

B. SORIN

Comportement optimum dans un test Q. C. M.

Mathématiques et sciences humaines, tome 31 (1970), p. 39-50

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__31__39_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT OPTIMUM DANS UN TEST Q. C. M.

par

B. SORIN ¹

Parmi les méthodes de contrôle des connaissances utilisées, on rencontre assez fréquemment, en raison de leur simplicité de dépouillement, le système des « questions à choix multiples » appelé plus brièvement *test Q.C.M.* : un certain nombre n de questions sont présentées au candidat ; pour chacune de celles-ci on propose un nombre fini de réponses, dont la réponse correcte ; le candidat coche, pour chaque question, ce qui lui semble la bonne réponse.

Nous nous plaçons dans la situation suivante :

Sur les n questions présentées :

- je connais avec précision les réponses à s questions ($0 \leq s \leq n$) ;
- j'ignore totalement ce qu'il en est des $n - s$ autres.

Pour chacune de ces dernières, je peux :

- ou m'abstenir de répondre ;
- ou cocher au hasard (avec probabilité $\frac{1}{m}$) l'une des réponses présentées.

Autrement dit, à chaque question mon comportement peut se symboliser par le tableau T suivant :

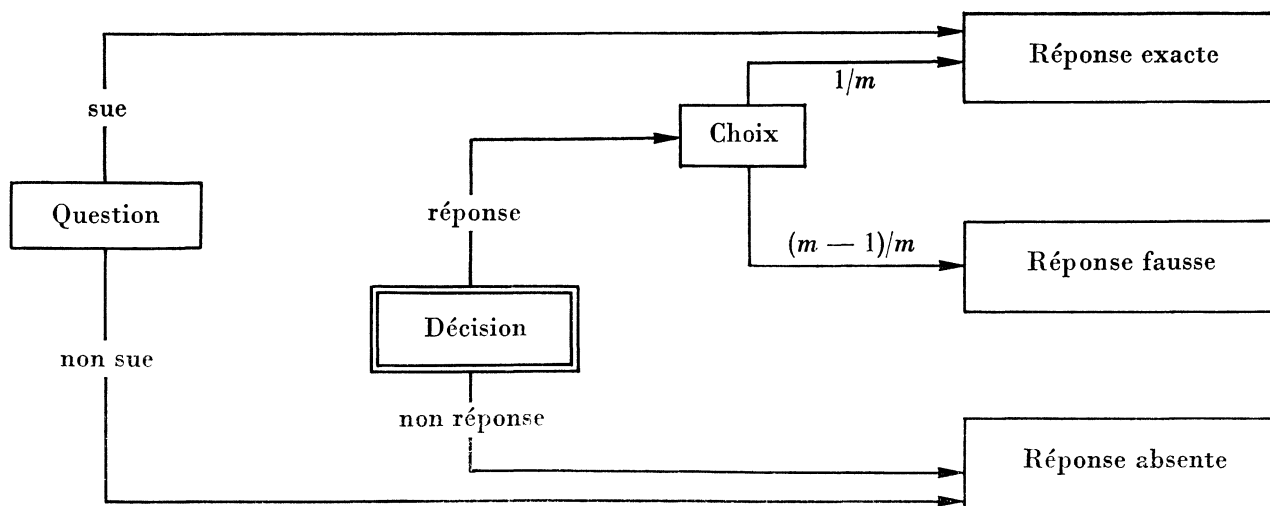


Tableau T

1. Collège Scientifique Universitaire, Tours.

Problème.

Ai-je toujours intérêt à donner, au hasard, des réponses à toutes les questions dont j'ignore la réponse exacte ?

La solution est évidemment fonction du *mode de dépouillement* utilisé (que l'on suppose précisé aux candidats dès le départ).

1. UNE RÈGLE ÉVIDENTE

Si le dépouillement ne *tient compte que des bonnes réponses*, le candidat, pour maximiser son score, a intérêt à utiliser la règle $\mathcal{R}_1$:

$\mathcal{R}_1$ | Répondre aux s questions sues et cocher au hasard, les $n - s$ autres.

2. TESTS QUI PÉNALISENT LES MAUVAISES RÉPONSES

A) Un certain nombre de tests Q.C.M. pénalisent, par un coefficient négatif, toute mauvaise réponse¹. Dans un tel dépouillement on fait :

- le décompte des bonnes réponses : B ; chacune est affectée du coefficient a ;
- le décompte des mauvaises réponses : F ; chacune est affectée du coefficient $-b$;
- la totalisation du score :

$$S = aB - bF$$

(a et b coefficients positifs, en général entiers : 1, 2, ...).

Autrement dit, on utilise, également pour chaque question, le tableau des pondérations :

Réponse	Bonne	Fausse	Absente
Coefficient	a	$-b$	0

$a > 0$ $b > 0$

Faut-il répondre ou non dans l'incertitude ?

Si parmi les $n - s$ questions dont j'ignore les réponses, je *m'abstiens de répondre pour r questions* ($0 \leq r \leq n - s$) et réponds au hasard, et indépendamment, pour les $n - s - r$ autres, mon score S définit une variable aléatoire :

$$S = a(s + X) - b(n - s - r - X) = (a + b)X + (a + b)s - b(n - r)$$

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n - s - r, \frac{1}{m})$$

1. C'est en surveillant un tel test Q.C.M. que nous nous sommes posé le problème du comportement optimum traité ici.

X représente le nombre de réponses exactes « par hasard » et suit la loi binomiale de paramètres $n - s - r$ et $\frac{1}{m}$.

Le problème consiste à faire choix du r optimum.

B) Si le test s'insère par son score dans un examen général, il est alors assez naturel que je fasse choix du r qui maximise l'espérance $E(S)$ de mon score ; or :

$$E(S) = (a + b) \frac{(n - s - r)}{m} + (a + b)s - b(n - r)$$

$$E(S) = (a + b) \frac{n + (m - 1)s}{m} - bn + r \frac{(m - 1)b - a}{m}$$

par suite, je ferai choix de la valeur minimum ou maximum « possible » de r selon que $(m - 1)b - a$ est négatif ou positif ; autrement dit, j'utiliserai la règle $\mathcal{R}_2$:

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} \text{lorsque } a > (m - 1)b, & \text{choisir } r = n - s \\ \text{lorsque } a = (m - 1)b, & r \text{ quelconque }^1 \\ \text{lorsque } a < (m - 1)b, & \text{choisir } r = 0. \end{cases}$$

Le choix des pondérations a et b telles que $\boxed{a = (m - 1)b}$ correspond donc à la situation où les comportements :

- à réponse systématique ;
- scrupuleux ² (ne répondre que si l'on connaît),

sont en moyenne équivalents.

C) Si le test constitue un examen en lui-même où le candidat est déclaré reçu si son score $S \geq l$ ($0 < l < an$), la situation est pour moi différente ; je vais faire choix de la valeur $\tilde{r}$ de r qui maximise la probabilité que j'ai d'être reçu : $P_r(R)$ [Règle $\mathcal{R}_3$].

1) Solutions optima exactes : $\tilde{r}$.

n, m, l étant donnés ($0 < l \leq an$), s connu ($0 \leq s \leq n$), il s'agit de déterminer parmi les valeurs r , $0 \leq r \leq n - s$ la (ou les) valeur(s) $\tilde{r}$ qui rende maximum :

$$P_r(R) = P\left(X \geq \frac{l + b(n - r)}{a + b} - s\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}(X) = \mathcal{B}\left(n - s - r, \frac{1}{m}\right).$$

C'est donc, s'il y a unicité de la solution, une fonction de s ($0 \leq s \leq n$) paramétrée par les caractéristiques du test : n, m, a, b, l : $\tilde{r}(n, m, a, b, l; s)$; on la notera $\tilde{r}(s)$ pour abréger.

1. Dans la pratique on aura intérêt à se « déterminer » de la manière suivante :

— si sur les m réponses proposées, une ou plusieurs de celles-ci paraissent « outrageusement » fausses, répondre au hasard parmi les autres
— sinon s'abstenir de répondre.

2. Pour des raisons de probité intellectuelle l'examineur peut préférer ce comportement et le « renforcer » en faisant choix de a et b tels que $a < (m - 1)b$.

Si $s \geq \frac{l}{a}$, la solution optimum consiste évidemment à ne pas répondre dans l'incertitude :

$$\tilde{r}(s) = n - s.$$

On donne au 3. des *exemples numériques* de l'évolution avec s de $\tilde{r}(s)$ pour quelques valeurs simples des paramètres n, m, a, b, l .

2) Solutions optima approchées : $\hat{r}(s)$.

Si nous nous plaçons dans les conditions de l'approximation de la loi binomiale de X par une loi de Laplace-Gauss de même moyenne et de même variance :

$$\mathcal{L}(X) \simeq \text{L. G.} \left(\frac{n - s - r}{m^2}, \frac{(n - s - r)(m - 1)}{m^2} \right)$$

on obtient :

$$P_r(R) \simeq \Phi(f(r))$$

avec :

$$f(r) = \frac{(a + b - mb)(n - s - r) - m(l - as)}{(a + b) \sqrt{(m - 1)(n - s - r)}}$$

$\Phi(x)$ fonction de répartition de la loi L. G. (0, 1).

Φ étant strictement croissante, le problème se ramène alors à la détermination de la valeur r de $\hat{r}$ qui rend maximum $f(r)$ pour $0 \leq r \leq n - s$.

Plaçons-nous seulement dans la situation où : $0 \leq s \leq \frac{l}{a}$ (en effet, si $\frac{l}{a} \leq s \leq n$, répondre

malencontreusement aux questions non sues peut altérer la certitude que l'on aurait d'être reçu en n'y répondant pas, d'où, alors, la solution évidente : $\hat{r} = n - s$.

$f(r)$ est dérivable sur $[0, n - s[$ avec :

$$f'(r) = \frac{(mb - a - b)(n - s - r) - m(l - as)}{(a + b) \sqrt{m - 1} (n - s - r)^{3/2}}$$

$$f(n - s) = -\infty,$$

d'où :

a) Si $mb - a - b \leq 0$,

$$f'(r) < 0 \quad \text{sur } [0, n - s[\quad \text{donc : } \hat{r}(s) = 0;$$

b) Si $mb - a - b > 0$,

$$f'(r) \text{ décroît en s'annulant pour } r_1(s) = n - s - m \frac{l - as}{mb - a - b}$$

d'où :

$$\hat{r}(s) = \text{Max.}(0, r_1(s)).$$

Pour un test Q.C.M. tel que $mb > a + b$, l'approximation gaussienne conduit ainsi à une solution optimum $\hat{r}(s)$ qui, lorsque le nombre de questions sues s croît de 0 à n , varie de la manière suivante :

elle peut d'abord être nulle pour : $0 \leq s \leq u$ si $u = \frac{ml - n[m - 1]b - a}{(m - 1)b - (m + 1)a} > 0$

puis est fonction linéaire de s ;

enfin, pour $s \leq \frac{l}{a}$ vaut $n - s$ (cf. fig. 1).

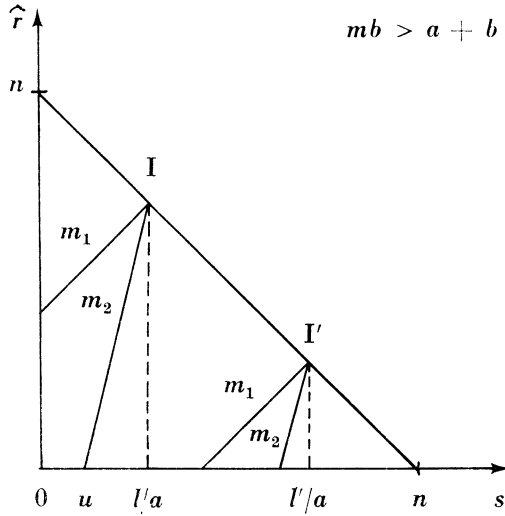


Fig. 1

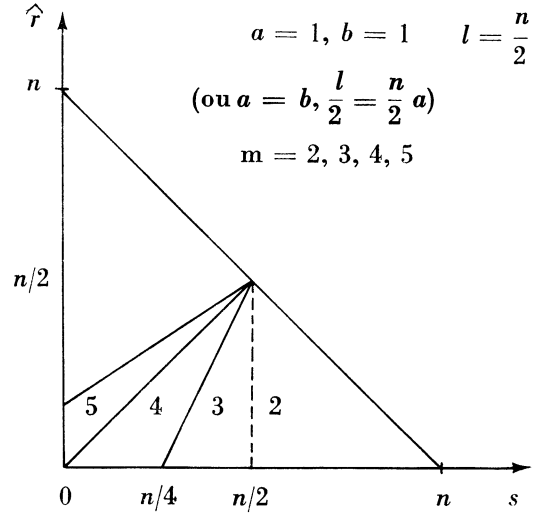


Fig. 2

Le résultat intéressant est la mise en évidence, pour $u < s < \frac{l}{a}$, de l'existence d'un *comportement optimum intermédiaire* entre ceux d'abstention totale et de réponse systématique aux questions non sues.

3) Quelques graphes.

Pour quelques coefficients a et b simples, en général utilisés : $a, b = 1, 2, 3$ et quelques valeurs m usuelles : $m = 2, 3, 4, 5$, nous donnons les graphes $s \rightarrow \hat{r}(s)$ correspondant au seuil d'admissibilité :

$l = \frac{n}{2} \cdot a$; à mêmes paramètres excepté un seuil l' différent, on déplacerait, parallèlement à lui-même,

le faisceau des « demi-droites » concourantes en $I \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)$, jusqu'en $I' \left(\frac{l'}{a}, n - \frac{l'}{a} \right)$ (cf. fig. 1).

N. B.

4) Approximation avec correction de continuité.

Si $P(X \geq k)$ où $\mathcal{L}(K) = \mathcal{B}(n, p)$ est approchée par :

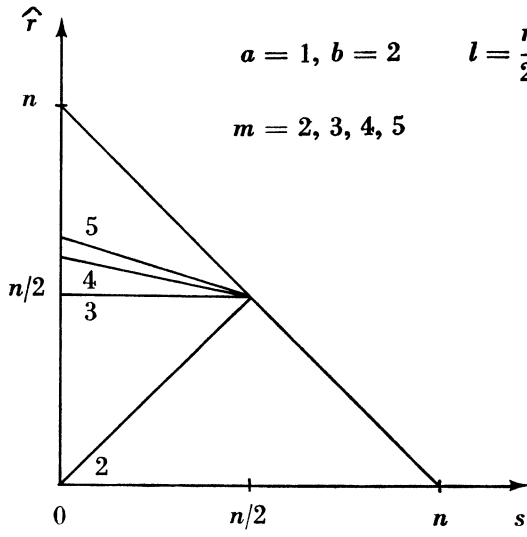


Fig. 3

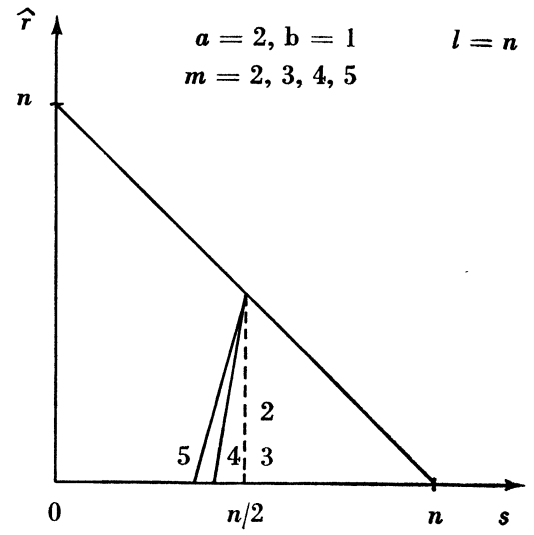


Fig. 4

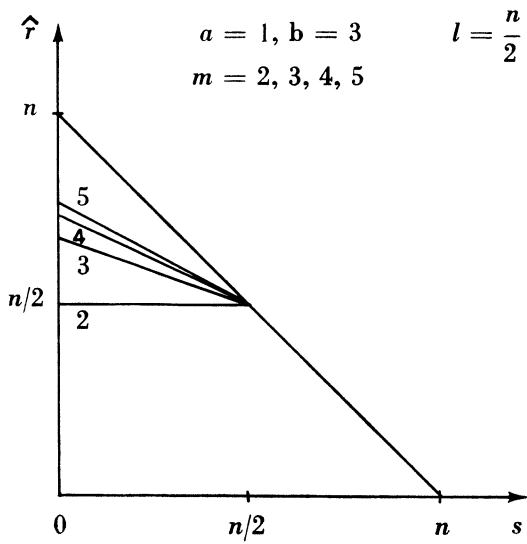


Fig. 5

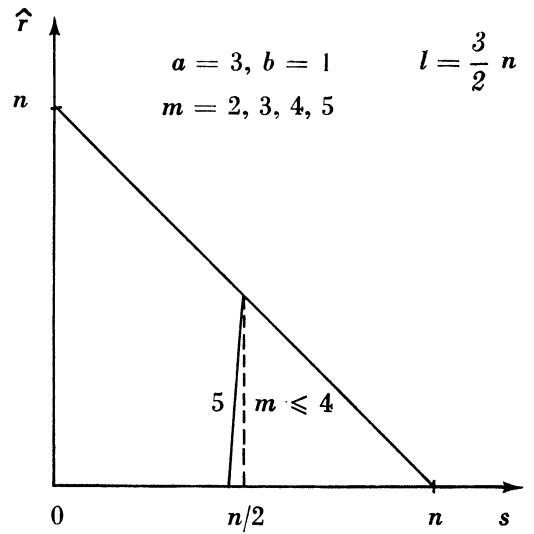


Fig. 6

$$P \left(Y \geq k - \frac{1}{2} \right) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(Y) = \text{L. G. } (np, np(1-p)),$$

la fonction $f(r)$ présente un terme correctif :

$$+ m/2 \sqrt{(m-1)(n-s-r)}$$

et r_1 le terme correctif :

$$+ m \frac{a + b}{2 (mb - a - b)}$$

On obtient donc, pour les situations « intermédiaires », des valeurs optimales approchées $\hat{r}'(s)$ légèrement plus fortes que $\hat{r}(s)$.

En pratique, tous les résultats et formules obtenues en 3) demeurent valables, moyennant le remplacement de la valeur l par la valeur $l' = l - \frac{a + b}{2}$.

5) En résumé :

Nous avons la règle de décision, approchée, $\mathcal{R}'_3$ qui constitue une réponse à la question posée au départ :

J'effectue un test Q.C.M. de n questions à m réponses chacune ; je suis informé que toute bonne question a pour coefficient « a », toute mauvaise question « $-b$ », et que je serai reçu si j'obtiens un score $S \geq l$. Je connais avec certitude s questions, j'ignore totalement les $n - s$ autres ; que dois-je faire pour ces dernières ?

Réponse (règle $\mathcal{R}'_3$).

Sur les $n - s$ questions, répondre au hasard à $n - s - r$ et m'abstenir de répondre à r , avec $\hat{r}$ déterminé par le diagramme de la page 46 :

Exemple.

$$n = 100, m = 3, a = 1, b = 1, l = 50.$$

Je connais $s = 45$ questions.

Comme : $\alpha = 45 - 50 = -5 < 0$,

$$\beta = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\gamma = 1 - 3 = -2 < 0,$$

$$\delta = 45 + \frac{3 \cdot 50 - 100}{-2} = 20 > 0,$$

je ne répondrai pas à : $\hat{r} = 100 - 45 - 3 \cdot (50 - 45) = 40$ questions non sues et je répondrai au hasard aux 15 autres.

N.B. — L'utilisation de la correction de continuité donne : $\hat{r}' = 100 - 45 - 3 (49 - 45) = 43$ questions.

Or la valeur exacte $\tilde{r}$ qui maximise $P_r(R)$ est en fait : 42 questions.

3. COMPARAISON DES SOLUTIONS OPTIMA EXACTES $\tilde{r}$ ET APPROCHÉES $\hat{r}$ SUR QUELQUES EXEMPLES

Pour juger de la qualité des approximations $\hat{r}(s)$ et $\hat{r}'(s)$ de la solution optimum $\tilde{r}(s)$ nous avons déterminé celles-ci sur quelques cas particuliers :

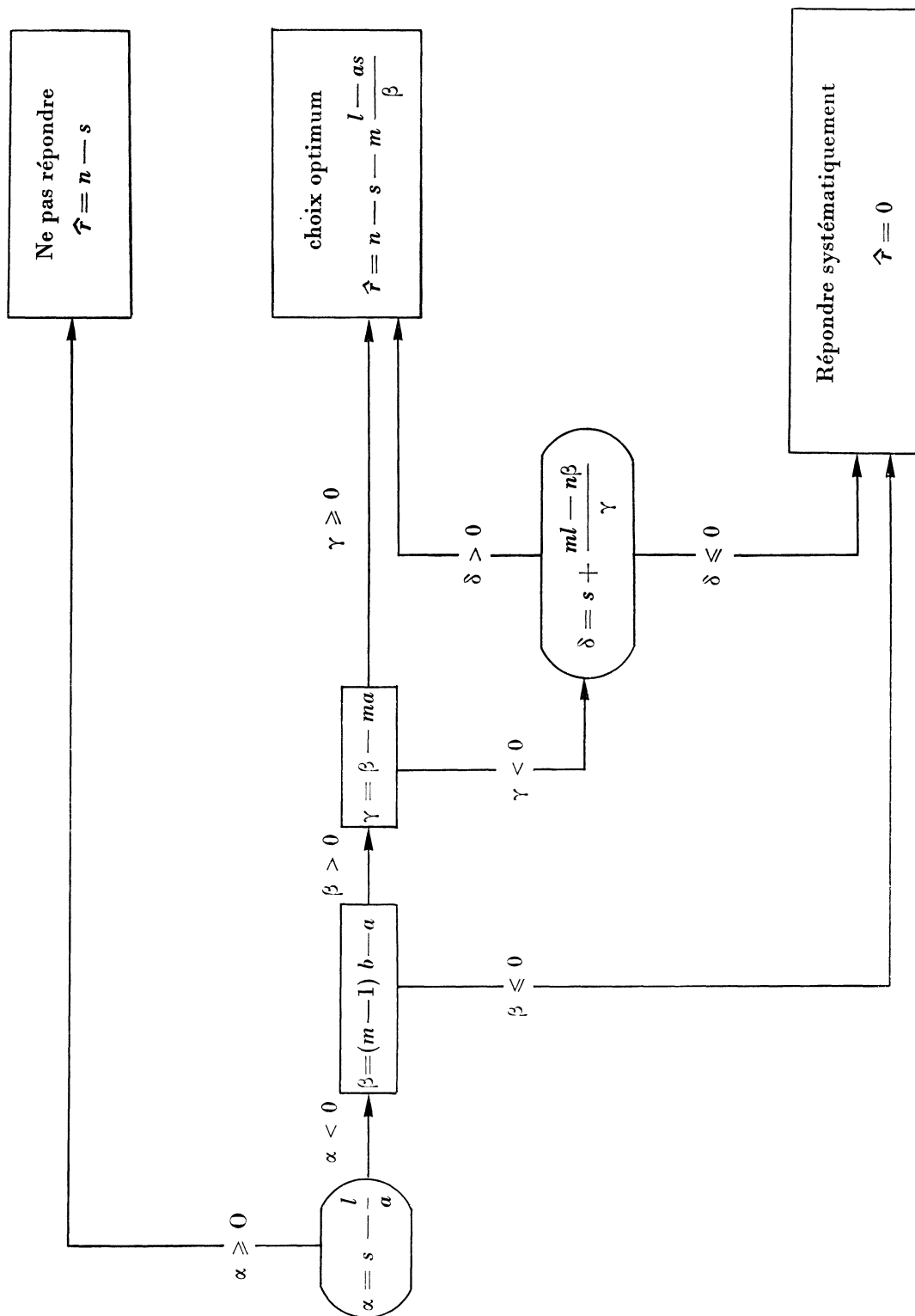


Diagramme déterminant le comportement optimum

- 1) $a = 1, b = 1; n = 40; m = 3; l = 10, 20, 30$ respectivement.
- 2) $a = 1, b = 2; n = 40; m = 2; l = 10, 20, 30$ respectivement.
- 3) $a = 2, b = 1; n = 40; m = 5; l = 20, 40, 60$ respectivement.

La solution $\hat{r}(s)$ est en trait plein, $\hat{r}'(s)$ en pointillé ; à s donné, il peut exister plusieurs solutions exactes $\tilde{r}(s)$ (égales rigoureusement ou égales à la précision 10^{-5} des tables dont nous disposons).
(Cf. les figures 7, 8 et 9.)

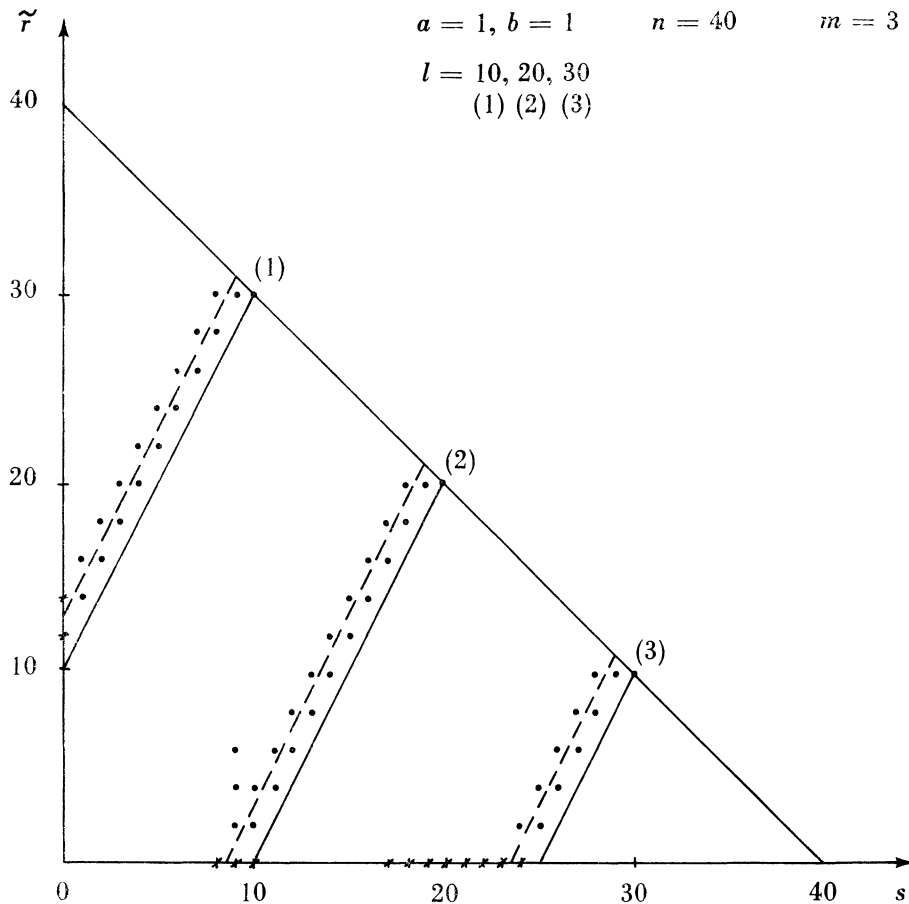


Fig. 7

Nous constatons que même pour la valeur choisie, très modérée, $n = 40$, et pour les paramètres pris, l'approximation gaussienne n'est pas mauvaise.

Pour terminer, donnons encore un exemple numérique sous une forme différente :

Je fais un test Q.C.M. de : $n = 90$ questions ; le seuil d'admissibilité est : $l = 45$ a ; je connais $s = 40$ réponses. Selon les coefficients de pondération a et b ($a, b = 1, 2, 3$) et pour des questionnaires respectivement à $m = 2, 3, 4, 5$ choix, les solutions optima :

$\tilde{r}$ exactes,

$\hat{r}$ données par l'approximation gaussienne,

$\hat{r}'$ données par l'approximation gaussienne avec correction de continuité,

écrites dans cet ordre sont données par les tableaux tracés pages 48 et 49.

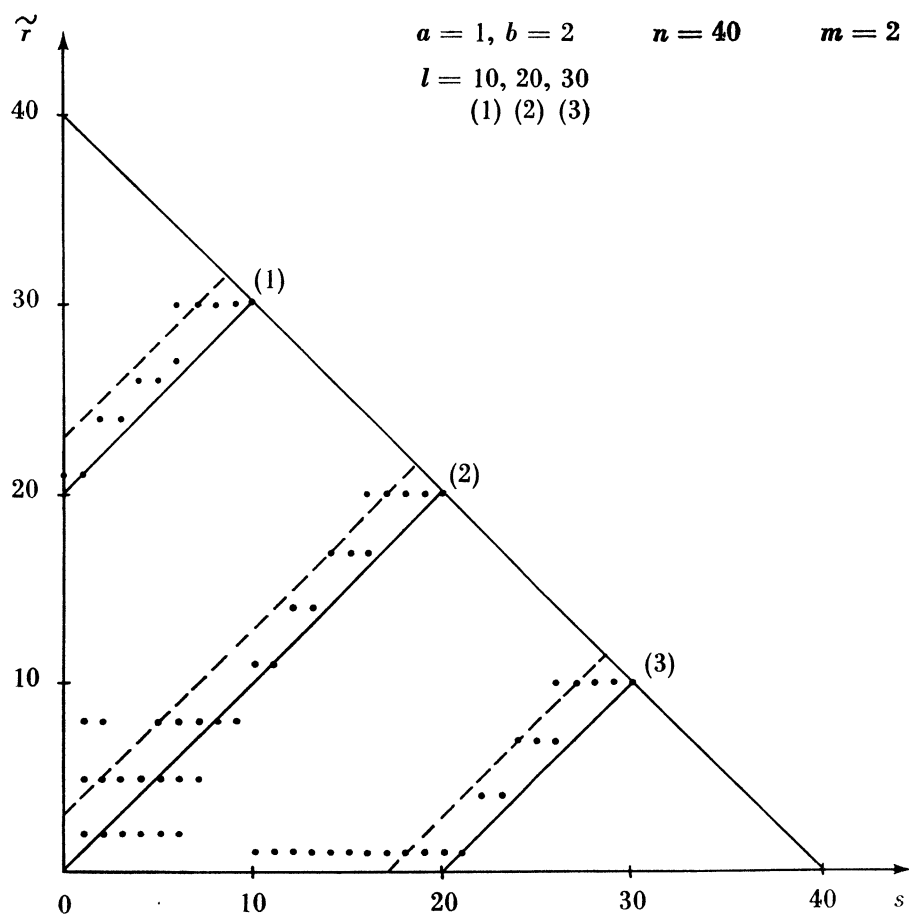


Fig. 8

$\begin{array}{c} b \\ \backslash a \end{array}$	1	2	3
1	1 0 0	42 40 43	45 45 47
2	0 0 0	1 0 0	35 30 35
3	1 0 0	0 0 0	1 0 0

$m = 2$

$\begin{array}{c} b \\ \backslash a \end{array}$	1	2	3
1	37 35 38	45 45 46,5	45 47 48,2
2	0 0 0	37 35 38	45 42,5 44,4
3	1 0 0	15 5 12,5	37 35 38

$m = 3$

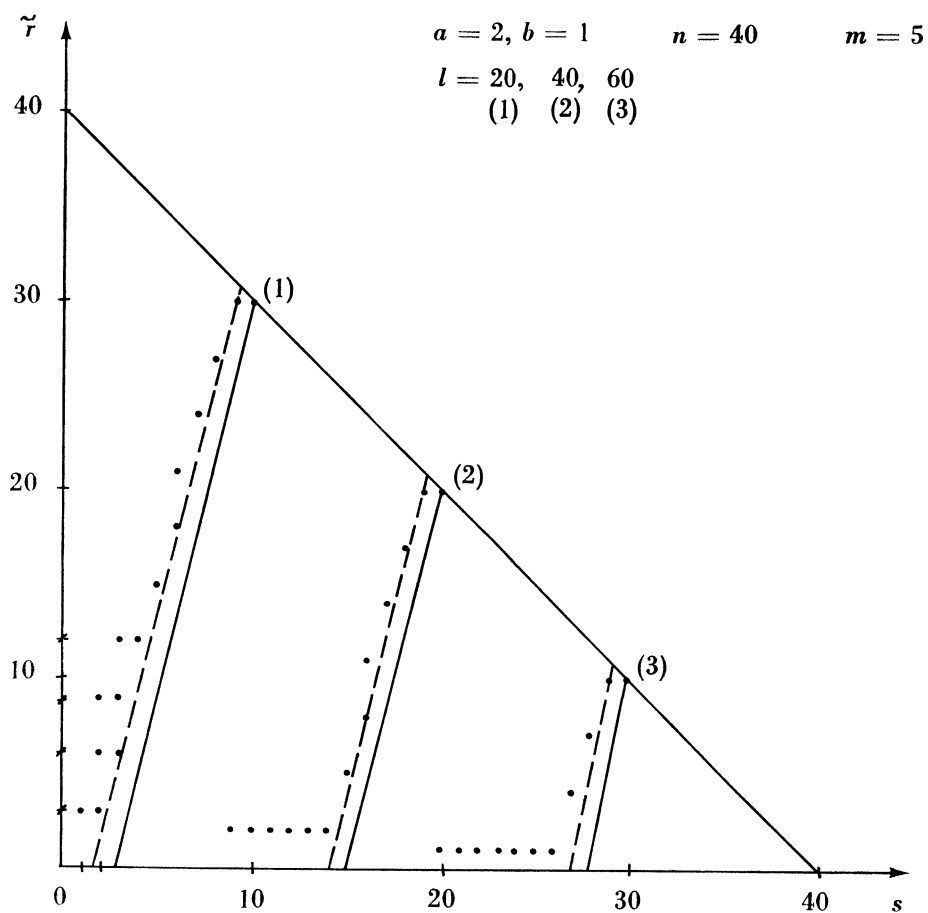


Fig. 9

$\begin{array}{c} b \\ \backslash \\ a \end{array}$	1	2	3
1	41 40 42	45 46 47,2	45 47,5 48,5
2	18 10 16	41 40 42	45 44,3 45,7
3	1 0 0	35 30 33,3	41 40 42

$m = 4$

$\begin{array}{c} b \\ \backslash \\ a \end{array}$	1	2	3
1	43 41,7 43,3	45 46,4 47,5	45 47,7 48,6
2	30 25 28,8	43 41,7 43,3	45 45 46,2
3	1 0 0	40 35 37,5	43 41,7 43,3

$m = 5$

Résumé.

Nous étudions ici le problème du *comportement optimum dans un test Q.C.M.* selon les connaissances du candidat et les méthodes de dépouillement utilisées.

Pour les tests Q.C.M. où les mauvaises réponses sont sanctionnées, nous mettons en évidence, sous certaines conditions, l'existence d'un *comportement optimum intermédiaire*. Celui-ci est déterminé dans les conditions de l'approximation gaussienne respectivement sans et avec correction de continuité. Des exemples numériques sont fournis où l'on précise à la fois les optima exacts et ceux fournis par les approximations.