfois d'autres tournois  $T'_n$ , donc d'indice inférieur, de même degré.

La réalisation graphique est due à J. Leconte.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABELSON, R., ROSENBERG, M., « Symbolic psychology : A model of attitudinal cognition », *Behav. Sc.*, 3-1-13.
- [2] BARBUT, M., « Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée », *Math. Sci. hum.*, n° 17, 1966, pp. 47-48.
- [3] BERMOND, J. C., « Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux », *Math. Sci. hum.*, n° 37, 1972, pp. 5-25.
- [4] DURAND, B., « A propos des problèmes du nombre minimum d'arcs à évaluer pour supprimer les circuits d'un graphe », *Math. Sci. hum.*, n° 20, 1967, pp. 61-68.
- [5] FLAMENT, C., *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Mouton et Gauthier-Villars, 1965.
- [6] — « Équilibre d'un graphe, quelques résultats algébriques », *Math. Sci. hum.*, n° 30, 1970.

- [7] HARARY, F., « On the notion of balance of a signed graph », *Mich. math. Journal*, 2.
- [8] HARARY, F., « On local balance and  $n$ -balance in signed graphs », *Mich. math. Journal*, 3.
- [9] HARARY, F., NORMAN, R. Z., CARTWRIGHT, C., *Structural models : An introduction to the theory of directed graphs*, New York, Wiley, 1965.
- [10] JACQUET-LAGRÈZE, E., « Opinions valuées et graphes de préférence », *Math. Sci. hum.*, n° 33, 1971.
- [11] KENDALL, M. G., BABINGTON, SMITH, B., « On the method of paired comparison », *Biometrika*, 33, 1940, pp. 239-251.
- [12] REMAGE, R., THOMPSON, W. A., « Maximum likelihood paired comparison rankings », *Biometrika*, 53, 1966, pp. 143-149.
- [13] RIBEILL, G., « Recherche sur les graphes déséquilibrés », *Metra International*, Direction Scientifique, Note de Travail n° 166.
- [14] ROY, B., *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Paris, Dunod, vol. 2, chap. 10, 1969.
- [15] SLATER, P., « Inconsistencies in a schedule of paired comparisons », *Biometrika*, 48, 1961, pp. 303-312.