

C. BENZAKEN

P. JULLIEN

Caractérisation des monoïdes dont toute partie est un sous-monoïde

Mathématiques et sciences humaines, tome 28 (1969), p. 53-57

[<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__53_0>](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__53_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DES MONOÏDES DONT TOUTE PARTIE EST UN SOUS-MONOÏDE

par

C. BENZAKEN et P. JULLIEN ¹

INTRODUCTION.

A un monoïde M , on peut associer le treillis complet $T(M)$ des sous-monoïdes de M (la partie vide de M étant conventionnellement prise pour un sous-monoïde). Réciproquement, étant donné un treillis T complet, peut-il être réalisé comme le treillis des sous-monoïdes d'un monoïde convenable ?

Dans cette perspective, nous examinerons ici les monoïdes, dont toute partie est sous-monoïde, c'est-à-dire dont le treillis $T(M)$ est le treillis de Boole 2^M . Nous en donnons une caractérisation complète.

I. — RAPPELS.

Nous rappelons qu'un *monoïde* ² est un ensemble E muni d'une loi de composition interne associative. En d'autres termes, la loi étant notée multiplicativement par juxtaposition, quels que soient x, y, z dans E , on a : $x(yz) = (xy)z$.

Un *sous-monoïde* du monoïde E est une partie F , stable pour l'opération interne, ce qui veut dire que le composé xy de deux éléments x et y de F appartient toujours à F .

A priori, il n'y a aucune raison pour qu'une partie quelconque d'un monoïde E , soit un sous-monoïde. Exemple : l'ensemble N des entiers est un monoïde pour la loi d'addition ; la partie formée des entiers impairs n'est pas un sous-monoïde.

Désignons par $\mathcal{M}$ la classe des monoïdes M tels que chacune de leurs parties est un sous-monoïde de M .

Propriété 1- $\mathcal{M}$ comprend des objets de toute cardinalité.

Preuve : donnons deux exemples.

1. Faculté des Sciences de Grenoble.

2. *N.D.L.R.* — L'usage qui tend à prévaloir est de désigner par demi-groupe un ensemble muni d'une loi binaire associative et de réserver le terme de monoïde au cas où il y a un *élément neutre* (cf. Mac Lane, S. et Birkhoff, G., *Algebra*, The MacMillan Co, 1967, 0. 61).

1) Soit E un ensemble quelconque non vide muni de la loi suivante :

Pour tout x et tout y de E : $xy = x$;

2) Soit E un ensemble totalement ordonné.

Prenons la loi : $xy = \text{Max}(x, y)$ (le plus grand de x ou de y).

A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier que dans ces deux cas on a une loi de monoïde (associativité) et que E muni de cette loi appartient bien à la classe $\mathcal{M}$.

II. — PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES.

Soit E un monoïde de la classe $\mathcal{M}$.

2-1. Pour tout x de E on a : $xx = x$. En d'autres termes E est un monoïde idempotent.

Cela tient au fait que $\{x\}$ est par hypothèse un sous-monoïde de E .

2-2. Soient a et b deux éléments distincts de E .

La partie $F = \{a, b\}$ étant un sous-monoïde de E , chacun des produits ab et ba vaut a priori a ou b . Il y a donc quatre cas. Le lecteur constatera qu'aucun d'eux ne conduit à une impossibilité.

Nous sommes donc amenés à définir quatre relations binaires sur E , qui sont respectivement :

$$\begin{array}{ll}
 x, y \in E & \\
 \text{def} & \\
 x P y = [xy = yx = x] & \text{qu'on lira « } x \text{ prime } y \text{ »,} \\
 \text{def} & \\
 x S y = [xy = yx = y] & \text{qu'on lira « } x \text{ seconde } y \text{ »,} \\
 \text{def} & \\
 x G y = [xy = x \text{ et } yx = y] & \text{qu'on lira « } x \text{ gauche } y \text{ »,} \\
 \text{def} & \\
 x D y = [xy = y \text{ et } yx = x] & \text{qu'on lira « } x \text{ droite } y \text{ ».}
 \end{array}$$

Il apparaît que :

— Les quatre relations sont *réflexives* (d'après 2-1).

— Les relations G et D sont *symétriques* $[x G y] \Leftrightarrow [y G x]$ et $[x D y] \Leftrightarrow [y D x]$.

— Les relations P et S sont *antisymétriques*, c'est-à-dire : $[x P y \text{ et } y P x] \Rightarrow [x = y]$ et de même $[x S y \text{ et } y S x] \Rightarrow [x = y]$.

— Enfin, les relations P et S sont *duales* ou *inverses* l'une de l'autre : $[x P y] \Leftrightarrow [y S x]$.

De ce fait, nous n'utiliserons que la relation P . En outre, aux isomorphismes près, il n'y a dans $\mathcal{M}$ que trois monoïdes à deux éléments distincts a et b , selon que $a P b$, $a G b$ ou $a D b$.

2-3. Soient a, b, c , trois éléments distincts de E .

Nous posons : $F = \{a, b, c\}$.

A priori, chacun des sous-monoïdes $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ est dans l'une des quatre situations indiquées en 2-2. Nous avons donc seize cas à envisager.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous, les conclusions de l'examen des seize cas.

	$b P c$	$c P b$	$b G c$	$b D c$
$a P b$	1 $a P c$	$a P c$ ou $c P a$ $a G c$ ou $a D c$	2 $a P c$	2 $a P c$
$b P a$	$a P c$ ou $c P a$ $a G c$ ou $a D c$	1 $c P a$	2 $c P a$	2 $c P a$
$a G b$	2 $a P c$	2 $c P a$	3 $a G c$	4 <i>impossible</i>
$a D b$	2 $a P c$	2 $c P a$	4 <i>impossible</i>	3 $a D c$

En fait, compte tenu des symétries, seuls cinq cas ont été examinés. C'est ainsi que pour les cases ayant même numéro, les procédés donnant les conclusions inscrites sont tout à fait analogues. Concernant les cases sans numéro, le lecteur constatera que chacune des quatre éventualités inscrites sur $\{a, c\}$ définit une loi convenable sur F .

Donnons le détail des démonstrations de

1

,

2

,

3

,

4

.

1

 $a P b$ et $b P c \Rightarrow a P c$.

En effet $(ac) b = a (cb) = ab = a$ donc $(ac) b = a$. Seul $ac = a$ convient.

De même $(bc) a = ba = a = b (ca)$. La dernière égalité implique que $ca = a$.

Donc $ac = ca = a$. Soient $a P c$. Cette loi sur F est convenable.

2

 $a P b$ et $b G c \Rightarrow a P c$.

En effet $(ab) c = ac = a (bc) = ab = a$.

De même $(bc) a = ba = a = b (ca)$. La dernière égalité ne peut être vérifiée que si $ca = a$.

Donc $ac = ca = a$; soit $a P c$. Cette loi sur F est convenable.

3

 $a G b$ et $b G c \Rightarrow a G c$.

En effet $(ab) c = ac = a (bc) = ab = a$.

De même $(cb) a = ca = c (ba) = cb = c$.

Donc $ac = a$ et $ca = c$ donc $a G c$. Cette loi sur F est convenable.

4

 $a G b$ et $b D c$ est impossible.

Mais $a(cb) = ab = a = (ac)b$. La dernière égalité ne peut être vérifiée que si $ac = a$. D'où

A titre d'illustration, le lecteur peut constater que :

- dans le premier exemple donné en I, E ne comporte qu'une classe de type G ;
- dans le deuxième exemple, chaque classe est réduite à un élément.

3-5. *Réciproquement, il est facile de constater* que la loi de composition définie sur un ensemble E après une structuration telle quelle est définie en 3-4., est associative et que le monoïde E ainsi défini appartient à $\mathcal{M}$.