MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

V. DI GIORGIO

Application de l'algèbre de Boole à l'étude des graphes

Mathématiques et sciences humaines, tome 36 (1971), p. 33-58
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1971__36__33_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (9e année, n° 36, 1971, p. 33-58)

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DE BOOLE A L'ÉTUDE DES GRAPHES [1]

par

V. DI GIORGIO [2]

Les procédures de calcul booléen présentées ici traitent de la recherche de sous-ensembles de sommets ou d'arêtes d'un graphe ayant une propriété commune formulée en termes d'incidence et d'adjacence (une arête u *et un sommet* x *sont incidents si* x *est une extrémité de* u *; deux sommets sont adjacents s'ils sont extrémités d'une même arête, deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune).*

Exemples :

— *Une couverture est un ensemble d'arêtes tel que tout sommet est incident à au moins l'une d'elle,*
— *Un support est un ensemble de sommets tel que toute arête est incidente à au moins l'un d'eux,*
— *Un ensemble intérieurement stable est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents,*
— *Une clique est un ensemble de sommets deux à deux adjacents,*
— *Un couplage est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes, etc.*

Une famille d'ensembles considérée est soit énumérée de façon exhaustive, soit explorée pour la recherche de ses éléments optimaux selon un critère donné (couvertures minimales ou de cardinal minimal, cliques maximales ou de cardinal maximal, par exemple). C'est généralement le calcul de ces éléments optimaux qui intéresse le plus l'utilisateur.

La résolution de ces équations booléennes est souvent en fait une transposition au calcul booléen d'une procédure exhaustive ; dans ce cas même le calcul systématique proposé présente une économicité intéressante. Cependant les algorithmes proposés sont certainement beaucoup plus longs que ceux qui découleraient de l'utilisation de propriétés caractéristiques des ensembles étudiés comme il en existe pour les arbres. Mais en général, de tels algorithmes n'existent pas encore.

Nous avons demandé à Vittorio Di Giorgio, de placer en annexe les préliminaires mathématiques parfois assez longs, afin que les problèmes de graphes soit plus rapidement abordés dans l'article. Il nous faut donc prier le lecteur de se reporter souvent à ces annexes pour l'explication de certaines notations ou définitions.

B. Leclerc.

1. GRAPHES ET CLASSES DE GRAPHES

1.1. Définition d'un graphe

Un graphe G est le quadruplet (X, U, I, T). On écrit G = (X, U, I, T). X et U sont deux ensembles finis dont les éléments seront appelés des sommets et des arêtes respectivement:

$$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}, \qquad U = \{ u_1, u_2, \ldots, u_m \} ;$$

1. Je tiens à remercier tout particulièrement M. P. Rosenstiehl. Son aide scientifique et son soutien moral m'ont grandement aidés dans la réalisation de cet article.

2. Centre d'Ekistique d'Athènes, Grèce.

I et T sont deux applications (quelconques) de U dans X. L'image de u par I (resp. T), notée I(u) (resp. T (u)) est appelée l'initiale (resp. la terminale) de u.

Considérons l'application $\alpha = I \times T$ de U dans $X \times X$ telle que :

$$\alpha(u) = (I \times T)(u) = (I(u), T(u)).$$

Un arc de G est le couple (u, α (u)), *i.e.*, l'arête u plus son orientation. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des arcs de G :

$$\mathscr{A} = \{ (u, (x, y)) \in U \times (X \times X) \,/\, \alpha(u) = (x, y) \}.$$

Plus précisément, on dit que le quadruplet (X, U, I, T) est un k-graphe ssi :

$$\max_{(x,\,y) \in X \times X} (\mathbf{card}\ (\alpha^*(\{ (x, y) \}))) = k \qquad (c.f.\ \text{ann. 2, ex. 2})$$

(*i.e.*, k = le nombre maximum d'arêtes qui ont même extrémité initiale et terminale). Si $k > 1$, alors G sera appelé un multigraphe. On remarque que : $k = 1 \Leftrightarrow \alpha$ injective.

Exemple

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}; \qquad U = \{ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 \}.$$

Les applications I et T sont définies par le tableau ci-après.

u	I(u)	T(u)
u_1	x_1	x_2
u_2	x_2	x_3
u_3	x_4	x_3
u_4	x_4	x_1
u_5	x_2	x_4
u_6	x_2	x_3
u_7	x_3	x_4
u_8	x_1	x_1

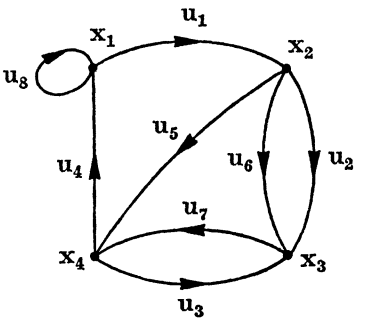
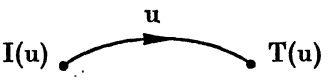


Fig. 1
(*multigraphe*, $k = 2$)

Il est clair que la représentation d'un graphe sur le plan se fait de la façon suivante :



Attention ! D'après la définition adoptée, le schéma de la figure 2 n'est pas un graphe : il n'y a pas d'ensemble U (*cf.* 1.3.). Il en est de même pour le schéma de la figure 3 : l'application $\alpha = I \times T$ n'est pas définie (*cf.* 1.2.).

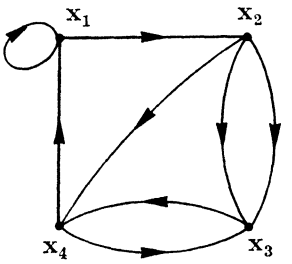


Fig. 2

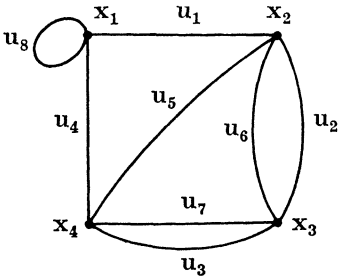


Fig. 3

1.2. Graphes non orientés avec étiquettes (1er plan d'abstraction)

Dans la famille $\mathscr{G} = (G_i = (X, U, I_i, T_i))$ considérons la relation d'équivalence (la démonstration est laissée au lecteur) $\mathscr{R}_1$ telle que :

$$G_h \mathscr{R}_1 G_j \quad \text{ssi} \quad (\forall\, u)\ ((I_h(u), T_h(u)) = (I_j(u), T_j(u)) \quad \text{ou} \quad (I_h(u), T_h(u)) = (T_j(u), I_j(u))),$$

ou, ce qui revient au même : $\alpha^\circ_h = \alpha^\circ_j$, où α° est l'application associée à α telle que :

$$U \ni u \to \alpha^\circ(u) = \{ I(u), T(u) \} \in \mathscr{P}_2 (X)$$

(l'ensemble des parties de X à deux éléments).

Intuitivement, on pourrait dire : $G_h \mathscr{R}_1 G_j$ ssi G_j est déduit de G_h uniquement par réorientation de quelques (ou de toutes ou d'aucune) arêtes.

Les éléments (classes d'équivalence) de la famille quotient $\mathscr{G}/\mathscr{R}_1$ sont appelés des graphes non orientés avec étiquettes. Mais, il faut bien faire attention : un graphe non orienté n'est pas un graphe particulier, ni une sorte de graphe, mais une classe d'équivalence suivant la relation $\mathscr{R}_1$.

Exemple

Les graphes des figures 1 et 4 ($G_1 = (X, U, I_1, T_1)$ et $G_2 = (X, U, I_2, T_2)$ respectivement) sont $\mathscr{R}_1$-équivalents, comme on peut le vérifier à partir du tableau ci-après :

u	$I_1(u)$	$T_1(u)$	$\alpha^\circ_1(u)$	$I_2(u)$	$T_2(u)$	$\alpha^\circ_2(u)$
u_1	x_1	x_2	$\{ x_1, x_2 \}$	x_2	x_1	$\{ x_1, x_2 \}$
u_2	x_2	x_3	$\{ x_2, x_3 \}$	x_2	x_3	$\{ x_2, x_3 \}$
u_3	x_4	x_3	$\{ x_3, x_4 \}$	x_3	x_4	$\{ x_3, x_4 \}$
u_4	x_4	x_1	$\{ x_1, x_4 \}$	x_4	x_1	$\{ x_1, x_4 \}$
u_5	x_2	x_4	$\{ x_2, x_4 \}$	x_2	x_4	$\{ x_2, x_4 \}$
u_6	x_2	x_3	$\{ x_2, x_3 \}$	x_3	x_2	$\{ x_2, x_3 \}$
u_7	x_3	x_4	$\{ x_3, x_4 \}$	x_3	x_4	$\{ x_3, x_4 \}$
u_8	x_1	x_1	$\{ x_1, x_1 \}$	x_1	x_1	$\{ x_1, x_1 \}$

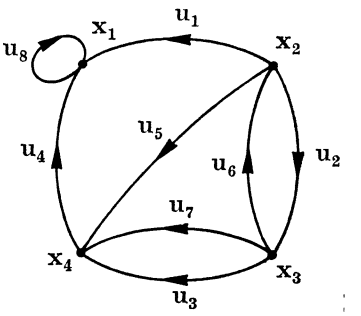


Fig. 4

Il est clair que la représentation d'une classe suivant $\mathscr{R}_1$ se fait de la façon suivante :

$$x \overset{u}{\text{———}} y \qquad \text{ssi } \{ x, y \} = \{ I(u), T(u) \}.$$

Le schéma de la figure 3 représente donc la classe d'équivalence suivant $\mathscr{R}_1$ de G_1 ou de G_2 (fig. 1 et 4 respectivement). Orienter un graphe non orienté veut dire : trouver un élément de la classe correspondante. Un graphe non orienté est complètement déterminé par le triplet : $G^\circ = (X, U, \alpha^\circ)$.

1.3. Graphes non orientés sans étiquette (2e plan d'abstraction)

Notons $\mathscr{B}(A)$ l'ensemble des bijections de A sur A, appelées aussi des permutations lorsque A est fini (c'est le cas ici et dans tout ce qui suit).

Dans la famille quotient $\mathscr{G}/\mathscr{R}_1 = (G^\circ_i = (X, U, \alpha^\circ_i))$ considérons la relation d'équivalence (la démonstration est laissée au lecteur) $\mathscr{R}_2$ telle que :

$$G^\circ_h \mathscr{R}_2 G^\circ_j \quad \text{ssi} \quad (\exists\, f_X)\ (\exists\, f_U)\ (f_X \in \mathscr{B}(X) \quad \text{et} \quad f_U \in \mathscr{B}(U) \quad \Rightarrow \quad \alpha^\circ_j = f_X{}^* \circ \alpha^\circ_h \circ f_U).$$

Lorsque f_X (resp. f_U) est l'application identique, notée 1_X (resp. 1_U) de X (resp. U), alors on dit que les graphes non orientés G°_h et G°_j sont $\mathscr{R}_U$-équivalents (resp. $\mathscr{R}_X$-équivalents), *i.e.*,

$$G^\circ_h \mathscr{R}_U G^\circ_j \quad \text{ssi} \quad \alpha^\circ_j = \alpha^\circ_h \circ f_U\,; \quad G_h \mathscr{R}_X G^\circ_j \quad \text{ssi} \quad \alpha^\circ_j = f_{X*} \circ \alpha^\circ_h.$$

Exemple

Les graphes non orientés des figures 3 et 5 ($G_1^\circ = (X, U, \alpha_1^\circ)$ et $G_2^\circ = (X, U, \alpha_2^\circ)$ respectivement) sont $\mathscr{R}_2$-équivalents car :

$$f_U = \begin{pmatrix} u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\ u_8 \\ u_6\ u_1\ u_2\ u_7\ u_3\ u_4\ u_8\ u_5 \end{pmatrix} \qquad f_X = \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ x_4 \\ x_4\ x_1\ x_3\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vérification de : $\alpha_2^\circ = f_{X*} \circ \alpha_1^\circ \circ f_U$ par le tableau ci-après :

u	$\alpha_2^\circ(u)$	$f_U(u)$	$\alpha_1^\circ(f_U(u))$	$f_{X*}(\alpha_1^\circ(f_U(u)))$
u_1	$\{x_1, x_3\}$	u_6	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$
u_2	$\{x_1, x_4\}$	u_1	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_4, x_1\}$
u_3	$\{x_1, x_3\}$	u_2	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$
u_4	$\{x_2, x_3\}$	u_7	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_3, x_2\}$
u_5	$\{x_2, x_3\}$	u_3	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_3, x_2\}$
u_6	$\{x_2, x_4\}$	u_1	$\{x_1, x_4\}$	$\{x_4, x_2\}$
u_7	$\{x_4, x_4\}$	u_8	$\{x_1, x_1\}$	$\{x_4, x_4\}$
u_8	$\{x_1, x_2\}$	u_5	$\{x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_2\}$

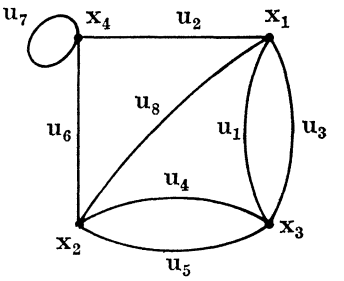


Fig. 5

Les éléments (classes d'équivalence) de la famille quotient $(\mathscr{G}/\mathscr{R}_1)/\mathscr{R}_2$ (resp. $(\mathscr{G}/\mathscr{R}_1)/\mathscr{R}_U$) (resp. $(\mathscr{G} / \mathscr{R}_1) / \mathscr{R}_X$) sont appelés des graphes non orientés sans étiquette (resp. sans étiquette aux arêtes) (resp. sans étiquette aux sommets), et ils sont notés : $G^{\circ\circ}$ (resp. $G_U^{\circ\circ}$). (resp. $G_X^{\circ\circ}$). C'est ainsi que le schéma de la figure 6 représente la classe suivant $\mathscr{R}_2$ de G_1° ou G_2°. Une classe suivant $\mathscr{R}_2$ (resp. $\mathscr{R}_U$) (resp. $\mathscr{R}_X$) n'est pas définissable en tant que telle, mais seulement par un de ses représentants. On a fait abstraction de tout (resp. de tout sauf la position des sommets) (de tout sauf la position des arêtes) c'est la géométrie qui reste dans le premier cas (graphes planaires ou non planaires).

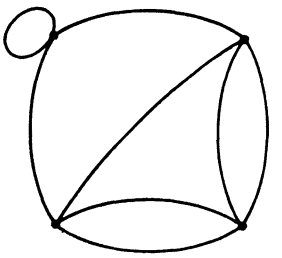


Fig. 6

On laisse au lecteur le soin de donner la définition d'un graphe (orienté) sans étiquette (resp. sans étiquette aux arêtes) (resp. sans étiquette aux sommets). Dans tous les cas, il s'agira des classes de graphes.

1.4. Classes de graphes par rapport aux 1-graphes sans étiquette aux arêtes

Dans la famille $\mathscr{G}' = (G_i = (X, U_i, I_i, T_i))$ considérons la relation d'équivalence (la démonstration est laissée au lecteur) $\mathscr{R}_1'$ telle que :

$$G_h \mathscr{R}_1' G_j \quad \text{ssi} \quad T_{h*} \circ I_h^* = T_{j*} \circ I_j^* \ (= \Gamma)$$

ou ce qui revient au même :

$$\mathrm{Im}\alpha_h = \mathrm{Im}\alpha_j \ (= V \subset X \times X).$$

Les éléments (classes d'équivalence) de la famille quotient $\mathscr{G}' / \mathscr{R}_1'$ sont appelés des 1-graphes (orientés) sans étiquette aux arêtes.

Exemple

Les graphes des figures 7 et 8 ($G_1 = (X, U_1, I_1, T_1)$ et $G_2 = (X, U_2, I_2, T_2)$ respectivement) sont $\mathscr{R}_1'$-équivalents comme on peut le vérifier à partir du tableau ci-après :

$\{x\}$	$I_1^*(\{x\})$	$T_{1*}(I_1^*(\{x\}))$	$I_2^*(\{x\})$	$T_{2*}(I_2^*(\{x\}))$
$\{x_1\}$	$\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{v_1, v_2, v_6\}$	$\{x_2, x_3\}$
$\{x_2\}$	$\{u_6\}$	$\{x_3\}$	$\{v_3, v_4\}$	$\{x_3\}$
$\{x_3\}$	$\{u_4\}$	$\{x_1\}$	$\{v_5\}$	$\{x_1\}$

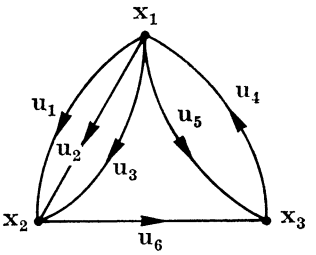


Fig. 7

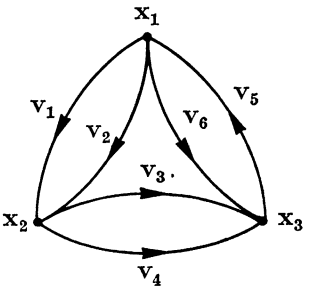


Fig. 8

Leur classe suivant $\mathscr{R}_1'$ est représentée par le schéma de la figure 9, qui est un 1-graphe sans étiquette aux arêtes. Une telle classe est définissable soit par le couple (X, Γ), où Γ est une application de $P(X)$ dans $P(X)$ telle que :

$$\Gamma(X_i \cup X_j) = \Gamma(X_i) \cup \Gamma(X_j)$$

(pour deux sous-ensembles quelconques de X), soit par le couple (X, V), où V est un sous-ensemble de $X \times X$. Le passage d'une définition à l'autre se fait par :

$$y \in \Gamma(\{x\}) \Leftrightarrow (x, y) \in V.$$

Dans le cas d'un 1-graphe, il existe une bijection entre les ensembles $\mathscr{A}$ (les arcs de G) et $V = \mathrm{Im}\alpha$:

$$\mathscr{A} \ni (u, \alpha(u)) \to \alpha(u) = (I(u), T(u)) \in V = \mathrm{Im}\alpha$$

et

$$V = \mathrm{Im}\alpha \ni (x, y) \to (\alpha^{-1}((x, y)), (x, y)) \in \mathscr{A},$$

car α est une bijection de U sur $\mathrm{Im}\alpha$. Par conséquent, α^{-1} est l'application inverse de $\alpha : U \to \mathrm{Im}\alpha$ Dans ce cas, à cause de cette bijection, on dit par abus de langage : V est l'ensemble des arcs de G.

1.5. Les 1-graphes non orientés sans étiquette aux arêtes

Dans la famille $\mathscr{G}' = (G_i = (X, U_i, I_i, T_i))$ considérons la relation d'équivalence (la démonstration est laissée au lecteur) $\mathscr{R}_2'$ telle que : $G_h \mathscr{R}_2' G_j$ ssi $\mathrm{Im}\alpha_h^\circ = \mathrm{Im}\alpha_j^\circ$. Les éléments (classes d'équivalence) de la famille quotient $\mathscr{G}'/\mathscr{R}_2'$ sont appelés des 1-graphes non orientés sans étiquette aux arêtes.

Les graphes des figures 7 et 8 sont $\mathscr{R}_2'$-équivalents. Leur classe est représentée par le schéma de la figure 10. Il en est de même pour les graphes des figures 1 et 4, leur classe suivant $\mathscr{R}_2'$ est représentée par le schéma de la figure 11.

Le lecteur pourra donner la définition d'un 1-graphe non orienté sans étiquette. Il s'agira d'une classe de graphes. C'est justement dans ce quotient que nous examinons les propriétés des graphes

planaires ou non planaires. On ne s'intéresse pas au nombre d'arêtes ayant mêmes extrémités, ni à leurs noms, ni aux noms des sommets. C'est la « géométrie » qui nous intéresse.

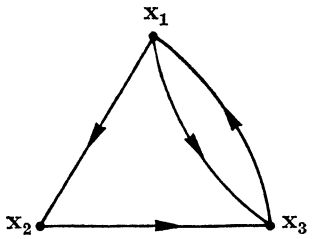


Fig. 9

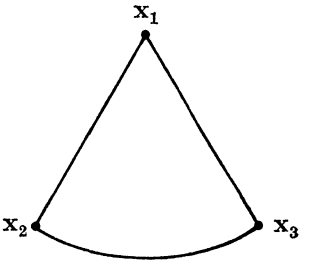


Fig. 10

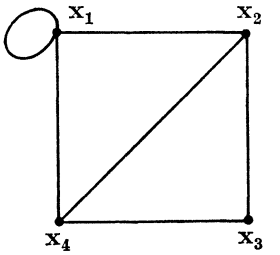


Fig. 11

1.6. Graphes valués

Un graphe valué est le quintuplet (X, U, I, T, val), où val est une application de U dans **Z** (ou **R**). On pose : val $(u_i) = v_i \in \mathbf{R}$.

2. L'APPLICATION BORD BOOLÉEN

L'application bord booléen [1], notée δ, est définie par le diagramme :

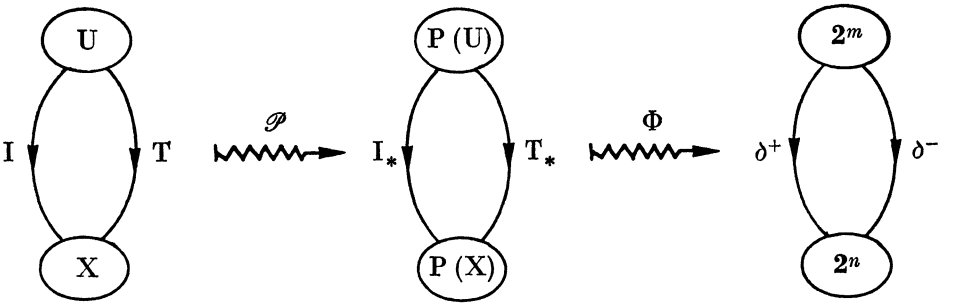


Fig. 12

et par : $\delta = \delta^+ \dotplus \delta^-$. On remarque que : $\Phi_m(I_* \cup T_*) = \Phi_m(I_*) \dotplus \Phi_m(T_*) = \delta^+ \dotplus \delta^- = \delta$.

On note : $\mathbf{M}^+ = (m_{ij}^+)$ (resp. $\mathbf{M} = (m_{ij}^-)$) la matrice associée à δ^+ (*i.e.*, $\mathbf{M}^+ = W_m(\delta^+)$) (resp. δ^- (*i.e.*, $\mathbf{M}^- = W_m(\delta^-)$)) dont la i-ème colonne est le vecteur colonne $\delta^+(\mathbf{u}_i^\circ)$ (resp. $\delta^-(\mathbf{u}_i^\circ)$). On note **M** la matrice associée à δ. On a : $\mathbf{M} = \mathbf{M}^+ \dotplus \mathbf{M}^-$,

$$m_{ij}^+ = 1 \text{ ssi } I(u_j) = x_i \text{ (construction de } \mathbf{M}^+)$$
$$m_{ij}^- = 1 \text{ ssi } T(u_j) = x_i \text{ (construction de } \mathbf{M}^-)$$
$$m_{ij} = 1 \text{ ssi } I(u_j) = x_i \text{ ou } T(u_j) = x_i \text{ (construction de } \mathbf{M}).$$

La matrice **M** est appelée la matrice booléenne d'incidence « arêtes-sommets » de G.

L'application δ permet la « réalisation de calculs » dans la famille quotient $\mathscr{G} / \mathscr{R}_1$ (graphes non orientés avec étiquettes). Donnons quelques exemples.

1. Il ne faut pas la confondre avec l'application bord, notée aussi δ, de l'homologie : 2^m et 2^n sont alors munis d'une structure de 2-module (*cf.* [12], [18], [6], [7]).

2.1. Les couvertures d'un graphe

Problème

Placer des gardiens sur quelques arêtes de G afin de surveiller tous ses sommets (la surveillance ne tient pas compte de l'orientation).

Soit U′ un sous-ensemble de U sur lequel on peut placer des gardiens dans le but de surveiller tous les sommets. U′ doit vérifier : $I_*(U') \cup T_*(U') = X$ soit : $(I_* \cup T_*)(U') = X$.

On a :
$$h_X((I_* \cup T_*)(U')) = h_X(X) = \mathbf{1} \in \mathbf{2}^n.$$

Or :
$$h_X((I_* \cup T_*)(U')) = h_X((I_* \cup T_*)(h_U^{-1}(\mathbf{u})) = (h_X \circ (I_* \cup T_*) \circ h_U^{-1})(\mathbf{u}) =$$
$$(\Phi_m(I_* \cup T_*))(\mathbf{u}) = (\Phi_m(I_*) \dotplus \Phi_m(T_*))(\mathbf{u}) = (\delta^+ \dotplus \delta^-)(\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u}) = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{u}\,.$$

Par conséquent, les solutions du système : $\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{1}$ sont aussi les solutions du problème proposé.

On appelle couverture de G tout sous-ensemble U′ de U qui vérifie : $(I_* \cup T_*)(U') = X$.

Dans tout ce qui suit, nous raisonnerons indifféremment, à cause de l'isomorphisme, dans P(U) ou dans $\mathbf{2}^m$. Il en est de même pour P (X) et $\mathbf{2}^n$.

On note $\delta^*(\{\mathbf{1}\})$ ou tout simplement $\delta^*(\mathbf{1})$ l'ensemble des couvertures de G. Le système $< \delta^*(\mathbf{1}), \dotplus, \mathbf{1} >$ est un sous-sup-demi-treillis de $< \mathbf{2}^m, \dotplus, \mathbf{1} >$ puisque la somme booléenne de deux couvertures en est une. Son élément maximum est :

$$\mathbf{1} \in \mathbf{2}^m, \text{ puisque } \delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Dans un sup-demi treillis, il est intéressant de trouver les éléments minimaux (bien entendu dans le cas où la relation d'ordre n'est pas totale) (une couverture est minimale ssi il n'existe aucune autre qui la minore). Pour cela, il suffit de résoudre le système $\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{1}$ par le procédé de l'Ann. 6.

Considérons dans $\mathbf{2}^m$ la relation d'équivalence $\sim$ telle que :

$$\mathbf{u}_i \sim \mathbf{u}_j \text{ ssi } n_2(\mathbf{u}_i) = n_2(\mathbf{u}_j) \quad (n_2(\mathbf{u}) = u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \text{ somme arithmétique}).$$

Cela revient à dire : $U_i \sim U_j$ ssi **card** U_i = **card** U_j. On construit l'ensemble quotient $\delta^*(\mathbf{1}) / \sim$ qui est totalement ordonné par l'ordre naturel. Il est, donc, parfois plus intéressant de chercher la classe minimum de $< \delta^*(\mathbf{1}) / \sim, \leqslant >$ (*i.e.*, les couvertures qui ont le plus petit nombre d'éléments).

Pour cela, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{1} & \text{(Ann. 5)} \quad (1). \\ n_2(\mathbf{u}) \text{ à minimiser} & \text{(Ann. 11)} \quad (2). \end{cases}$$

On trouve une solution paramétrique de (1) : $(u_i = f_i(\mathbf{p}),\ \mathbf{p} \in \mathbf{2}^k)$ et l'on substitue chaque u_i dans (2) par son expression paramétrique.

Le lecteur pourra formuler et résoudre très aisément plusieurs problèmes de ce type. Donnons encore deux exemples.

2.2. Placer des gardiens sur quelques arêtes U′ de U afin de surveiller un sous-ensemble A donné de sommets de G.

Résoudre : $\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u} \geqslant \mathbf{a}$, où $\mathbf{a} = h_X(A) \in \mathbf{2}^n$. Soit : $\overline{(\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u})} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

On peut recommencer : les éléments minimaux du sup-demi treillis $\delta^*(\mathbf{a})$; l'élément minimum du treillis $\delta^*(\mathbf{a}) / \sim$.

2.3. Placer des gardiens sur quelques arêtes U′ de U afin de surveiller uniquement un sous-ensemble A donné de sommets de G.

Résoudre : $\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u} = \mathbf{a} \Leftrightarrow (\mathbf{M} \,.\, \mathbf{u}) \oplus \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

2.4. Dans un graphe valué

Dans tout ce qui suit, on laisse au lecteur le soin de formuler un problème de minimisation dans un graphe valué (les solutions les plus économiques). Il suffit d'y ajouter : $v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \ldots + v_m \cdot u_m$ à minimiser.

D'autres méthodes concernant la recherche des couvertures sont données dans [3] et [14].

3. L'APPLICATION COBORD BOOLÉEN

L'application cobord booléen, notée δ, est définie par le diagramme :

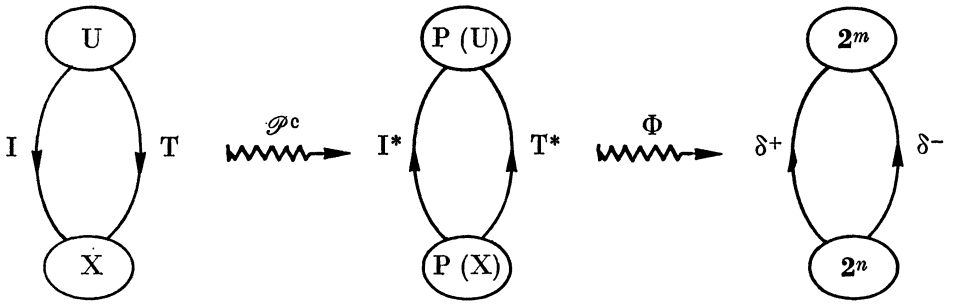


Fig. 13

et par : $\delta = \delta^+ \dotplus \delta^-$. On remarque que : $\Phi_m(I^* \cup T^*) = \Phi_m(I^*) \dotplus \Phi_m(T^*) = \delta^+ \dotplus \delta^- = \delta$.

On note $\mathbf{M}^{+t} = (m_{ij}^{+t})$ (resp. $\mathbf{M}^{-t} = (m_{ij}^{-t})$) la matrice associée à δ^+ (*i.e.*, $\mathbf{M}^{+t} = W_m(\delta^+)$) (resp. δ^- (*i.e.*, $\mathbf{M}^{-t} = W_m(\delta^-)$)) dont la i-ème colonne est le vecteur-colonne $\delta^+(\mathbf{x}_i^\circ)$ (resp. $\delta^-(\mathbf{x}_i^\circ)$). On note $\mathbf{M}^t$ la matrice associée à δ. On a : $\mathbf{M}^t = \mathbf{M}^{+t} \dotplus \mathbf{M}^{-t}$,

$m_{ij}^{+t} = 1$ ssi $I(u_i) = x_j \Leftrightarrow m_{ji}^{+} = 1$. Par conséquent, $\mathbf{M}^{+t}$ est la transposée de $\mathbf{M}^+$.
$m_{ij}^{-t} = 1$ ssi $T(u_i) = x_j \Leftrightarrow m_{ji}^{-} = 1$. Par conséquent, $\mathbf{M}^{-t}$ est la transposée de $\mathbf{M}^-$.

On a : $\mathbf{M}^t = (\mathbf{M}^+ \dotplus \mathbf{M}^-)^t$. $\mathbf{M}^t$ est la transposée de $\mathbf{M}$ (construction de $\mathbf{M}^t$). La matrice $\mathbf{M}^t$ est appelée la matrice booléenne d'incidence « sommets-arêtes » de G.

L'application δ permet la « réalisation de calculs » dans la famille quotient $\mathscr{G} / \mathscr{R}_1$. Donnons quelques exemples.

3.1. Les supports d'un graphe

Problème
Placer des gardiens sur quelques sommets X′ de G afin de surveiller toutes ses arêtes (la surveillance ne tient pas compte de l'orientation).

X′ doit vérifier : $I^*(X') \cup T^*(X') = U$ soit $(I^* \cup T^*)(X') = U$.

On a : $$h_U((I^* \cup T^*)(X')) = h_U(U) = \mathbf{1} \in \mathbf{2}^m.$$

Or : $$h_U((I^* \cup T^*)(X')) = h_U((I^* \cup T^*)(h_X^{-1}(x))) = (h_U \circ (I^* \cup T^*) \circ h_X^{-1})(x) =$$
$$(\Phi_m(I^* \cup T^*))(x) = (\Phi_m(I^*) \dotplus \Phi_m(T^*))(x) = (\delta^+ \dotplus \delta^-)(x) = \delta(x) = \mathbf{M}^t \cdot x.$$

Par conséquent, les solutions du système : $\mathbf{M}^t \cdot x = \mathbf{1}$ sont aussi les solutions du problème proposé.

On appelle support de G tout sous-ensemble X′ de X qui vérifie : $(I^* \cup T^*)(X') = U$.

On note $\delta^*(\mathbf{1})$ l'ensemble des supports de G. Le système $< \delta^*(\mathbf{1}), \dot{+}, \mathbf{1} >$ est un sous-sup-demi treillis de $< \mathbf{2}^n, \dot{+}, \mathbf{1} >$ puisque la somme booléenne de deux supports en est un, et $\delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Pour trouver les supports minimaux, il suffit de résoudre le système : $\mathbf{M}^t . \mathbf{x} = \mathbf{1}$ par le procédé de l'Ann. 6.

Pour trouver la classe minimum de $< \delta^*(\mathbf{1})/\sim, \leqslant >$ (*i.e.*, les supports qui ont le plus petit nombre d'éléments), il suffit de résoudre le système :

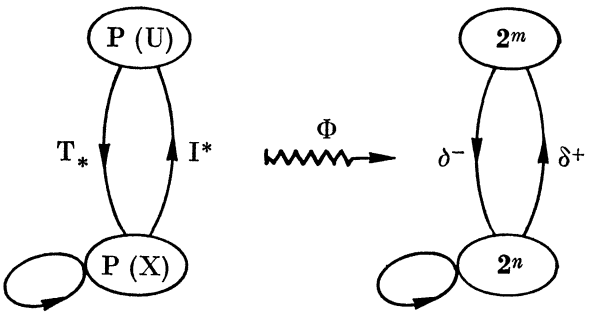
$$\begin{cases} \mathbf{M}^t . \mathbf{x} = \mathbf{1} & \text{(Ann. 5)} \\ n_2(\mathbf{x}) \text{ à minimiser} & \text{(Ann. 11).} \end{cases}$$

Le lecteur pourra formuler d'autres problèmes analogues (*cf.* 2.2, 2.3).

Une autre méthode figure dans [14].

4. L'APPLICATION γ

Elle est définie par le diagramme :



$\Gamma = T_* \circ I^*$ $\qquad$ $\gamma = \delta^- \circ \delta^+$

Fig. 14

On a :

$$W_m(\delta^- \circ \delta^+) = W_m(\delta^-) . W_m(\delta^+) = \mathbf{M}^- . \mathbf{M}^{+t} = \mathbf{A}.$$ On remarque que :

$a_{ij} = 1$ ssi $x_i \in \Gamma(\{x_j\})$. La matrice A est appelée la matrice booléenne d'incidence « sommets-sommets » de G, et plus précisément la matrice des suivants.

L'application γ permet la « réalisation de calculs » dans la famille quotient $\mathscr{G}'/\mathscr{R}'_1$ (1-graphes (orientés) sans étiquette aux arêtes).

Donnons quelques exemples.

4.1. Les ensembles intérieurement stables

Un sous-ensemble X′ de X est dit intérieurement stable (en abr. eis) ssi $\Gamma(X') \cap X' = \varnothing$.

On a :

$$h_X(\Gamma(X') \cap X') = h_X(\varnothing) = \mathbf{0} \in \mathbf{2}^n.$$

Or :

$$h_X(\Gamma(X') \cap X') = h_X(\Gamma(X')) \otimes h_X(X') = h_X(\Gamma(h_X^{-1}(\mathbf{x}))) \otimes \mathbf{x} = (h_X \circ \Gamma \circ h_X^{-1})(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} =$$

$$(\Phi_m(\Gamma))(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}.$$

Par conséquent, les solutions du système booléen :

$$(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

nous donnent tous les eis de G.

On note $\mathscr{S}$ la famille des eis. $\mathscr{S}$ est un sous-inf-demi treillis (muni de l'ordre induit) de $\mathbf{2}^n$ (muni du même ordre). Pour trouver les éléments maximaux de $\mathscr{S}$, il suffit de résoudre le système ci-dessus par le procédé de l'Ann. 8.

Pour trouver la classe maximum de $< \mathscr{S}/\sim, \leqslant >$, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0} & \text{(Ann. 5)} \\ n_2(\mathbf{x}) \text{ à maximiser} & \text{(Ann. 11).} \end{cases}$$

Ce sont les eis qui contiennent le plus grand nombre d'éléments.

Envisageons le problème suivant : placer des gardiens sur quelques sommets X′ de G afin que deux gardiens quelconques ne puissent pas se surveiller.

Il est évident qu'un eis constitue une solution de ce problème, il en est de même des solutions du système : $\mathbf{M}^t \,.\, \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$.

En effet, aucun couple de gardiens ne se trouve sur les deux extrémités d'une arête u_i car sinon la i-ème équation du système ci-dessus n'admettrait pas de solution. On vient de montrer que le complément d'un support est un ensemble intérieurement stable. Ceci, nous permet notamment de constater que le problème de la recherche de tous les eis est un problème concernant la famille quotient $\mathscr{G}'/\mathscr{R}'_2$ (*cf.* 1.6 : les 1-graphes non orientés sans étiquette aux arêtes). Le problème se simplifie donc considérablement : il suffit de travailler sur un représentant convenable de la classe : graphe sans circuit ; sa matrice A sera alors une matrice triangulaire supérieure ou inférieure.

Ces considérations nous permettent notamment d'envisager une autre méthode pour la recherche de tous les supports de G : résoudre le système : $(\mathbf{A} \,.\, \bar{\mathbf{x}}) \otimes \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. (*Cf.* aussi [3] et [17].)

Le lecteur pourra formuler et résoudre d'autres problèmes, analogues à celui-ci, donnons, cependant, encore quelques exemples.

4.2 Les gardiens qui surveillent tous les sommets (dans le sens de l'orientation).

Résoudre : $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{1}$.

4.3. Les gardiens qui se surveillent (dans le sens de l'orientation).

Résoudre : $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{x}$.

4.4. Les gardiens qui se surveillent sans pouvoir surveiller un sommet sans gardien (dans le sens de l'orientation).

Résoudre : $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

4.5. Les cliques d'un graphe symétrique

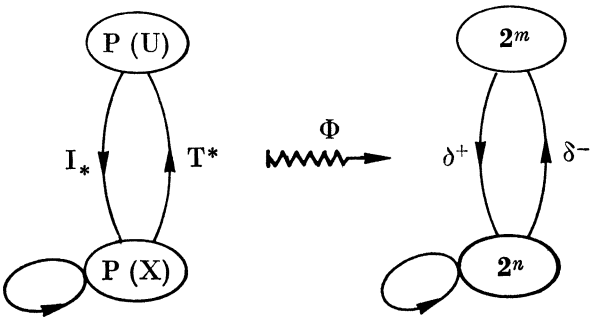
Une clique d'un graphe symétrique G est un sous-ensemble X′ de X tel que : X′ est l'ensemble de sommets d'un sous-graphe complet de G.

On suppose que G a partout des boucles, car sinon il est absurde de parler d'un sous-graphe complet.

On peut montrer qu'une clique dans G est un eis dans $\overline{G}$ (graphe complément de G). Par conséquent, les solutions du système : $(\overline{\mathbf{A}} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0}$ nous donnent toutes les cliques de G.

5. L'APPLICATION γ'

Elle est définie par le diagramme :



$\Gamma' = \mathbf{I}_* \circ \mathbf{T}^*$ $\qquad$ $\gamma' = \delta^+ \circ \delta^-$

Fig. 15

On a :

$$\mathbf{W}_m(\gamma') = \mathbf{W}_m(\delta^+ \circ \delta^-) = \mathbf{W}_m(\delta^+) \,.\, \mathbf{W}_m(\delta^-) = \mathbf{M}^+ \,.\, \mathbf{M}^{-t} = \mathbf{A}'.$$

Or :

$$\mathbf{A}'^t = (\mathbf{M}^+ \,.\, \mathbf{M}^{-t})^t = \mathbf{M}^- \,.\, \mathbf{M}^{+t} = \mathbf{A}.$$

Par conséquent, $\mathbf{A}'$ est la transposée de $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^t$, qui est aussi une matrice d'incidence « sommets-sommets », appelée notamment « la matrice des précédents ».

5.1. Les ensembles extérieurement stables

Un sous-ensemble X′ de X est dit extérieurement stable (en abr. ees) ssi tout sommet hors de X′ a un suivant dans X′. Cet énoncé est équivalent à :

Un sous-ensemble X′ de X est dit ees ssi un sommet quelconque $\mathbf{x}_i$ appartient soit à X′ soit à l'ensemble des précédents de X′, $\Gamma'(X')$. Par conséquent, X′ est un ees ssi $\Gamma'(X') \cup X' = X$.

On a :

$$\mathbf{h}_X(\Gamma'(X') \cup X') = \mathbf{h}_X(X) = \mathbf{1} \in \mathbf{2}^n.$$

Or :

$$\mathbf{h}_X(\Gamma'(X') \cup X') = \mathbf{h}_X(\Gamma'(X')) \dotplus \mathbf{h}_X(X') = (\mathbf{h}_X \circ \Gamma' \circ \mathbf{h}_X^{-1})(\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} = (\Phi_m(\Gamma'))(\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} =$$

$$\gamma'(\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}) \dotplus (\mathbf{D} \,.\, \mathbf{x}) = (\mathbf{A}^t \dotplus \mathbf{D}) \,.\, \mathbf{x}.$$

Par conséquent, les solutions du système :

$$(\mathbf{A}^t \dotplus \mathbf{D}) \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{1}$$

nous donnent tous les ees.

On note $\mathscr{T}$ la famille des ees. Le système $< \mathscr{T}, \dot{+}, \mathbf{1} >$ est un sous-sup-semi treillis de $< \mathbf{2}^n, \dot{+}, \mathbf{1} >$. Les annexes 6 et 8 nous indiquent comment il faut procéder pour trouver les éléments minimaux du demi-treillis ainsi que la classe minimum de $< \mathscr{T}/\sim, \leqslant >$ (*cf.* aussi [3] et [17]).

5.2. Les noyaux

Les noyaux de G sont les éléments de $\mathscr{S} \cap \mathscr{T}$. Par conséquent, le système :

$$(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{A}^t \dot{+} \mathbf{D}) \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{1}$$

nous donne tous les noyaux de G.

On a : $(\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $(\mathbf{A}^t \dot{+} \mathbf{D}) \,.\, \mathbf{x} = \mathbf{1} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $(\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}) \dot{+} (\mathbf{D} \,.\, \mathbf{x}) = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x} \leqslant \underline{\mathbf{x}}$

et $(\overline{\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}}) \dot{+} \mathbf{x} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x} \leqslant \bar{\mathbf{x}}$ et $(\overline{\mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x}}) \otimes \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x} \leqslant \bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{x}} \leqslant \mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{A}^t \,.\, \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$.

Par conséquent, les solutions de ce dernier système nous donnent tous les noyaux de G.

6. LES APPLICATIONS γ^k ET γ'^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

On pose :

$\Gamma^0 = 1_{P(X)}$; $\gamma^0 = 1_{2n}$; $W_m(\gamma^0) = \mathbf{D}$ (matrice diagonale) ;

$\Gamma^1 = \Gamma$; $\gamma^1 = \gamma$; $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ (la matrice des suivants ou des descendants d'ordre 1) ;

$\Gamma^2 = \Gamma \circ \Gamma$; $\Phi_m(\Gamma^2) = \Phi_m(\Gamma \circ \Gamma) = \Phi_m(\Gamma) \circ \Phi_m(\Gamma) = \gamma \circ \gamma = \gamma^2$; $W_m(\gamma^2) = W_m(\gamma)^2 = \mathbf{A}^2$ (la matrice des descendants d'ordre 2) ;

$\Gamma^k = \Gamma^{k-1} \circ \Gamma$; $\Phi_m(\Gamma^k) = \Phi_m(\Gamma^{k-1}) \circ \Phi_m(\Gamma) = \gamma^{k-1} \circ \gamma = \gamma^k$; $W_m(\gamma^k) = \mathbf{A}^k$ (la matrice des descendants d'ordre k).

$\mu(\Gamma) = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \ldots \cup \Gamma^k \cup \ldots$ (la fermeture transitive de Γ) ;

$\Phi_m(\mu(\Gamma)) = \mu(\Phi_m(\Gamma)) = \mu(\gamma)$ (la fermeture transitive de γ) ;

$W_m(\mu(\gamma)) = \mu(W_m(\gamma)) = \mu(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^1 \dot{+} \mathbf{A}^2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{A}^k \dot{+} \ldots$ (la fermeture transitive de A ou la matrice des descendants) (*cf.* [9] : les familles de Moore).

Le lecteur pourra former les applications γ'^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), et trouver leurs matrices correspondantes. On a par exemple : $W_m(\gamma'^k) = \mathbf{A}'^k = (\mathbf{A}^k)^t = (\mathbf{A}^t)^k$ (la matrice des ascendants d'ordre k).

6.1. Les bases et les anti-bases

Un sous-ensemble X′ de X est une base (resp. anti-base) d'un graphe G ssi il possède les propriétés (*i*) et (*ii*) (resp. (*i*) et (*iii*)) :

(*i*). deux sommets quelconques de X′ ne sont jamais reliés par un chemin.

(*ii*). tout sommet hors de X′ possède au moins un descendant dans X′.

(*iii*). tout sommet hors de X′ possède au moins un ascendant dans X′.

Il est très facile de vérifier qu'une base (resp. anti-base) dans G est un noyau dans le graphe $\mu(G)$ (resp. $\mu(G)^t$) sans boucles. Par conséquent, les solutions du système (1) (resp. (2)) nous donnent toutes les bases (resp. les anti-bases) de G.

(1) $(\mu(\mathbf{A}^t) \otimes \overline{\mathbf{D}}) \,.\, \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ (annulation de la diagonale de $\mu(\mathbf{A}^t)$),

(2) $(\mu(\mathbf{A}) \otimes \overline{\mathbf{D}}) \,.\, \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ (annulation de la diagonale de $\mu(\mathbf{A})$).

On remarque qu'une base dans G est une anti-base dans G^t.

7. LE GRAPHE AUX ARÊTES

Dans la famille $\mathscr{G}'' = (G_i = (X_i, U, I_i, T_i))$ considérons la relation d'équivalence (la démonstration est laissée au lecteur) $\mathscr{R}''_2$ telle que :

$$G_h \mathscr{R}_2 G_j \quad \text{ssi} \quad (I^*_h \cup T^*_h) \circ (I_{h*} \cup T_{h*}) = (I^*_j \cup T^*_j) \circ (I_{j*} \cup T_{j*}) = \tilde{\Gamma}.$$

Les éléments (classes d'équivalence) de la famille quotient $\mathscr{G}''/\mathscr{R}''_2$ sont appelés des graphes aux arêtes. On a :

$$\Phi_m(\tilde{\Gamma}) = \Phi_m((I^* \cup T^*) \circ (I_* \cup T_*)) = \Phi_m(I^* \cup T^*) \circ \Phi_m(I_* \cup T_*)$$
$$= (\Phi_m(I^*) \dotplus \Phi_m(T^*)) \circ (\Phi_m(I_*) \dotplus \Phi_m(T_*)) = (\delta^+ \dotplus \delta^-) \circ (\delta^+ \dotplus \delta^-) = \tilde{\gamma},$$

et

$$W_m(\tilde{\gamma}) = (\mathbf{M}^{+t} \dotplus \mathbf{M}^{-t}) \,.\, (\mathbf{M}^+ \dotplus \mathbf{M}^-) = \mathbf{M}^{+t}.\mathbf{M}^+ \dotplus \mathbf{M}^{+t}.\mathbf{M}^- \dotplus \mathbf{M}^{-t}.\mathbf{M}^+ \dotplus \mathbf{M}^{-t}.\mathbf{M}^- = \mathbf{A}^+ \dotplus \mathbf{A}^0 \dotplus \mathbf{A}^{0t} \dotplus \mathbf{A}^- = \tilde{\mathbf{A}}.$$

On a : $a^+_{ij} = 1$ ssi $I(u_i) = I(u_j)$ (matrice symétrique)

$a^\circ_{ij} = 1$ ssi $T(u_j) = I(u_i)$

$a^{\circ t}_{ij} = 1$ ssi $I(u_j) = T(u_i) \Leftrightarrow a_{ji} = 1$ (d'où la notation)

$a^-_{ij} = 1$ ssi $T(u_i) = T(u_j)$ (matrice symétrique).

7.1. Les couplages

Un sous-ensemble U′ de U est un couplage dans G ssi :
$(\forall u_i)(\forall u_j)(i \neq j \Rightarrow \alpha^\circ(u_i) \cap \alpha^\circ(u_j) = \varnothing)$. Par conséquent, un couplage de G est un eis dans le graphe aux arêtes sans boucle $\tilde{G}$. Les solutions, donc, du système :

$$((\tilde{\mathbf{A}} \otimes \overline{\mathbf{D}}) \,.\, \mathbf{u}) \otimes \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

nous donnent tous les couplages de G.

Remarque : la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ est symétrique. Le problème de la recherche des eis dans un graphe est un problème concernant la famille quotient $\mathscr{G}'/\mathscr{R}'_2$ (les 1-graphes non orientés sans étiquette aux arêtes). Par conséquent, on peut travailler sur un représentant convenable de la classe (*i.e.*, un graphe sans circuit).

Le lecteur pourra formuler et résoudre des problèmes analogues avec les matrices $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{A}^0$ et $\mathbf{A}^-$.

Pour trouver les couplages maximaux, il suffit de résoudre le système ci-dessus selon le procédé de l'ann. 8. Alors que, pour trouver les couplages qui ont le plus grand nombre d'éléments (*i.e.*, $n/2$ arêtes), il suffit d'y ajouter : $n_2(\mathbf{u}) = n/2$. (*Cf.* aussi [3].)

8. L'ALGÈBRE DE BOOLE COMME MOYEN DE DÉMONSTRATION

8.1. Lemme

Soit G un graphe transitif et soit **A** sa matrice des suivants. Si au moins la i-ème ligne et la i-ème colonne contiennent partout des 1 (on s'intéresse aux éléments non diagonaux), alors G est complet symétrique (*i.e.*, $\mathbf{A} = \mathbf{E}$).

En effet : $a_{hi} = 1$ et $a_{ik} = 1 \Rightarrow$ (par transitivité) $a_{hk} = 1$.

8.2. Proposition (*cf.* aussi [22])

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*). Le graphe G est fortement connexe,

(*ii*). Dans G, il existe au moins un sommet x_i qui constitue à lui seul une base et une anti-base.

Montrons : (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*).

Le graphe étant fortement connexe (*i.e.*, $\mu(A) = E$), les bases et les anti-bases sont données par les solutions du système : $(E \otimes \overline{D}) . x = \overline{x}$, qui donne :

$$\begin{array}{lcl}
x_2 \dot{+} x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n = x_1 & \text{soit} & x_1x_2 \dot{+} x_1x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_1x_n \dot{+} (\bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = 0 \\
x_1 \dot{+} x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n = x_2 & \text{soit} & x_2x_1 \dot{+} x_2x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_2x_n \dot{+} (\bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_{n-1} = x_n & \text{soit} & x_nx_1 \dot{+} x_nx_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_nx_{n-1} \dot{+} (\bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = 0
\end{array}$$

Ce système est équivalent à l'équation booléenne :

$$x_1x_2 \dot{+} x_1x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_1x_{n-1} \dot{+} x_1x_n \dot{+} x_2x_3 \dot{+} \ldots \dot{+} x_2x_{n-1} \dot{+} x_2x_n \dot{+} \ldots \dot{+} x_3x_{n-1} \dot{+} x_3x_n \dot{+} \ldots \dot{+} x_{n-1}x_n \dot{+} \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n = 0$$

D'où :

1) On ne peut pas avoir $x_i = x_j = 1$, car alors l'expression ci-dessus prendrait la valeur 1,

2) On ne peut avoir $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ car alors l'expression ci-dessus prendrait la valeur 1 à cause du dernier monôme,

3) Exactement un x_i a la valeur 1, les autres étant nuls. Par conséquent les solutions de ce système sont les vecteurs de la base de $\mathbf{2}^n$.

Montrons : (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*).

Supposons que le sommet x_i constitue à lui-même une base et une anti-base. Cela veut dire que : $(\mu(A)^t \otimes \overline{D}) . x_i^\circ = \overline{x}_i^\circ$ et $(\mu(A) \otimes \overline{D}) . x_i^\circ = \overline{x}_i^\circ$. Ce système est équivalent à : (en posant $\mu(A) = (b_{ij})$ et $\mu(A)^t = (b_{ji})$ ($i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, n$) $b_{i1} = b_{i2} = \ldots = b_{in} = 1$ et $b_{1i} = b_{2i} = \ldots = b_{ni} = 1$, donc, d'après le lemme, $\mu(A) = E$, ce qui veut dire que le graphe est fortement connexe.

8.3. Théorème (König)

Tout graphe sans circuit admet une base unique constituée par l'ensemble des sommets n'ayant pas de suivant.

Exercice : Montrer ce théorème pour $n = 5$. On tiendra compte de deux lemmes :

(*i*) A tout graphe sans circuit correspond une matrice (de suivants) triangulaire inférieure.

En effet, ([24], th. VI-I) le graphe G étant sans circuit, il existe une numérotation de sommets, dans laquelle le numéro de chacun d'eux est inférieur à tous ceux de ses descendants d'ordre 1 ou 2 ou ..., et supérieur à tous ceux de ses ascendants d'ordre 1 ou 2 ou ...

(*ii*) La fermeture transitive d'une matrice triangulaire inférieure en est une.

En effet, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (ou supérieures) est fermé par rapport à la multiplication (composition) et l'addition booléennes usuelles.

ANNEXE

Ann. 1. Treillis de Boole (*cf.* [1], [2], [4], [5], [9])

Soit $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. On munit $\mathbf{2}$ de deux opérations binaires notées $\dot{+}$, . et d'une opération unaire notée $^-$ définies par les tableaux :

$\dot{+}$	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$\bar{0} = 1$

$\bar{1} = 0$

L'ensemble $\mathbf{2}$, muni de ces trois opérations est une algèbre de Boole ou un treillis de Boole. 0 est l'élément minimum du treillis et 1 son élément maximum. On dit aussi que le système : $<\mathbf{2}, \dot{+}, ., ^-, 0, 1>$ est un treillis de Boole. La vérification des axiomes :

idempotence : $a \dot{+} a = a$; $a . a = a$,

commutativité : $a \dot{+} b = b \dot{+} a$; $a . b = b . a$,

associativité : $a \dot{+} (b \dot{+} c) = (a \dot{+} b) \dot{+} c$; $a . (b . c) = (a . b) . c$,

absorption : $a \dot{+} a . b = a . (a \dot{+} b) = a$ (on suppose la priorité de .),

distributivité de l'une par rapport à l'autre : $a . (b \dot{+} c) = a . b \dot{+} a . c$,

$a \dot{+} b . c = (a \dot{+} b) (a \dot{+} c)$,

l'élément minimum : $a \dot{+} 0 = a$; $a . 0 = 0$,

L'élément maximum : $a \dot{+} 1 = 1$; $a . 1 = a$,

le complément : $a \dot{+} \bar{a} = 1$; $a . \bar{a} = 0$,

est laissée au lecteur à titre d'exercice.

De même, montrer que la relation $\leqslant$ telle que : $a \leqslant b$ ssi $a \dot{+} b = b$, est un ordre total sur $\mathbf{2}$. On remarquera que :

$\leqslant$ est réflexive car $\dot{+}$ est idempotente,

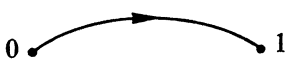
$\leqslant$ est antisymétrique car $\dot{+}$ est commutative,

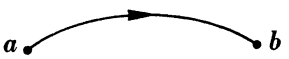
$\leqslant$ est transitive car $\dot{+}$ est associative.

Montrer l'équivalence : $a \dot{+} b = b \Leftrightarrow a . b = a \Leftrightarrow \bar{a} \dot{+} b = 1 \Leftrightarrow a . \bar{b} = 0$ et $\overline{a \dot{+} b} = \bar{a} . \bar{b}$, $\overline{a . b} = \bar{a} \dot{+} \bar{b}$ (règle de Morgan).

Montrer que : $a \dot{+} b = \sup_{\leqslant}(a, b)$ et $a . b = \inf_{\leqslant}(a, b)$.

Le treillis ci-dessus est représenté par le schéma :



selon la convention : 

ssi $a < b$. (*i.e.*, $a \leqslant b$ et $a \neq b$)

Soit $\mathbf{2}^k = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \ldots \times \mathbf{2}$ (k facteurs). Les éléments de $\mathbf{2}^k$ seront notés par des lettres grasses, *i.e.*, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, éventuellement affectées d'indices. On munit $\mathbf{2}^k$ de deux opérations binaires notées $\dot{+}$, $\otimes$ et d'une opération unaire notée $^-$ définies par : $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = (a_1 \dot{+} b_1, a_2 \dot{+} b_2, \ldots, a_k \dot{+} b_k)$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_1 . b_1, a_2 . b_2, \ldots, a_k . b_k)$, $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Les opérations $\dot{+}$, $\otimes$, $^-$, sont les opérations induites par celles de $\mathbf{2}$. Le lecteur pourra vérifier que le système : $< \mathbf{2}^k, \dot{+}, \otimes, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1} >$ est un treillis de Boole, et que la relation $\leqslant$ telle que : $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$ ssi $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = \mathbf{b}$ est un ordre partiel, appelé l'ordre induit par celui de $\mathbf{2}$. En déduire que :

$\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}$; $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 \leqslant b_1$ et $a_2 \leqslant b_2$ et $\ldots$ et $a_k \leqslant b_k$;

$\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = \sup_{\leqslant} (\mathbf{a}, \mathbf{b})$; $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \inf_{\leqslant} (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

On note . une loi de composition externe, *i.e.*, une application de $\mathbf{2} \times \mathbf{2}^k$ dans $\mathbf{2}^k$ telle que : $\mathbf{2} \times \mathbf{2}^k \ni (x, \mathbf{x}) \to (x . x_1, x . x_2, \ldots, x . x_k) \in 2^k$. On dit, alors, que le système : $< \mathbf{2}^k, \dot{+}, \otimes, ., ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1} >$ est un espace booléen.

L'ensemble des parties d'un ensemble A, noté P(A), muni de deux opérations binaires $\cup$, $\cap$ (union et intersection) et de l'opération unaire $^-$ (complémentation) est un treillis de Boole. Son élément minimum est l'ensemble vide, $\varnothing$, et son élément maximum est la partie pleine, A. On dit alors que le système : $< \mathrm{P(A)}, \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathrm{A} >$ est un treillis de Boole.

Vérifier que : $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$; $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \sup_{\subseteq} (\mathrm{A}, \mathrm{B})$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \inf_{\subseteq} (\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

On suppose que les éléments de A sont numérotés de 1 à k : $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_k\}$. Entre P(A) et $\mathbf{2}^k$, on établit la correspondance :

$$\mathrm{P(A)} \ni \mathrm{A}_i \to \mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i) = \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}) \in \mathbf{2}^k, \text{ où } a_{ij} = 1 \quad \text{ssi} \quad \mathrm{a}_j \in \mathrm{A}_i.$$

Il est évident que l'application $\mathrm{h_A}$, de P(A) dans $\mathbf{2}^k$, ainsi définie, est une bijection. L'image par $\mathrm{h_A}$ d'un sous-ensemble A_i de A est appelé le vecteur caractéristique de A_i. Ainsi : $\mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i)$ est le vecteur caractéristique de A_i.

$\mathrm{h_A}$ est un isomorphisme du treillis de Boole $< \mathrm{P(A)}, \cup, \cap, ^-, \varnothing, \mathrm{A} >$ sur le treillis de Boole $< \mathbf{2}^k, \dot{+}, \otimes, ^-, \mathbf{0}, \mathbf{1} >$, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
\mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i \cup \mathrm{A}_j) &= \mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i) \dot{+} \mathrm{h_A}(\mathrm{A}_j) \\
\mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) &= \mathrm{h_A}(\mathrm{A}_i) \otimes \mathrm{h_A}(\mathrm{A}_j) \\
\mathrm{h_A}(\overline{\mathrm{A}}_i) &= \overline{\mathrm{h_A}}(\mathrm{A}_i) \\
\mathrm{h_A}(\varnothing) &= \mathbf{0} \\
\mathrm{h_A}(\mathrm{A}) &= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Ann. 2. Foncteurs

Le but de ce paragraphe est de permettre au lecteur une mise en équation immédiate et très élégante de tout problème de l'étude des graphes où interviennent les concepts « vrai » et « faux ».

Soient f et g deux applications de A dans B et de B dans C respectivement. Un foncteur (*cf.* [16]) $\mathscr{F}$ est un couple (F, $\mathrm{F_m}$) (resp. $\mathscr{F}^c = (\mathrm{F}, \mathrm{F_m^c})$) tel que : à chaque ensemble A fait correspondre un autre ensemble F(A) et à chaque application f de A dans B fait correspondre une autre application $\mathrm{F_m}(\mathrm{f})$ de F(A) dans F(B) (resp. $\mathrm{F_m^c}(\mathrm{f})$ de F(B) dans F(A)) et qui a les propriétés F.1 et F.2 (resp. $\mathrm{F^c}$.1 et $\mathrm{F^c}$.2) :

F.1 $\mathrm{F_m}(1_\mathrm{A}) = 1_{\mathrm{F(A)}}$ $\qquad$ $\mathrm{F^c}$.1 $\mathrm{F_m^c}(1_\mathrm{A}) = 1_{\mathrm{F(A)}}$ $\qquad$ (1_A : l'application identique de A)

F.2 $\mathrm{F_m}(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = \mathrm{F_m}(\mathrm{g}) \circ \mathrm{F_m}(\mathrm{f})$ $\qquad$ $\mathrm{F^c}$.2 $\mathrm{F_m^c}(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = \mathrm{F_m^c}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{F_m^c}(\mathrm{g})$.

Le foncteur $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}^c$) est appelé covariant (resp. contravariant). La première composante d'un foncteur est appelée « foncteur-objet », et la seconde « foncteur-application ».

Exemple 1 : le foncteur-puissant $\mathscr{P} = (P, P_m)$

P(A) : l'ensemble des parties de A.

$P_m(f) = f_*$ est une application de P(A) dans P(B) telle que :

$$f_*(A_i) = \bigcup_{a_j \in A_i} \{f(a_j)\}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les axiomes F.1 et F.2 :

F.1 $(1_A)_* = 1_{P(A)}$ F.2 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. (foncteur covariant)

On peut traduire ces propriétés par les diagrammes :

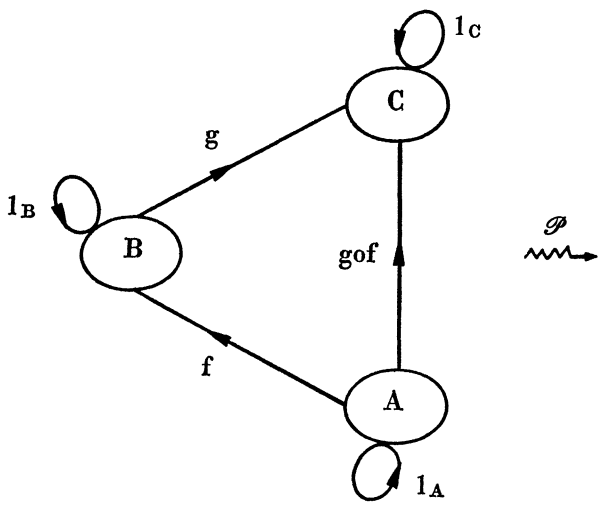


Fig. 16

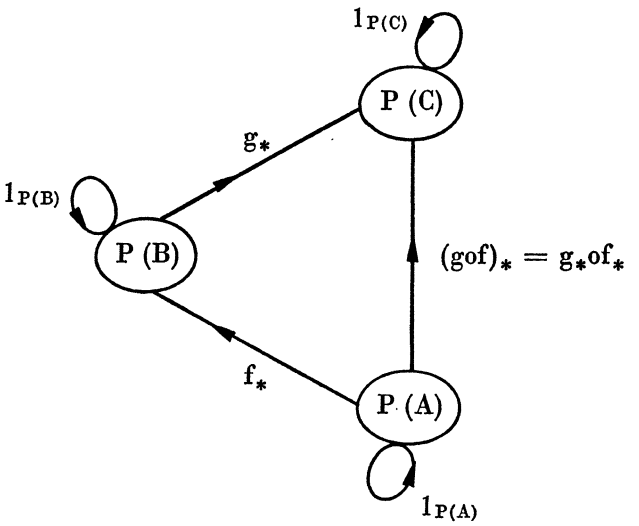


Fig. 17

Vérifier, à titre d'exercice, les propriétés :

$$f_*(A_i \cup A_j) = f_*(A_i) \cup f_*(A_j) ; \qquad f_*(A_i \cap A_j) \subset f_*(A_i) \cap f_*(A_j).$$

Exemple 2 : le foncteur-puissant $\mathscr{P}^c = (P, P^c_m)$

P(A) : l'ensemble des parties de A

$P^c_m(f)$: f^* est une application de P(B) dans P(A) telle que :

$$f^*(B_i) = \bigcup_{f(a_j) \in B_i} \{a_j\} \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les axiomes $F^c_{\cdot}1$ et $F^c_{\cdot}2$:

$F^c_{\cdot}1$ $(1_A)^* = 1_{P(A)}$ $F^c_{\cdot}2$ $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ (foncteur contravariant).

On peut traduire ces propriétés par les diagrammes :

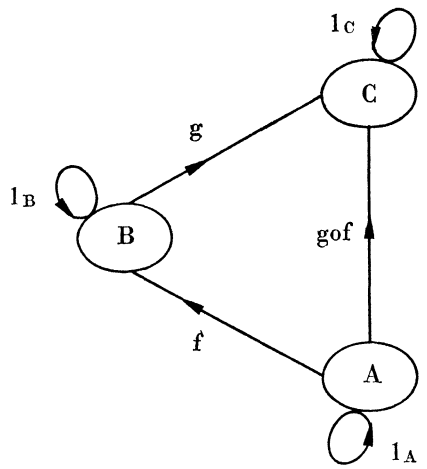


Fig. 18

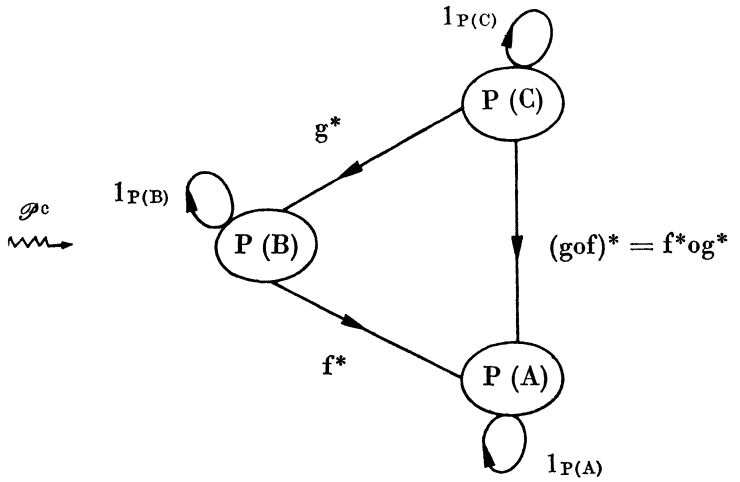


Fig. 19

Vérifier, à titre d'exercice, les propriétés :

$$f^*(B_i \cup B_j) = f^*(B_i) \cup f^*(B_j) \quad f^*(B_i \cap B_j) = f^*(B_i) \cap f^*(B_j)\,; \quad f^*(\overline{B_i}) = f^*(B) \cap \overline{f^*(B_i)}.$$

Ann. 3. Treillis de Boole et foncteurs

On note Hom(P(A), P(B)) l'ensemble des homomorphismes pour l'union de P(A) dans P(B), *i.e.*,

$$\Gamma \in \mathrm{Hom}(P(A), P(B)) \iff (\forall A_i)(\forall A_j)(A_i \in P(A) \text{ et } A_j \in P(A) \implies \Gamma(A_i \cup A_j) = \Gamma(A_i) \cup \Gamma(A_j))$$

On a en particulier : si f est une application de A dans B (resp. de B dans A) alors $f_* \in \mathrm{Hom}(P(A), P(B))$ (resp. $f^* \in \mathrm{Hom}(P(A), P(B))$). De même, il est facile à montrer que : $\Gamma_1 \in \mathrm{Hom}(P(A), P(B))$ et $\Gamma_2 \in \mathrm{Hom}\,(P(B), P(C)) \implies \Gamma_2 \circ \Gamma_1 \in \mathrm{Hom}\,(P(A), P(C))$.

Il découle de cette définition que chaque élément Γ de Hom (P(A), P(B)) est complètement déterminé par la donnée des $\Gamma(\{a_i\})$, $1 = 1, 2, \ldots$, card A.

On fait de Hom(P(A), P(B)) un treillis de Boole en posant :

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_1 \cup \Gamma_2 & : & (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(A_i) = \Gamma_1(A_i) \cup \Gamma_2(A_i) \\
\Gamma_1 \cap \Gamma_2 & : & (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)(A_i) = \Gamma_1(A_i) \cap \Gamma_2(A_i) \\
\overline{\Gamma} & : & \overline{\Gamma}(A_i) = \overline{\Gamma(A_i)} \\
I & : & I(A_i) = B \\
O & : & O(A_i) = \varnothing \in P(B)
\end{array}$$

Le foncteur $\Phi = (\overline{\Phi}, \Phi_m)$.

Soit $\Gamma \in \mathrm{Hom}(P(A), P(B))$.

$\overline{\Phi}(P(A)) = 2^{\text{card } A}$

$\Phi_m(\Gamma) = h_B \circ \Gamma \circ h_A^{-1}$

Vérification des axiomes F.1 et F.2 :

F1. $\Phi_m(1_{P(A)}) = h_A \circ 1_{P(A)} \circ h_A^{-1} = (h_A \circ 1_{P(A)}) \circ h_A^{-1} = h_A \circ h_A^{-1} = 1_{2^{\text{card A}}} = 1_{\Phi(P(A))}$

Soit : $\Gamma' \in \text{Hom}(P(B), P(C))$.

F2. $\Phi_m(\Gamma' \circ \Gamma) = h_C \circ (\Gamma' \circ \Gamma) \circ h_A^{-1} = h_C \circ \Gamma' \circ 1_{P(B)} \circ \Gamma \circ h_A^{-1} =$
$= h_C \circ \Gamma' \circ h_B^{-1} \circ h_B \circ \Gamma \circ h_A^{-1} = (h_C \circ \Gamma' \circ h_B) \circ (h_B \circ \Gamma \circ h_A^{-1}) =$
$= \Phi_m(\Gamma') \circ \Phi_m(\Gamma)$.

On note Hom $(2^{\text{card A}}, 2^{\text{card B}})$ l'ensemble des applications de $2^{\text{card A}}$ dans $2^{\text{card B}}$ images par Φ_m de celles de Hom(P (A), P (B)).

On note $a_i^\circ = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème) les vecteurs de la seule base de $2^{\text{card A}}$. Il est évident que : $h_A(\{a_i\}) = a_i^\circ$. Un élément $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{\text{card A}})$ de $2^{\text{card A}}$ se décompose de la façon suivante : $a = a_1 \cdot a_1^\circ \dotplus a_2 \cdot a_2^\circ \dotplus \ldots \dotplus a_{\text{card A}} \cdot a^\circ_{\text{card A}}$.

Soit $\Gamma \in \text{Hom}(P(A), P(B))$ et soit γ son image par Φ_m. Il va de soi que γ est complètement déterminée par la donnée des images de la base de $2^{\text{card A}}$. Plus précisément :

$$\gamma(a) = a_1 \cdot \gamma(a_1^\circ) \dotplus a_2 \cdot \gamma(a_2^\circ) \dotplus \ldots \dotplus a_{\text{card A}} \cdot \gamma(a^\circ_{\text{card A}}).$$

On fait de Hom $(2^{\text{card A}}, 2^{\text{card B}})$ un treillis de Boole en posant :

$\gamma_1 \dotplus \gamma_2 : (\gamma_1 \dotplus \gamma_2)(a) = \gamma_1(a) \dotplus \gamma_2(a)$
$\gamma_1 \otimes \gamma_2 : (\gamma_1 \oplus \gamma_2(a) = \gamma_1(a) \oplus \gamma_2(a)$
$\gamma \quad : \gamma(a) = \gamma(a)$
$\mathbf{0} \quad : \mathbf{0}(a) = \mathbf{0} \in 2^{\text{card B}}$
$\mathbf{1} \quad : \mathbf{1}(a) = \mathbf{1} \in 2^{\text{card B}}$.

Montrons que Φ_m est un isomorphisme de Hom (P(A), P(B)) sur Hom $(2^{\text{card A}}, 2^{\text{card B}})$ pour les structures booléennes correspondantes :

— Φ_m est surjective par sa définition

— Φ_m est injective :

$\Phi_m(\Gamma_1) = \Phi_m(\Gamma_2) \Rightarrow h_B \circ \Gamma_1 \circ h_A^{-1} = h_B \circ \Gamma_2 \circ h_A^{-1} \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2$ (puisque h_A^{-1} et h_B en tant que bijections sont simplifiables),

— Φ_m est un homomorphisme ;

montrons que : $\Phi_m(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \Phi_m(\Gamma_1) \dotplus \Phi_m(\Gamma_2)$.

Pour cela il suffit de montrer que : $(\Phi_m(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))(a) = (\Phi_m(\Gamma_1) \dotplus \Phi_m(\Gamma_2))(a)$;

$(\Phi_m(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))(a) = (h_B \circ (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \circ h_A^{-1})(a) = h_B((\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(h_A^{-1}(a)) =$
$h_B(\Gamma_1(h_A^{-1}(a) \cup \Gamma_2(h_A^{-1}(a))) = h_B(\Gamma_1(h_A^{-1}(a))) \dotplus h_B(\Gamma_2(h_A^{-1}(a))) =$
$(\Phi_m(\Gamma_1))(a) \dotplus (\Phi_m(\Gamma_2))(a) = (\Phi_m(\Gamma_1) \dotplus \Phi_m(\Gamma_2))(a)$.

On laisse au lecteur le soin de montrer :

$$\Phi_m(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \Phi_m(\Gamma_1) \otimes \Phi_m(\Gamma_2) \qquad \text{et} \qquad \Phi_m(\overline{\Gamma}) = \overline{\Phi_m(\Gamma)}.$$

Montrer, à titre d'exercice :

$\Gamma 0$. $\Gamma(A_i \cup A_j) = \Gamma(A_i) \cup \Gamma(A_j)$ (définition)

$\Gamma 1$. $\Gamma(A_i \cap A_j) \subseteq \Gamma(A_i) \cap \Gamma(A_j)$ (l'égalité a lieu ssi $\Gamma = \cap f^*$)

$\Gamma 2$. $\Gamma(A_i - A_j) \supseteq \Gamma(A_i) - \Gamma(A_j)$ pour $A_j \subseteq A_i$ (l'inégalité a lieu ssi $\Gamma = \cap f^*$).

En déduire que :

$\gamma 0.\quad \gamma(\mathbf{a}_i \dotplus \mathbf{a}_j) = \gamma(\mathbf{a}_i) \dotplus \gamma(\mathbf{a}_j)$

$\gamma 1.\quad \gamma(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \leqslant \gamma(\mathbf{a}_i) \otimes \gamma(\mathbf{a}_j)$

$\gamma 2.\quad \gamma(\mathbf{a}_i \otimes \bar{\mathbf{a}}_j) \geqslant \gamma(\mathbf{a}_i) \otimes \overline{\gamma(\mathbf{a}_j)}$

$\gamma 3.\quad \gamma(a.\mathbf{a}_i) \quad = a.\gamma(\mathbf{a}_i).$

Les éléments de Hom $(2^{\text{card A}}, 2^{\text{card B}})$ sont appelés des applications linéaires booléennes ($\gamma 0$ et $\gamma 3$).

Posons : **card** A $= d$, **card** B $= r$. Dorénavant les vecteurs seront écrits sous forme de colonne. Posons :

$$\gamma(\mathring{\mathbf{a}}_i) = \begin{bmatrix} m_{1i} \\ m_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{ri} \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2 \ \dots \ d)$$

On a :

$$\gamma(\mathbf{a}) = a_1.\gamma(\mathring{\mathbf{a}}_1) \dotplus a_2.\gamma(\mathring{\mathbf{a}}_2) \dotplus \dots \dotplus a_k.\gamma(\mathring{\mathbf{a}}_k) =$$

$$a_1.\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{r1} \end{bmatrix} \dotplus a_2.\begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{r2} \end{bmatrix} \dotplus \dots \dotplus a_k.\begin{bmatrix} m_{1k} \\ m_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\, m_{11} \dotplus a_2\, m_{12} \dotplus \dots \dotplus a_k\, m_{1k} \\ a_1\, m_{21} \dotplus a_2\, m_{22} \dotplus \dots \dotplus a_k\, m_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1\, m_{r1} \dotplus a_2\, m_{r2} \dotplus \dots \dotplus a_k\, m_{rk} \end{bmatrix}$$

Ainsi, à chaque application γ de Hom$(2^k, 2^r)$ correspond une matrice $\mathrm{M}\gamma = (m_{ij}^{\gamma})$ du type (r, k) (r lignes et k colonnes) dont la i-ème colonne est le vecteur colonne $\gamma(\mathring{\mathbf{a}}_i)$. On définit la multiplication de $\mathrm{M}\gamma$ par le vecteur $\mathbf{a}$: $\mathrm{M}\gamma.\mathbf{a} = \gamma(\mathbf{a})$.

On note $\mathscr{M}(r, k)$ l'ensemble des matrices du type (r, k). On fait de $\mathscr{M}(r, k)$ un treillis de Boole en posant :

$\mathrm{M} \dotplus \mathrm{M}' = (m_{ij} \dotplus m'_{ij})$

$\mathrm{M} \otimes \mathrm{M}' = (m_{ij} \,.\, m'_{ij})$

$\overline{\mathrm{M}} \quad = (\overline{m}_{ij})$

$\mathbf{O} \quad = (0)$ (la matrice pleine de 0 : l'élément minimum)

$\mathbf{E} \quad = (1)$ (la matrice pleine de 1 : l'élément maximum).

La vérification des axiomes est laissée au lecteur.

Notons $\mathrm{W_m}$ l'application de Hom$(2^k, 2^r)$ dans $\mathscr{M}(r, k)$, i.e., $\mathrm{W_m}(\gamma) = \mathrm{M}\gamma$. Montrer que $\mathrm{W_m}$ est un isomorphisme pour les structures booléennes correspondantes. On montrera que $\mathrm{W_m}$ est bijective ainsi que :

$\mathrm{M}\gamma \dotplus \gamma' \quad = \mathrm{M}\gamma \dotplus \mathrm{M}\gamma'$

$\mathrm{M}\gamma \oplus \gamma' \quad = \mathrm{M}\gamma \oplus \mathrm{M}\gamma'$

$\mathrm{M}\bar{\gamma} \quad = \overline{\mathrm{M}}\gamma$

$\mathrm{M}^0 \quad = \mathbf{O}$

$\mathrm{M}^1 \quad = \mathbf{E}$

On définit une application (produit matriciel booléen usuel) :

$$\mathscr{M}(n, r) \times \mathscr{M}(r, k) \ni (M', M) \to M' \,.\, M = (m'_{i1}\, m_{1j} \dotplus m'_{i2}\, m_{2j} \dotplus \ldots \dotplus m'_{ir}\, m_{rj}) = (m''_{ij}) \in \mathscr{M}(n, k).$$

Montrer que le couple $\mathscr{W} = (W, W_m)$ tel que :

$W(2^k) = 2^k$ et $W_m(\gamma) = M\gamma$ est un foncteur covariant :

F1. $W_m(1_{2k}) = D$ (matrice diagonale du type (k, k), la matrice identique de 2^k)

F2. $W_m(\gamma' \circ \gamma) = W_m(\gamma') \,.\, W_m(\gamma)$ soit $M\gamma' \circ \gamma = M\gamma' \,.\, M\gamma$, où : $\gamma \in \mathrm{Hom}(2^k, 2^r)$ et $\gamma' \in \mathrm{Hom}(2^r, 2^n)$.

Ainsi, tout « calcul » se fait, en quelque sorte, à partir des foncteurs :

$$\mathscr{W} \circ \Phi \circ \mathscr{P} = (W \circ \Phi \circ P, W_m \circ \Phi_m \circ P_m)$$

et

$$\mathscr{W} \circ \Phi \circ \mathscr{P}^c = (W \circ \Phi \circ P, W_m \circ \Phi_m \circ P_m^c).$$

Ces considérations nous permettent la mise en équation immédiate de tout problème de l'étude des graphes relatif aux concepts « oui » et « non » (vrai et faux).

Ann. 4. Fonctions et équations booléennes ([4], [5])

Une fonction booléenne à k variables est une application de 2^k dans 2 dont sa forme générale (forme normale disjonctive) est donnée par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_0) \in 2^k}^{\cdot} A_N \,.\, x_1^{a_{k-1}} \,.\, x_2^{a_{k-2}} \,.\, \ldots \,.\, x_k^{a_0} \quad \text{(somme booléenne)},$$

où :

$$x_i^{a_{k-i}} = x_i \quad \text{si} \quad a_{k-i} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_i^{a_{k-i}} = \bar{x}_i \quad \text{si} \quad a_{k-i} = 0,$$

$$N = a_{k-1} \,.\, 2^{k-1} + a_{k-2} \,.\, 2^{k-2} + \ldots + a_0 \,.\, 2^0,\ A_N \in 2.$$

Forme finale d'une équation booléenne : $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$.
On pose: $f_1(x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$.
Condition d'existence d'une solution en x_1 : $f_1(0) \,.\, f_1(1) = 0$.
Solution en x_1 : $x_1 = f_1(0) \dotplus p_1 \,.\, \bar{f}_1(1)$ (p_1 paramètre $\in 2$).
On pose : $f_2(x_2) = f_1(0) \,.\, f_1(1) = 0$.
Condition d'existence d'une solution en x_2 : $f_2(0) \,.\, f_2(1) = 0$.
Solution en x_2 : $x_2 = f_2(0) \dotplus p_2 \,.\, \bar{f}_2(1)$.
On pose : $f_k(x_k) = f_{k-1}(0) \,.\, f_{k-1}(1) = 0$.
Condition finale : $f_k(0) \,.\, f_k(1) = 0$.
Solution en x_k : $x_k = f_k(0) \dotplus p_k \,.\, \bar{f}_k(1)$.

On substitue x_k dans x_{k-1}, ..., on substitue x_2 dans x_1. On a ainsi une solution paramétrique des x_i à l'aide des p_i. Pour la minimisation du nombre de paramètres *cf.* [4] et [5].

Exemple.
Soit à résoudre l'équation : $x_1 x_2 \dotplus x_1 \bar{x}_3 \dotplus x_2 \bar{x}_3 = 1$.

On a : $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2 \dot{+} x_1 \bar{x}_3 \dot{+} \bar{x}_2 \bar{x}_3} = (\bar{x}_1 \dot{+} \bar{x}_2) \,.\, (\bar{x}_1 \dot{+} x_3) \,.\, (x_2 \dot{+} x_3)$ (règle de Morgan) $=$
$\bar{x}_1 x_2 \dot{+} \bar{x}_1 x_3 \dot{+} \bar{x}_2 x_3 = 0.$

On pose : $f_1(x_1) = \bar{x}_1 x_2 \dot{+} \bar{x}_1 x_3 \dot{+} \bar{x}_2 x_3 = 0$, $f_1(0) = x_2 \dot{+} x_3$, $f_1(1) = \bar{x}_2 x_3$;
condition : $f_1(0) \,.\, f_1(1) = \bar{x}_2 x_3 = 0$; solution en x_1 : $x_1 = x_2 \dot{+} x_3 \dot{+} p_1$.

On pose : $f_2(x_2) = \bar{x}_2 x_3 = 0$, $f_2(0) = x_3$, $f_2(1) = 0$; condition : $f_2(0) \,.\, f_2(1) = 0$ (toujours vérifiée) ; solution en x_2 : $x_2 = x_3 \dot{+} p_2$; x_3 est arbitraire, posons $x_3 = p_3$.

On a la solution paramétrique : $x_1 = p_1 \dot{+} p_2 \dot{+} p_3$; $x_2 = p_2 \dot{+} p_3$; $x_3 = p_3$.

Pour trouver toutes les solutions, on dresse le tableau :

p_1	p_2	p_3	x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0	0	0	*
0	0	1	1	1	1	*
0	1	0	1	1	0	*
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	0	*
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	

Minimisation du nombre de paramètres

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} \,.\, \bar{b} \\ \bar{a} \,.\, b \\ a \,.\, \bar{b} \\ a \,.\, b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} \,.\, b \dot{+} a \,.\, \bar{b} \dot{+} a \,.\, b \\ \bar{a} \,.\, b \dot{+} a \,.\, \bar{b} \\ \bar{a} \,.\, b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \dot{+} b \\ a \oplus b \\ \bar{a} \,.\, b \end{bmatrix}$$

Si l'on a une équation du type : $g(x) = h(x)$, alors on pose :

$$f(x) = g(x) \oplus h(x) = g(x) \,.\, \bar{h}(x) \dot{+} \bar{g}(x) . h(x) = 0.$$

Ann. 5. Systèmes booléens (solution paramétrique) ([4], [5])

Forme finale d'un système booléen :

$$f_1(x) = 0 \text{ et } f_2(x) = 0 \text{ et } \ldots \text{ et } f_n(x) = 0.$$

Ce système est équivalent à l'équation booléenne :

$$f_1(x) \dot{+} f_2(x) \dot{+} \ldots \dot{+} f_n(x) = 0.$$

Ann. 6. Recherche de toutes les solutions minimales au sens de l'inclusion ensembliste (ou de l'ordre induit) dans un système de forme finale $f_i(x) = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ où toutes les lettres dans les f_i sont affirmées ([17])

On multiplie membre à membre les n équations du système. On effectue toutes les simplifications possibles par la règle d'absorption (*i.e.*, $a \dot{+} ab = a$). Chaque monôme de l'expression ainsi obtenue fournit une solution minimale au sens de l'inclusion ensembliste sur P(X) ou de l'ordre induit sur $\mathbf{2}^k$, et cela à cause de la règle d'absorption.

Ann. 7. Recherche de toutes les solutions maximales au sens de l'inclusion ensembliste (ou de l'ordre induit) dans un système de forme finale $f_i(x) = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ où toutes les lettres dans les f_i sont niées ([17])

On multiplie membre à membre les n équations du système. On effectue toutes les simplifications possibles par la règle d'absorption. Chaque monôme de l'expression ainsi obtenue fournit une solution maximale (au sens de l'ordre induit sur $\mathbf{2}^k$) car les inconnues qui ne figurent pas dans un tel monôme peuvent prendre la valeur 1.

Ann. 8. Recherche de toutes les solutions maximales au sens de l'inclusion ensembliste dans un système de forme finale $f_i\ (x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ où toutes les lettres dans les f_i sont affirmées

On pose : $\bar{f}_i\ (x) = 1$ et l'on procède comme dans Ann. 7.

Ann. 9. Recherche de toutes les solutions minimales au sens de l'inclusion ensembliste dans un système de forme finale $f_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ où toutes les lettres dans les f_i sont niées

On pose : $\bar{f}_i(x) = 1$ et l'on procède comme dans Ann. 6.

Ann. 10. Équations pseudobooléennes ([13])

Une fonction pseudobooléenne à k variables, est une application de $\mathbf{2}^k$ dans $\mathbf{Z}$, dont sa forme générale est donnée (Ann. 4) par la forme générale d'une fonction booléenne avec la différence : somme arithmétique au lieu de somme booléenne, multiplication arithmétique au lieu de multiplication booléenne, $A_N \in \mathbf{Z}$.

On pose : $f_1(x_1) = f(x) = 0$.

Condition d'existence d'une solution en x_1 : $f_1(0).f_1(1) = 0$.

Solution en x_1 : $x_1 = \bar{p}_1.f_1'(0) \dot{+} p_1.\bar{f}_1'(1)$, où : $f_1'(0) = 0$ si $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$ si $f_1(0) \neq 0$. Il en est de même de $f_1'(1)$.

On pose : $f_2(x_2) = f_1(0)\ .\ f_2(1) = 0$.

Condition : $f_2(0)\ .\ f_2(1) = 0$.

Solution : $x_2 = \bar{p}_2\ .\ f_2'(0) \dot{+} p_2\ .\ \bar{f}_2'(1)$, et ainsi de suite. Les p_i sont des paramètres appartenant à $\mathbf{2}$.

Exemple.

Soit à résoudre : $2\ x_1\ x_2 + x_1\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2\ \bar{x}_3 = 2$.

On pose :

$f(x) = f_1(x_1) = 2\ x_1\ x_2 + x_1\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2\ \bar{x}_3 - 2 = 0.$ $\quad f_1(0) = -\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3 - 2.$ $\quad f_1(1) = -\ 2\ \bar{x}_2 + x_2\ \bar{x}_3.$

$f_2(x_2) = f_1(0)\ .\ f_1(1) = 2\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3 + 4\ \bar{x}_2 - 2\ x_2\ \bar{x}_3 = 0.$ $\quad f_2(0) = 2\ \bar{x}_3 + 4.$ $\quad f_2(1) = -\ 2\ \bar{x}_3.$

$$f_3(x_3) = f_2(0).f_2(1) = -\ 12\ \bar{x}_3 = 0, \text{ donc : } x_3 = 1.$$

Par conséquent :

$$f_2(0) = 4 \text{ et } f_2'(0) = 1. \qquad f_2(1) = 0 \text{ et } f_2'(1) = 0. \qquad x_2 = \bar{p}_2 \dot{+} p_2 = 1.$$
$$f_1(0) = -2 \text{ et } f_1'(0) = 1. \qquad f_1(1) = 0 \text{ et } f_1'(1) = 0, \text{ donc : } x_1 = \bar{p}_1 \dot{+} p_1 = 1.$$

Ann. 11. Minimisation, maximisation d'une expression pseudobooléenne ([13])

Soit à minimiser : f (x). On pose : $f_1(x_1) = f(x)$. On pose : $g_1(x_2, x_3, \ldots, x_k) = f_1(1) - f_1(0)$.

$$M_1 = \{ (a_2, a_3, \ldots, a_k) \in \mathbf{2}^{k-1} : g_1(a_2, a_3, \ldots, a_k) < 0 \}.$$
$$N_1 = \{ (b_2, b_3, \ldots, b_k) \in \mathbf{2}^{k-1} : g_1(b_2, b_3, \ldots, b_k) = 0 \}.$$

Solution en x_1 :

$$x_1 = \sum_{(a_2, a_3, \ldots, a_k) \in M_1} x_2^{a_2} \cdot x_3^{a_3} \ldots x_k^{a_k} \dot{+} p_1 \cdot \sum_{(b_2, b_3, \ldots, b_k) \in N_1} x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} \ldots x_k^{b_k}.$$

On pose : x_1° = la valeur de x_1 pour $p_1 = 0$. On pose : $f_2(x_2) = f_1(x_1^\circ)$. On pose : $g_2(x_3, \ldots, x_k) = f_2(1) - f_2(0)$. On trouve M_2 et N_2 comme ci-dessus, et ainsi de suite.

Finalement, on pose : $g_k = f_k(1) - f_k(0)$, et l'on a : $f_{\min} = f_k(x_k^\circ)$.

Exemple.

Soit à minimiser l'expression : $f(x) = f_1(x_1) = 2\, x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_3 - \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

On a :

$$g_1(x_2, x_3) = f_1(1) - f_1(0) = 2\, x_2 + \bar{x}_3 ; \qquad M_1 = \emptyset ; \qquad N_1 = \{ (0, 1) \} ;$$
$$x_1 = p_1 \bar{x}_2 x_3 ; \qquad x_1^\circ = 0 ; \qquad f_2(x_2) = f_1(x_1^\circ) = f_1(0) = -\bar{x}_2 \bar{x}_3 ; \qquad g_2(x_3) = f_2(1) - f_2(0) = -\bar{x}_3 ;$$
$$M_2 = \emptyset ; \qquad N_2 = \{ 1 \} ; \qquad x_2 = p_2 x_3 ; \qquad x_2^\circ = 0 ; \qquad f_3(x_3) = f_2(x_2^\circ) = f_2(0) = -\bar{x}_3 ;$$
$$g_3 = f_3(1) - f_3(0) = 0 - (-1) = 1 ; \qquad M_3 = \emptyset ; \qquad N_3 = \emptyset ; \qquad x_3 = 0.$$

Donc :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ et } f_{\min} = f_3(0) = -1.$$

Pour maximiser une expression pseudobooléenne f(x), il suffit de minimiser $-f(x)$.

Les Ann. 10 et 11 donnent aussi une petite modification, quant à la façon de procéder, des méthodes de [13].

Pour compléter la méthode de minimisation d'une expression pseudobooléenne, on aura besoin d'une méthode nous permettant de résoudre une inéquation pseudobooléenne (pour trouver systématiquement les M_i). Pour cela, on renvoie le lecteur à [13].

REMARQUES FINALES

L'algèbre de Boole ne constitue certainement pas le seul moyen d'apporter une solution élégante à certains problèmes de l'étude des graphes. D'ailleurs, certaines méthodes qui figurent dans cette étude ne sont pas les plus efficaces pour la résolution des problèmes correspondants. C'est le cas par exemple, de la recherche systématique de tous les circuits hamiltoniens.

Dans ce cas, et dans bien d'autres, c'est la théorie des **2**-modules (*cf.* [6] et plus particulièrement [7]) qui s'y prête très efficacement. Et s'il n'en est pas ainsi, alors ce sont les **Z**-modules qui y interviennent ; comme par exemple, dans certains problèmes de réorientation.

Quoi qu'il en soit, l'algèbre de Boole s'applique chaque fois que les concepts « oui » et « non » paraissent, et cela d'une façon très évidente, comme on vient de le constater.

Cependant, il y a certains problèmes, que nous avons appelés des « métaproblèmes » (*cf.* [8]), comme celui de la partition en cliques d'un graphe symétrique ou celui de la coloration d'un graphe (au fait il s'agit du même problème) ou encore de la dimension d'un ordre partiel, qui ne semblent pas pouvoir être résolus directement par les méthodes que nous avons exposées. Il faut alors construire d'autres graphes, que nous avons appelés des « graphes généralisés » ou des « métagraphes » (par rapport au problème que l'on demande de résoudre) dont certaines propriétés se prêtent fort bien à l'étude systématique de métaproblèmes.

Ainsi, nous pensons que notre souci d'unification (classe de concepts) de l'étude des graphes nous a conduit à résoudre une classe assez considérable de problèmes d'une façon ou d'une autre, mais « syntactiquement » les mêmes.

Assurément, le procédé d'unification ne s'arrête pas ici : le lecteur attiré par cette étude pourrait y procéder ; ainsi on aura beau jeu un jour de parler de théorie des graphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barbut M., *Les mathématiques des sciences humaines*, 2 volumes, Paris, Presses Universitaires de France, 2e édition, 1970.

[2] Barbut M., et Monjardet B., *Ordre et classification : Algèbre et combinatoire*, 2 volumes, Paris, Hachette, 1970, 176 p. et 173 p.

[3] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1967, 2e éd., 267 p.

[4] Carvallo M., *Monographie des treillis et algèbre de Boole*, Paris, Gauthier-Villars, 1962, 125 p.

[5] — *Principes et applications de l'analyse booléenne*, Paris, Gauthier-Villars, 1965, 131 p.

[6] Di Giorgio V., *Modules dans un graphe et applications : Explication de l'application de l'algèbre de Boole à l'étude des graphes*, mémoire, École Pratique des Hautes Études, VIe Section, 1969, non publié.

[7] — "2-modules dans un graphe : Circuits hamiltoniens et disconnection", à paraître dans *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle de Bruxelles.*

[8] — *Graphes généralisés : Application aux problèmes de recouvrement et de partition*, non publié.

[9] Dubreil P., et Dubreil-Jacotin M. L., *Leçons d'algèbre moderne*, Paris, Dunod, 1961, 403 p.

[10] Flament C., *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris/Gauthier-Villars, La Haye/Mouton, 1965, 166 p.

[11] Fortet R., "L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle", *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle de Bruxelles*, Bruxelles, n° 4, 1959, pp. 29-32.

[12] Ghouila-Houri A., "Flots et tensions dans un graphe", *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, Paris, Gauthier-Villars, 1964, fasc. n° 3, pp. 269-339.

[13] Ivanescu P. L., *Pseudo-boolean programming and applications : Lectures notes in mathematics.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, n° 9, 50 p., 1965.

[14] — "A pseudo-boolean approach to matching problems in graphs with applications to assignment and transportation problems", *Théorie des graphes, Journées Internationales d'Études, Rome, 1966*, Paris, Dunod, 1969.

[15] LECLERC B., *Arbres des groupes de parties modulo 2 : Applications aux graphes*, document non publié, Centre de Mathématique Sociale.

[16] MACLANE S., et BIRKHOFF G., *Algebra*, Londres, Macmillan, 2e éd., 1968, 598 p.

[17] MAGHOUT K., "Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes", *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle de Bruxelles*, vol. 5, nos 1-2, 1963, pp. 21-54.

[18] ROSENSTIEHL P., "Existence d'automates finis capables de s'accorder bien qu'arbitrairement connectés et nombreux", *International Computation Centre*, 1966, vol. 5, pp. 245-261.

[19] — "L'arbre minimum d'un graphe", *Théorie des graphes, Journées Internationales d'Études, Rome, 1966*, Paris, Dunod, 1969.

[20] — "Quelques exercices à traiter sur simplexes", *Math. Sci. hum.*, nos 9, 10, 11, 1964-1965, pp. 41-45, 67-70, 25-27.

[21] — "Graphes, leurs vecteurs et leurs mots", cours rédigé en collaboration avec F. Moniez et J. C. Bermond, Doc. 5440319, École Pratique des Hautes Études, 1971.

[22] — "Labyrinthologie mathématique", *Math. Sci. hum.*, numéro 33, 1971, pp. 5-32.

[23] ROSENSTIEHL P., FIKSEL J. R., et HOLLIGER A., "Intelligent Graphs" (Networks of finite automata capable of solving graph problems), in : R.C. Read (ed.), *Graph theory and computing*, New York, Academic Press (à paraître en 1972).

[24] ROY B., "Cheminement et connexité dans les graphes: Application aux problèmes d'ordonnancement", *Metra*, Paris, 1962, série spéciale, no 1, 140 p.