MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. D'ADHÉMAR

Quelques classes de groupoïdes non-associatifs

Mathématiques et sciences humaines, tome 31 (1970), p. 17-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__31__17_0>

M.S.H. (8e année, n° 31, 1970, p. 17-31)

QUELQUES CLASSES DE GROUPOÏDES NON-ASSOCIATIFS *

par

C. D'ADHÉMAR [1]

Si une grande partie des travaux d'algèbre sur les structures définies par la donnée d'une seule opération binaire est consacrée aux systèmes associatifs (semi-groupes, monoïdes et divers autres affaiblissements de la structure de groupe), les structures non associatives méritent également l'attention.

Une littérature mathématique déjà ancienne s'est développée autour des quasi-groupes et des boucles, à propos notamment de la construction des « géométries » planes finies, ou des plans en bloc incomplets équilibrés de la statistique ; la revue a consacré, sous la signature de B. Monjardet, une série d'article sur ces sujets (M.S.H., *n*° *18, 19, 21, 23*).

L'intérêt pour d'autres classes de groupoïdes non associatifs, à l'origine duquel se trouvent notamment les travaux, dans les années 40, d'Etherington et de Popova sur les « logarithmétiques » ([7] et [11]) *a été renforcé au cours des deux dernières décennies par les recherches sur les opérations susceptibles de représenter convenablement le concept de « moyenne », ou de « résumé », d'un ensemble de données.*

Sont témoins de cet intérêt des travaux récents d'économétrie [9], [12], [13], *et en France, des thèses soutenues ces dernières années, comme celles de Ruedin* [1] *et de Soublin* [3].

Il reste néanmoins un large champ ouvert à des recherches ultérieures dans ce domaine ; en particulier, les interprétations de certaines classes de groupoïdes en termes de configurations géométriques sont encore pour l'essentiel à élucider.

M. Barbut.

Un groupoïde $(X, \circ)$ *est constitué par un ensemble non vide* X *et une loi de composition interne* $\circ$ *partout définie sur* X. On notera xy au lieu de $x \circ y$, le composé de x et de y.

Les lois de composition étudiées ici sont des généralisations des opérations de moyennes pondérées dans **R** ou **Q** :

$$xy = px + qy$$

avec :

$$p \text{ et } q \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad p + q = 1,$$

ou des opérations de même type qu'on peut définir dans tout abélien (G, +) ayant deux automorphismes α et β tels que $\alpha + \beta$ soit l'application identique :

$$xy = \alpha x + \beta y. \tag{A}$$

*. Communication au Séminaire sur les relations d'intermédiaire, Aix-en-Provence, septembre 1969.

1. Centre de Mathématique Sociale, EPHE, VIe section.

Si (G, +) est ordonné, on exigera en général, en plus, la monotonie de α et de β.

Le produit xy peut être interprété comme une « moyenne » de x et y, un « intermédiaire » entre x et y. En effet, sur **R**, on a :

$$x < y \Rightarrow x \leqslant xy \leqslant y.$$

Il en est de même selon la définition (A) pour tout abélien ordonné. Il est aisé de montrer que ces moyennes pondérées ne sont pas des opérations associatives.

(Si par exemple, $p = q = \frac{1}{2}$, $\dfrac{\dfrac{x+y}{2}+z}{2}$ est en général différent de $\dfrac{x+\dfrac{y+z}{2}}{2}$.)

On ne pourra donc, sans précaution, définir un agrégé de n points de X pour $n > 2$. Il faudra, comme dans le cas du calcul barycentrique, des conventions supplémentaires.

Après avoir mis en évidence les propriétés des moyennes pondérées, on étudiera les groupoïdes qui vérifient tout ou partie de ces propriétés et les possibilités de doter ces groupoïdes d'*ordres compatibles avec l'opération*, c'est-à-dire d'ordres tels que :

$$x < y \Rightarrow \forall z \quad , \quad zx < zy \qquad \text{et} \qquad xz < yz,$$

autrement dit, l'ordre sur X doit être tel que les translations à gauche et à droite soient des morphismes d'ordre [1].

Dans le cas d'une moyenne pondérée du type (A) construite à partir d'un groupe abélien G, *si G est ordonné et si α et β sont monotones, alors, l'ordre sur G est compatible avec l'opération (A)* :

$$x < y \Rightarrow \alpha x < \alpha y$$

puisque α est monotone et :

$$xz = \alpha x + \beta z < \alpha y + \beta z = yz$$

car l'ordre est compatible avec + ; de même : zx < zy.

En outre :

$$\alpha x + \beta x = x < xy < y.$$

1. PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS DE MOYENNES PONDÉRÉES DE TYPE (A)

On vérifie sans peine que si (G, +) est un abélien, et si xy est défini selon (A), (G, ∘) satisfait aux conditions suivantes :

α) I- IDEMPOTENCE

$$xx = x, \quad \forall x \in X.$$

Interprétation : agréger un élément avec lui-même le redonne ; la « moyenne » d'un élément avec lui-même est cet élément.

β) R- RÉGULARITÉ

$$xy = xz \Rightarrow y = z \qquad \forall x, \forall y, \forall z \in X.$$
$$yx = zx \Rightarrow y = z$$

1. La translation à gauche d'opérateur a est l'application de X dans lui-même qui, à tout x, fait correspondre le produit ax, pour un a élément de X fixé.

Dans un groupoïde (X, ∘) la régularité signifie que les translations à gauche et à droite sont injectives.

Ce qui s'écrit encore :

$$x \neq y \Rightarrow ax \neq ay \qquad \text{et} \qquad xa \neq ya$$

si X vérifie la condition R, les translations sont bien injectives, et réciproquement, si les translations sont injectives, X est régulier.

γ) D- AUTODISTRIBUTIVITÉ OU DISTRIBUTIVITÉ de l'opération par rapport à elle-même.

$$x\,(yz) = (xy)\,(xz) \qquad \forall x, \forall y, \forall z \in X$$
$$(yz)\,x = (yx)\,(zx)$$

a) Un groupoïde (X, ∘) est distributif si et seulement si, les translations à gauche et à droite sont des endomorphismes.

La condition est nécessaire :

Supposons (X, ∘) distributif et soit f la translation à gauche définie par f(x) = ax pour tout x de X.

$$f(xy) = a(xy) = (ax)\,(ay) = f\,(x)\,f\,(y)$$

f est donc bien un endomorphisme. Même démonstration pour les translations à droite.

La condition est suffisante :

Si les translations sont des endomorphismes de (X, ∘), pour tout a ∈ X, x → f(x) = ax est tel que :

$$a\,(xy) = f\,(xy) = fx\,fy = (ax)\,(ay)$$

et X vérifie la condition D.

b) Interprétation géométrique de la condition D.

Dans le plan affine avec :

$$xy = px + qy \qquad p, q \geqslant 0 \quad \text{et} \quad p + q = 1$$

la propriété D traduit le théorème de Thalès :

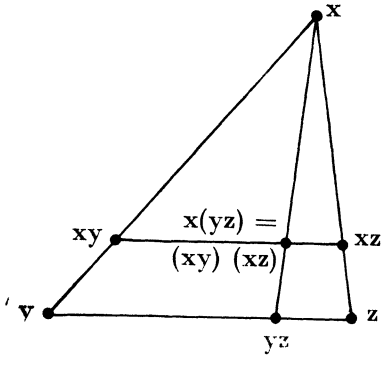

Fig. 1

Interprétation en terme d'agrégation : cette propriété n'est pas forcément à exiger.

δ) M- ÉCHANGE DES MOYENS

$$(xy)\,(zt) = (xz)\,(yt)\ \forall x, \forall y, \forall z, \forall t \in X.$$

a) La condition M est un affaiblissement de la commutativité et de l'associativité réunies. En effet, si (X, ∘) est commutatif et associatif, on a :

$$(xy)\,(zt) = xyzt = xzyt = (xz)\,(yt)\,;$$

b) Un groupoïde (X, ∘) qui possède un élément neutre e et vérifie la condition M, est commutatif et associatif :

$$xy = (ex)\,(ye) = (ey)\,(xe) = yx$$

donc (X, ∘) est commutatif et :

$$(xy)z = (xy)\,(ez) = (xe)\,(yz) = x(yz),$$

donc (X, ∘) est associatif.

a) et *b*) impliquent que dans un groupoïde ayant un élément neutre, la condition M est équivalente à l'associativité et à la commutativité réunies.

En l'absence d'élément neutre, on peut avoir M sans associativité ni commutativité (moyenne pondérée dans **R**).

c) *Interprétation de la condition M en terme de morphismes.*

Soient (E, .) et (X, ∘) deux groupoïdes, f et g deux applications de E dans X. On peut définir une application composée f.g, de E dans X par : $f.gx = fx \circ gx$ pour tout x de E ; ainsi pour deux applications d'un ensemble E dans **R**, il est courant de parler de la somme de deux applications : f + g, définie par :

$$\forall x, (f + g)\,x = fx + gx.$$

Si f et g sont deux homomorphismes de (E, .) dans (X, ∘), il n'en est pas forcément de même de f.g, à moins que X ne vérifie M :

Un groupoïde (X, ∘) vérifie la condition M si et seulement si, pour tout groupoïde (E, .) et tout couple d'homomorphismes f, g de (E, .) dans (X, ∘), le composé f.g est aussi un homomorphisme.

En effet :

i) *La condition est nécessaire :*

Si (X, ∘) vérifie la condition M, soient f et g deux homomorphismes d'un groupoïde (E, .) dans (X, ∘) :

$$f\,.\,g\,(x\,.\,y) = f\,(x\,.\,y) \circ g\,(x\,.\,y) = (fx \circ fy) \circ (gx \circ gy)$$

et la condition M implique :

$$(fx \circ fy) \circ (gx \circ gy) = (fx \circ gx) \circ (fy \circ gy) = (f\,.\,gx) \circ (f\,.\,gy)$$

et f.g est bien un homomorphisme.

ii) La condition est suffisante.

Si pour tout groupoïde (E, .) et tout couple d'homomorphismes f, g de (E, .) dans (X, ∘), f.g est un homomorphisme, alors X vérifie la condition M.

En effet, soit E le groupoïde libre engendré par deux éléments a et b (E est l'ensemble des « mots » avec parenthèses construits avec les lettres a et b). La donnée de deux images f(a) et f(b) dans X définit un homomorphisme de E dans X . f(x) s'obtient en remplaçant dans x, a par f(a) et b par f(b) et en gardant le même jeu de parenthèses. Ainsi par exemple :

$$f((a\,(ba))\,a) = (fa\,(fb\,fa))\,fa.$$

Soient x, y, z, t, quatre éléments quelconques de X, on peut par le procédé indiqué, définir deux homomorphismes f et g de E dans X par :

$$fa = x \quad fb = y\,; \qquad ga = z \qquad gb = t,$$

alors :

$$(xy)\,(zt) = (fafb)\,(gagb) = f.g\,(ab)$$

et f.g étant un homomorphisme :

$$f.g\,(ab) = (f.g\,a)\,(f.g\,b) = (faga)\,(fbgb) = (xz)\,(yt)$$

finalement :

$$(xy)\,(zt) = (xz)\,(yt).$$

Pour tout quadruplet xyzt, on pourra construire des homomorphismes f et g et la condition M sera toujours vérifiée.

En fait, il suffit que les composés des homomorphismes de $(X^n, \circ)$ dans $(X, \circ)$ pour un entier $n \geqslant 2$ soient des homomorphismes pour que X vérifie la condition M.

Démonstration pour $n = 2$:

$(X^2, \circ)$ est le groupoïde dont l'ensemble sous-jacent est le produit cartésien $X \times X$, et l'opération $\circ$ celle définie par :

$$(x_1, x_2) \circ (x'_1, x'_2) = (x_1\,x'_1, x_2\,x'_2).$$

Soient x, y, z, t, quatre éléments quelconques de X et f et g, les « projections » de X^2 dans X définies par :

$$f(x_1, x_2) = x_1$$
$$g(x_1, x_2) = x_2.$$

Alors : $(xy)\,(zt) = (f\,(x, z)\,f\,(y, t))\,(g\,(x, z)\,g\,(y, t)) =$
$= f\,((x, z) \circ (y, t))\,g\,((x, z) \circ (y, t)) = f.g\,((x, z) \circ (y, t)),$
puisque f.g est un homomorphisme et :
$= f.g\,(x, z)\,f\,.\,g\,(y, t) = (xz)\,(yt)$
et X vérifie bien la condition M.

Ainsi le composé, au sens ci-dessus, de deux homomorphismes d'un groupoïde E dans un groupe abélien G est un homomorphisme car les groupes abéliens vérifient M. Il en est de même pour les applications linéaires d'espaces vectoriels. La condition M permet de généraliser certains aspects de l'algèbre

linéaire ; par exemple, le fait que l'ensemble H (W, V) des applications linéaires d'un module W dans un module V puisse lui-même être muni d'une structure de module.

En effet, l'ensemble H (E, X) des homomorphismes de tout groupoïde (E, .) dans un groupoïde (X, ∘), vérifiant M, avec l'opération définie plus haut vérifie aussi la condition M car si : f, g, h, l ∈ H (E, X),

$$(f.g)\,(h.l)\,x = (fxgx)\,(hxlx)$$
$$= (fxhx)\,(gxlx) = (f.h)\,(g.l)\,x$$

pour tout x, donc :

$$(f.g)\,(h.l) = (f.h)\,(g.l).$$

d) Interprétation géométrique de la condition M.

Dans les cas des points du plan, ou de l'espace affine, et de l'opération $xy = \frac{x+y}{2}$, la condition M est équivalente à la propriété, bien connue en géométrie : les droites joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère, se coupent en leur milieu.

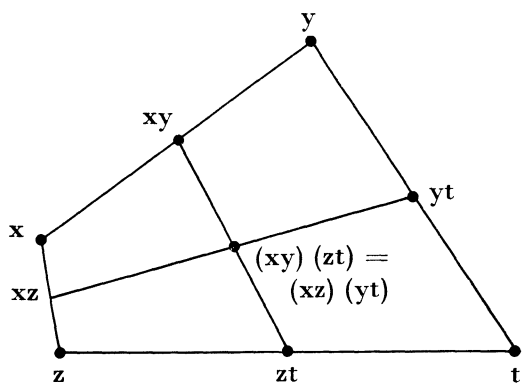

Fig. 2

Cette propriété se généralise au cas où $p + q = 1$ avec $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ et $p \neq q$.

Ordres et moyennes.

Une opération qui vérifie seulement certaines de ces propriétés, mais non toutes, peut difficilement être interprétée comme une moyenne. Ainsi, tout groupe abélien (G, +) satisfait à la condition M :

$$(x + y) + (z + t) = (x + z) + (y + t)$$

par commutativité et associativité ; mais l'addition, ou la multiplication dans **R**, compatibles avec l'ordre habituel, ne sont pas interprétables comme des opérations de moyenne.

Par contre, dans un groupoïde idempotent ordonné, on a :

$$x < y \Rightarrow x = xx < xy \quad \text{et} \quad xy < yy = y.$$

Soit : $x < xy < y$; le produit xy est intermédiaire pour l'ordre, entre x et y.

Si l'ordre n'est pas total mais détermine sur X une structure de treillis, on a :

$$x \wedge y < xy < x \vee y,$$

xy est dans l'intervalle [x y] si on prend pour définition de l'intervalle, l'ensemble des éléments compris entre $x \vee y$ et $x \wedge y$, comme il est courant de le faire.

2. COMBINATOIRE DES PROPRIÉTÉS I.M.R.D.

Les quatre propriétés indiquées ne sont pas indépendantes ; ainsi :

$$(D \text{ et } R) \Rightarrow I : x(xy) = (xx)(xy) \text{ d'après D}$$
$$\text{et } R \Rightarrow x = x^2$$
$$(M \text{ et } I) \Rightarrow D : x(yz) = (xx)(yz) = (xy)(xz).$$
$$\text{(I)} \qquad \text{(M)}$$

On obtient le schéma d'implication :

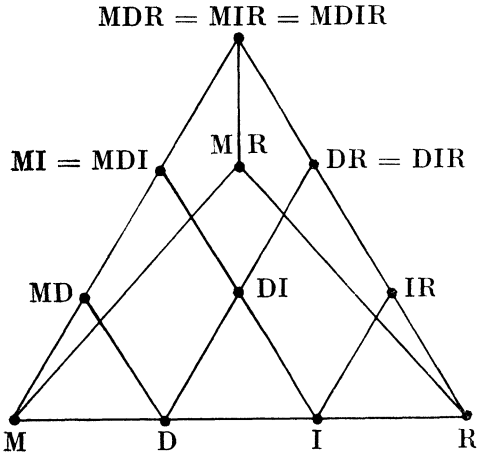

Fig. 3

Dans le cas des groupoïdes ordonnés, il y a des implications supplémentaires. Ainsi, un quasi-groupe (cf. définition paragraphe suivant) commutatif, vérifiant la condition D et ayant un ordre compatible avec son opération, vérifie aussi la condition M (cf. [2]), et :

Un groupoïde vérifiant les propriétés D et R (donc aussi I) et ayant un ordre total archimédien (cf. définition, p. 30) compatible avec son opération, vérifie aussi la condition M (cf. [6]).

2. 2. *Cas des groupes et des quasi-groupes.*

Nous allons situer sur le schéma d'implication, deux structures algébriques bien connues : les groupes et les quasi-groupes.

1) *Les groupes.*

— Par définition, tous les groupes sont réguliers ; par contre, il n'y a pas de groupe distributif en dehors du groupe trivial car : si x (yz) = (xy) (xz), l'associativité et la régularité des groupes impliquent que z = xz et x = e pour tout x.

— Il n'y a pas non plus de groupe idempotent autre que le groupe trivial car : si xx = x la régularité implique que x = e pour tout x.

— Les seuls groupes vérifiant la condition M sont les groupes abéliens, car :

$$(ex)\,(ye) = (ey)\,(xe) = yx.$$

On a d'ailleurs vu que dans un groupoïde avec élément neutre, la condition M est équivalente à la commutativité et l'associativité réunies.

Les groupes intervenant dans ce schéma sont donc : tous les groupes (en R), tous les groupes abéliens (en MR donc aussi en M, et ce sont les seuls qu'on trouve en M).

2) *Les quasi-groupes.*

Un quasi-groupe est un groupoïde vérifiant la propriété :

$$\forall\ a, \forall\ b, \exists\ x \text{ unique tel que } ax = b,$$
$$\forall\ a, \forall\ b, \exists\ y \text{ unique tel que } ya = b.$$

Autrement dit, un *quasi-groupe est un groupoïde dont les translations à gauche et à droite sont des bijections.*

Les groupes sont donc des quasi-groupes : en fait, ce sont les quasi-groupes associatifs.

Un quasi-groupe fini a pour table de Pythagore un carré latin.

Les quasi-groupes sont tous réguliers, par définition.

Les quasi-groupes distributifs sont donc DR et même DIR, puisque DR implique I.

Le schéma relatif aux quasi-groupes se réduit donc à :

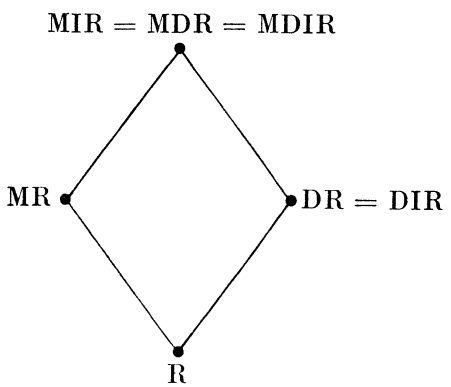

Fig. 4

Les quasi-groupes vont jouer un rôle particulier dans l'étude des groupoïdes distributifs et réguliers.

3. LES GROUPOÏDES DISTRIBUTIFS

Dans un groupoïde distributif:

— on peut définir *la puissance* $n^{\text{ième}}$ x^n *de tout élément* x, *pour tout entier* n,

— et $x^n = x^3$ *pour tout entier* $n \geqslant 3$.

Dans un groupoïde non associatif, on ne peut, sans précaution, parler de puissance $n^{\text{ième}}$ (en général $x\,(xx) \neq (xx)\,x$) mais dans un groupoïde vérifiant D : $x\,(xx) = (xx)\,(xx) = (xx)\,x$ qu'on pourra noter x^3 ; de même on montre que $x^2x^2 = xx^3 = x^3x$ qu'on notera x^4 ; et pour tout n, quel que soit le jeu de parenthèses, on obtient le même résultat, noté x^n.

D'autre part, $x^4 = x^3\,x^3$ car :

$$x^4 = xx^3 = x\,(x\,(xx)) = xx\,[x\,(xx)] = xx\,[(xx)\,(xx)] = (xx)^2\,(xx)^2 = x^3\,x^3. \tag{1}$$

x^3 *est idempotent pour tout* x :

$$x^3\,x^3 = (x\,(xx))\,(x\,(xx)) = (xx)\,(xx) = x^3 \tag{2}$$

(1) et (2) impliquent que $x^4 = x^3$; de même $x^5 = x^3$, etc.

On démontre que les idempotents forment un idéal, et que pour tout triplet (x, y, z), les produits (xy) z et x (yz) sont idempotents.

Soit $X^3 = X \circ X \circ X$ l'ensemble des éléments de X qui peuvent s'écrire sous forme de produit de trois éléments de X ; alors $X \circ X \circ X$ *est l'ensemble des éléments de* X *qui sont idempotents.*

Si $X \circ X$ est l'ensemble des éléments de X qui peuvent s'écrire sous forme de produit de deux éléments de X, alors :

$$X \circ X = X \Rightarrow X \text{ est idempotent.}$$

En effet, si $X \circ X = X$, $X \circ X \circ X = X$; or $X \circ X \circ X$ est l'ensemble des idempotents de X, et inversement, si X est idempotent, pour tout x, $x = xx$ donc $X \circ X = X$.

3. 2 *Groupoïdes distributifs ayant un seul idempotent O.*

Alors, $X \circ X \circ X = \{O\}$ et pour tout x : $xO = xx^3 = x^4 = x^3 = O$; l'élément idempotent est absorbant.

L'opération est trivialement associative car :

$$x\,(yz) = O \qquad \text{et} \qquad (xy)\,z = O$$

d'où :

$$x\,(yz) = (xy)\,z.$$

Un groupoïde distributif ayant un seul idempotent est donc un semi-groupe de cube O :

$$(X \circ X \circ X = \{\,O\,\}).$$

Inversement, tout semi-groupe de cube O est un groupoïde distributif ayant un seul idempotent : l'élément O.

En effet, dans un semi-groupe de cube O : $x(yz) = O = (xy)(xz)$ la distributivité est bien vérifiée, et O est le seul idempotent car pour tout $x \neq O$, $x^2 = x$ entraînerait $x^3 = x$, or $x^3 = O$ pour tout x.

3. 2. 2. *Procédé de construction de tout groupoïde distributif ayant un seul idempotent.*

Sur tout groupoïde X distributif ayant un seul idempotent, on considère la partition suivante en trois classes :

— Une classe à un élément : l'élément idempotent O ;

— La classe X_1 des éléments qui ne peuvent être décomposés en produit de deux éléments de X ;

— La classe X_2 des éléments différents de O qui peuvent être décomposés en produit de deux éléments de X.

Un élément de X_2 ne peut être produit que de deux éléments de X_1, tout autre produit étant soit du type xO ou Ox donc égal à O, soit appartenant à $X \circ X \circ X$, donc aussi égal à O.

Le produit de deux éléments de X_1 peut être, soit O, soit un élément de X_2. On a donc toujours :

$$| X_2 | \leqslant | X_1 |^2.$$

La table d'un groupoïde distributif ayant un seul idempotent est donc du type suivant :

	O	X_1	X_2
O	O	O	O
X_1	O	$X_2 \cup \{ O \}$	O (car inclus dans X^3)
X_2	O	O (car inclus dans X^3)	O (car inclus dans X^3)

Inversement, à partir de tout ensemble X, on peut construire un groupoïde D ayant un seul idempotent, en partitionnant X en trois classes comme précédemment avec $| X_2 | \leqslant | X_1 |^2$ et en dressant une table du type précédent qui est bien la table d'un monoïde de cube O.

3. 2. 3. *Ordre compatible avec l'opération d'un groupoïde distributif ayant un seul idempotent.*

Sur certains groupoïdes distributifs, on peut définir un ordre total compatible avec l'opération ; en particulier sur ceux ayant un seul idempotent, dont le sous-ensemble X_1 peut être partagé en deux parties :

X'_1 telle que $O \notin X'_1 \circ X'_1$;

X''_1 telle que $X''_1 \circ X = X \circ X''_1 = \{ O \}$;

et :

$| X_2 | = | X'_1 |^2$.

Autrement dit, le produit de deux éléments de X'_1 est différent de O et si x_1, x'_1, y_1, y'_1 sont quatre éléments de X'_1 alors :

$$(x_1, y_1) \neq (x'_1, y'_1) \Rightarrow x_1 x'_1 \neq y_1 y'_1.$$

Ces groupoïdes distributifs particuliers sont donc ceux dont la table est :

		X_1		
	O	X'_1	X''_1	X_2
O	O	O	O	O
X'_1	O	X_2	O	O
X''_1	O	O	O	O
X_2	O	O	O	O

X_1

Les seuls produits différents de O sont les produits de deux éléments de X'_1.

Tout ordre construit de la façon suivante est compatible avec l'opération :

Les éléments de X'_1 ordonnés de façon quelconque, suivis de ceux de X''_1, également dans un ordre quelconque, puis de ceux de X_2 ordonnés de la façon suivante : tout élément de X_2 s'écrit de façon unique sous forme de produit de deux éléments de X'_1. Soient $x_2 = x_1 x'_1$ et $y_2 = y_1 y'_1$ deux éléments quelconques de X_2 écrits sous forme de produits d'éléments de X'_1. On pose $x_2 < y_2$ si :

$$x_1 < y_1 \quad \text{dans} \quad X'_1,$$

ou :

$$x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad x'_1 \leqslant y'_1 \quad \text{dans} \quad X'_1,$$

cet ordre (qui est l'ordre lexicographique défini à partir de l'ordre sur X'_1) est bien total sur X_2 et compatible avec l'ordre de X'_1.

On prend enfin l'élément O comme plus grand élément de X.

On peut schématiser cet ordre de la façon suivante :

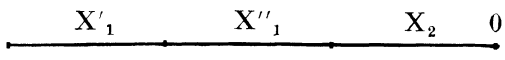

Fig. 5

ou mieux, sur le schéma suivant où l'ordre doit être lu de gauche à droite et de bas en haut :

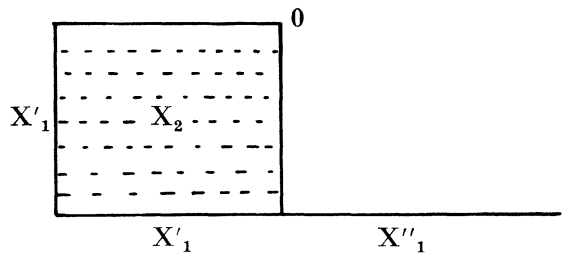

Fig. 6

On vérifie aisément que pour tout x, tout y et tout a éléments de X ainsi ordonnés, on a :

$$x < y \Rightarrow ax \leqslant ay \quad \text{et} \quad xa \leqslant ya.$$

Il ne peut y avoir d'ordre strictement compatible car si : $x > 0$, ou : $x < 0$, on a toujours $x^3 = 0$.

Si un ordre total peut être défini avec certains $x < 0$ et d'autres plus grands que 0, autrement dit avec des éléments dits positifs et d'autres dits négatifs, le produit d'un positif par un négatif doit être égal à 0.

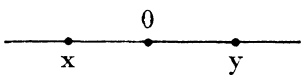

Fig. 7

Car :

et
$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow x\,y < 0\,y = 0 \\ y > 0 \Rightarrow x\,y > x\,0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\,y = 0.$$

Seuls certains ordres, sur certains groupoïdes distributifs ayant un seul idempotent, ont été étudiés ici. L'étude générale des ordres sur ce type de groupoïde est un cas particulier de l'étude des semi-groupes ordonnables. Cf. [6].

3. 3. *Décomposition des groupoïdes distributifs.*

La relation : $x \sim y \Leftrightarrow x^3 = y^3$, est une relation d'équivalence sur un groupoïde distributif. Une classe d'équivalence est donc composée de l'ensemble des éléments dont le cube est égal à un idempotent du groupoïde.

On démontre (cf. [1]) que cette équivalence est compatible avec l'opération.

Tout groupoïde distributif est donc décomposable en parties stables disjointes ayant un seul idempotent, et le cube de chaque élément est l'idempotent de sa classe dans la partition ainsi définie. Le groupoïde quotient est distributif et idempotent puisque chaque classe est stable.

Théorème de structure.

Tout groupoïde vérifiant la condition D est soit un semi-groupe de cube 0, soit un groupoïde DI de semi-groupes de cube 0.

L'étude des groupoïdes distributifs peut donc se ramener à celle :

— des groupoïdes distributifs n'ayant qu'un élément idempotent ;

— des groupoïdes distributifs et idempotents.

En fait, l'opération d'un groupoïde seulement distributif n'est pas interprétable comme une opération de moyenne et cette décomposition en classes n'ayant qu'un idempotent est triviale dans le cas des groupoïdes DI (dont l'opération peut s'interpréter comme une moyenne) car chaque classe est réduite à un élément et l'équivalence est alors l'égalité.

Exemples de DI.

— Les demi-treillis ;

— Les D ayant un élément neutre e.

En effet : $x = x(ee) = (xe)(xe) = x^2$.

— Les D tels que pour tout x et pour tout y, il existe au moins un a tel que $ya = x$.

Car : soit i un idempotent ; pour tout x, il existe a tel que $ia = x$, et les idempotents formant un idéal, x est idempotent.

Les quasi-groupes D sont dans ce cas.

Pour un procédé général de construction de groupoïdes D à partir d'un DI et d'une famille équipotente à ce DI de semi-groupe de cube O, voir [3].

Ordres sur les groupoïdes D.

Un groupoïde D est ordonnable si chaque semi-groupe de cube O qui le compose l'est ainsi que le groupoïde quotient DI et si les produits d'éléments de classes différentes respectent ces ordres.

4. LES GROUPOÏDES DR = DIR

Sur tout groupoïde D, on a défini une relation d'équivalence telle que le quotient soit un DI.

On étudie maintenant certains de ces DI : ceux qui sont réguliers (cf. [3]).

Un DR peut être défini comme un groupoïde dont les translations à gauche et à droite sont des endomorphismes injectifs (endomorphisme $\Leftrightarrow$ D, injectif $\Leftrightarrow$ R).

Un groupoïde dont les translations sont des bijections est un quasi-groupe et en particulier les DR finis sont les quasi-groupes D.

Théorème d'extension (cf. [3]).

Si X est un DR, il existe un quasi-groupe autodistributif $\tilde{X}$ et une injection i de X dans $\tilde{X}$, tel que tout morphisme de X dans un quasi-groupe Q se factorise de façon unique à travers $\tilde{X}$, X et $\tilde{X}$ ont même cardinal.

On identifie X à son image par l'injection i.

Tout groupoïde DR est donc un sous-groupoïde D d'un quasi-groupe D.

Certains quasi-groupes D, les quasi-groupes MI = DMI, sont tous construits à partir de groupes abéliens (cf. article de M. Barbut dans ce numéro).

Tout quasi-groupe $(G, \circ)$, vérifiant les conditions MI peut être muni d'une loi additive de groupe abélien $(G, +)$ et il existe deux automorphismes, α et $I - \alpha$ de $(G, +)$ tels que :

$$x \circ y = \alpha x + (I - \alpha) y.$$

On retrouve les moyennes pondérées du type (A) sur les groupes abéliens.

Tout groupoïde MDR = MDIR = MIR peut donc être obtenu comme sous-groupoïde d'un quasi-groupe MI construit à partir d'un groupe abélien; ou : les MDIR sont les sous-groupoïdes, des groupoïdes du type (A).

Les groupoïdes DR (qui ne sont pas MDIR) ne sont pas obtenus à partir des groupes abéliens, mais d'une classe un peu plus générale qui contient les groupes abéliens : les boucles commutatives de Moufang ou quasi-groupes commutatifs vérifiant la propriété :

$$(xy)\,(zx) = [(xy)\,z]\,x \qquad \text{(cf. [8])}.$$

En effet, tout quasi-groupe DR est construit par une opération du type (A) de moyenne pondérée sur une boucle commutative de Moufang (cf. [3]) et tout groupoïde DR, d'après le théorème d'extension, est un sous-espace d'un quasi-groupe DR.

4. 2. *Ordre sur les groupoïdes DR et MDIR.*

Si $(G, \circ, \geqslant)$ est un quasi-groupe MDI dont l'ordre $\geqslant$ est compatible avec l'opération $\circ$, le même ordre est compatible avec l'opération de groupe de G, et inversement si $(G, +, \geqslant)$ est un abélien ordonné et si α et $I - \alpha$ sont monotones, le même ordre est compatible avec l'opération $\circ$ de G. *Les problèmes d'ordre pour les quasi-groupes MI dérivent donc de ceux des groupes* (cf. [6]).

Quant aux DR, l'existence d'un ordre implique, sous de larges conditions, la propriété M (cf. [3]).

Dans un quasi-groupe, un ordre total est toujours un ordre strict car si $x < y$, ax ne peut être égal à ay, en raison de la régularité, et est donc strictement plus petit.

Dans le cas fini, un quasi-groupe ne peut être totalement ordonné, car si a était le plus petit élément, on devrait avoir $ax = a$ pour tout x. On sait d'ailleurs qu'un groupe fini ne peut être ordonné totalement.

4. 3. *Type particulier de groupoïdes MDIR.*

Un type particulier de groupoïdes MDIR a été étudié par Aczel et Fuchs (cf. [9] et [6]) : les MDIR avec un ordre total, strict, et archimédien en ce sens que pour tout triplet $x < y < z$, il existe un entier n tel que, en multipliant x par z n fois à gauche et à droite, on ait :

$$[z\,(z \ldots\ldots (zx))] > y\,[((xz) \ldots\ldots z)] > y$$

et dualement.

Pour tout groupoïde commutatif de ce type, *il existe une injection* $f : X \to \mathbf{R}$, *telle que* :

$$f(xy) = \tfrac{1}{2}\,[f(x) + f(y)]$$

et f *est un morphisme d'ordre.*

Cette injection est unique à une transformation linéaire près.

On peut vérifier que l'ordre archimédien défini plus haut pour les groupoïdes MDIR correspond au transfert par f^{-1} de l'ordre archimédien du groupe $(\mathbf{R}, +)$.

Si l'on n'exige pas la commutativité, mais la propriété suivante : que le produit de deux coupures soit une coupure [1], l'injection $f : X \to \mathbf{R}$ est du type :

$$f(xy) = p\, f(x) + (1 - p)\, f(y).$$

Autrement dit, X *est alors isomorphe (isomorphisme pour* $\circ$ *et* $\geqslant$*) à un sous-ensemble convexe de* **R** *avec une opération de moyenne pondérée.*

Ceci rejoint les résultats trouvés pour les quasi-groupes I.M.R.D., totalement ordonnés : si l'ordre est archimédien, celui du groupe abélien à partir duquel est construit le quasi-groupe l'est aussi et on sait (cf. [6]) que tout groupe archimédien est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.

Si l'on supprime l'hypothèse d'idempotence (cf. [6]), l'injection $f : X \to \mathbf{R}$ est strictement isotone et du type :

$$f(xy) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

avec : α, β réels > 0, γ réel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ruedin, S., « Groupoïdes distributifs », *C.R.A.S.*, t. 262 A, pp. 985-988.

[2] Stein, K. S., « On the foundations of quasi-group », *Trans. Am. Math. Soc.*, 85, 1957, pp. 229-256.

[3] Soublin, J.-P., « Médiations », *C.R.A.S.*, t. 263 A, pp. 49-50 et 115-117 et « Étude algébrique de la notion de moyenne », thèse à paraître dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dernier fascicule, 1970, Gauthier-Villars.

[4] Barbut, M., « Sur une classe de monoïdes pouvant servir à des agrégations de critères », in *La décision*, II, C.N.R.S., 1969.

— « Une classe de quasi-groupes qui peuvent servir à représenter des moyennes », dans ce numéro.

[5] Frink, O., « Symetric and self-distributive systems », *Amer. Math. Monthly*, t. 62, 1955, pp. 697-707.

[6] Fuchs, L., *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, 1963.

[7] Etherington, « Non-associative arithmetics », *Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh*, vol. 62, 1949, pp. 441-453.

[8] Bruck, R. H., *A survey of binary systems*, Springer Verlag, Berlin, 1958.

[9] Aczel, J., « On mean values », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 54, 1948, pp. 392-400.

— *Lectures on functional equations*, Academic Press, New York, 1966.

[10] Murdock, D. C., « Quasi-group which satisfy certain generalized associative laws », *Amer. J. Math.*, vol. 61, 1939, pp. 509-522.

[11] Popova, H., « Logarithmetics of finite quasi-groups » :

I. — *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, pp. 74-81, 1954.

II. — *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, pp. 109-115, 1956.

[12] Pfanzagl, J., *Theory of measurement*, Wiley, New York, 1968.

[13] Vind, K., *Mean groupoids*, Copenhague.

1. C'est-à-dire si (A, B) est une coupure de X avec $A < B$ et (A', B') une autre coupure de X, alors $(A \circ A', B \circ B')$ est une coupure de X. (Dans **R** avec la moyenne pondérée, il en est bien ainsi.)