

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 13 (1965), p. 47-54

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__13__47_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

L. GUERBER

INVARIANCE DE CERTAINES PROPRIETES DES GRAPHS PAR DES CHANGEMENTS DE COORDONNEES CARTESIENNES RESPECTANT LES ORDRES SUR CHAQUE AXE

Dans l'étude de nombreux phénomènes, on a à rendre compte de la liaison entre deux grandeurs observées X et Y . En général, on suppose que X et Y sont mesurés par des nombres (et même des nombres réels); dans les modèles dits "déterministes", la liaison s'exprimera par une fonction numérique :

$$Y = f(x)$$

Si X et Y sont seulement des grandeurs ordonnées (repérées sur une "échelle ordinale"), mais non mesurables (c'est-à-dire susceptibles d'être additionnées) il importe de savoir quelles sont les propriétés des fonctions numériques qui ne dépendent que de la structure d'ordre des nombres réels, et non de leur structure arithmétique; en particulier, il est souhaitable que la distinction entre ces deux classes de propriétés : ordinales et arithmétiques, soit clairement soulignée dans l'enseignement.

C'est à l'exposé de quelques unes des propriétés purement ordinales qu'est consacré l'article de Monsieur Guerber.

(N.D.L.R.)

I. - RAPPEL DE 2 RESULTATS CLASSIQUES CONCERNANT LA THEORIE DES PRIX

Supposons que C représente le prix de revient de la production d'une quantité x d'une marchandise, on appelle C coût total relatif à x ; on désigne par coût moyen, la valeur de $y_1 = \frac{C}{x}$, et par coût marginal la valeur de $y_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$ limite du rapport de l'accroissement du coût total à l'accroissement de la production lorsque ce dernier tend vers 0. Les valeurs de y_1 et y_2 sont évidemment des fonctions de x ; nous désignerons leurs graphes respectifs par (G_1) et par (G_2) .

Il est classique d'établir entre (G_1) et (G_2) des relations dont:

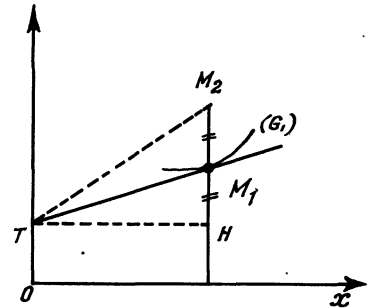
- A.- Le graphe (G_2) rencontre (G_1) en son minimum (1).
- B.- Connaissant un point de (G_1) , construire le point de (G_2) correspondant à la même valeur de x .

(1) Par abus de langage, nous disons qu'un graphe (G) présente un minimum pour exprimer que la fonction dont le graphe est (G) admet un minimum.

Le principe des démonstrations est le suivant (cf. par exemple - Le mécanisme des Prix par Jean Marchal - Librairie de Médecis - Edition 1948 - pages 121 et s.):

pour A: (G_1) présente un minimum où $y_1 = 0$ soit $\frac{xC' - C}{x^2} = 0$ donc ce minimum se trouve sur (G_2) puisqu'alors $C' = \frac{C}{x}$.

pour B: L'ordonnée du point de (G_2) d'abscisse x est C' . Cette ordonnée ne dépend donc que de la tangente à (G_1) au point d'abscisse x ; par suite 2 courbes tangentes au point $M_1(x; y_1(x))$ conduisent aux mêmes constructions pour le point $M_2(x; y_2(x))$ de (G_2) d'où l'idée d'utiliser comme courbe tangente à (G_1) en M_1 la tangente M_1T . Ce serait le graphe d'un coût total $\bar{C}$ tel que $y_1 = \frac{\bar{C}}{x}$ soit linéaire en x , d'où $\bar{C} = \lambda x^2 + \mu x$ (où λ et μ désignent 2 constantes) et la valeur du coût marginal associé serait $y_2 = \bar{C}'$ qui vaut, on vient de le voir, $y_2 = C'$. Alors $y_2 = C' = \bar{C}' = 2\lambda x + \mu$; c'est l'ordonnée du point d'abscisse x sur la droite $y = 2\lambda x + \mu$, droite qui a même ordonnée à l'origine que la tangente M_1T en M_1 et dont le coefficient angulaire est double de celui de la tangente. Si donc on appelle H le point $(x; \mu)$ on voit que



$$\overrightarrow{HM_2} = 2 \overrightarrow{HM_1}$$

Ce qui fournit une construction simple du point M_2 (et par suite de (G_2)) connaissant (G_1) .

On remarque qu'en un minimum de y_1 , la tangente M_1T est parallèle à Ox ; alors H est en M_1 et M_2 est en M_1 : c'est un point commun à (G_1) et (G_2) , et on retrouve le résultat A.

II. REFLEXIONS A PROPOS DES 2 RESULTATS PRECEDENTS

On vient d'établir 2 résultats par 2 calculs analytiques et il semble que, d'une certaine façon, le résultat B est plus général que le résultat A puisqu'on a obtenu A à la fin du I, en remarque, comme cas particulier du B. En fait, les 2 calculs précédents sont liés à la notion de droite tangente à une courbe (G_1) ; dans le cas A il s'agit de tangente parallèle à Ox dans le cas B de tangente, en un point quelconque de (G_1) , pas forcément parallèle à Ox et, en ce sens, le cas A est un cas particulier de B. Mais, du point de vue "généralité" les 2 résultats peuvent être envisagés d'un autre point de vue; on peut se demander ce qui est changé si l'on décide de modifier la façon d'évaluer x , ou la façon d'évaluer C , ou les 2 en même temps. Si, pour une date donnée, il est souvent naturel d'évaluer un coût en francs, en accordant la même valeur à 1 franc quelle que soit la valeur de C , il n'en est plus de même lorsqu'on étudie des prix en fonction du temps

et la valeur attribuée à 1 franc subit alors des rectifications suivant les règles plus ou moins conventionnelles, plus ou moins compliquées suivant l'indexation adoptée. La question se pose alors de savoir si les résultats obtenus sont liés au système de repérage adopté (par exemple, convention fixant la valeur à attribuer à 1 franc) où s'ils en sont indépendants, c'est-à-dire si les propriétés trouvées ne sont pas, en fait, des propriétés directement liées aux échelles de mesure, si, par conséquent, des propriétés définitives de certaines fonctions ne peuvent être établies tant qu'on n'a pas définitivement justifié le mode de repérage de la variable et de la fonction. Or, il se trouve que, dans de nombreuses études, la notion de croissance (ou de décroissance) est parfaitement définie: on a un phénomène repérable mais pas mesurable (sans conventions artificielles supplémentaires). On saura par exemple définir la postériorité pour des dates, la croissance pour des excitations, pour des sensations, pour des utilités, on saura définir un ordre; on peut dire encore, plusieurs chercheurs étant tombés d'accord sur le choix d'un certain ordre pour l'évaluation de x et d'un autre pour l'évaluation de y , quelles propriétés les graphes des diverses fonctions $x \rightarrow y$ devront-ils présenter obligatoirement, en commun?

Revenant aux 2 résultats du I, deux types de questions viennent alors à l'esprit: D'une part, les propriétés A et B restent-elles vraies si l'on décide de modifier la façon d'évaluer, soit les prix, soit les quantités? D'autre part, quels sont tous les systèmes de repérage laissant invariants les résultats A et B?

Nous allons préciser le sens à donner aux termes "modifier la façon d'évaluer" en énonçant l'objet de l'étude sous une forme plus mathématique:

soit (g) le graphe d'une fonction $y = f(x)$ rapporté à 2 axes Ox , Oy lorsqu'on a adopté un certain repérage des abscisses x et des ordonnées y . On fait choix d'un autre mode de repérage des abscisses X et des ordonnées Y ; on est alors conduit à une autre fonction $Y = F(X)$, de graphe (G) . Quelles sont les propriétés de (g) qui se retrouvent obligatoirement sur (G) dans le cas où X est une fonction de x continue, monotone croissante au sens strict;

et Y une fonction de y continue, monotone croissante au sens strict?

Nous poserons $X = \varphi(x)$ et $Y = \psi(y)$. Il résulte des hypothèses faites sur φ et ψ (continuité et croissance monotone au sens strict) que les fonctions réciproques φ^{-1} et ψ^{-1} existent et ont les mêmes propriétés; autrement dit x et y sont des fonctions continues, monotones croissantes respectivement de X et de Y et par suite l'étude se propose, de façon réciproque, d'obtenir les propriétés de (G) qui se retrouvent obligatoirement sur (g) .

III. PROPRIETES COMMUNES A (g) ET (G) ; INVARIANTS LORSQUE LES AXES REPERES COÏNCIDENT

1) Considérons la droite $y = y_1$ dans le système Ox , Oy . De $\psi(y) = \psi(y_1)$ on déduit $Y = Y_1$ qui montre que les points dans le repère X , Y sont alignés. Il convient toutefois de noter que si $x \rightarrow \infty$ il est possible que X ne tende pas vers l'infini. Les hypothèses de continuité faites sur φ permettent seulement d'affirmer que

$$x_1 \rightarrow x_2 \implies \varphi(x_1) \rightarrow \varphi(x_2) \quad \text{soit} \quad X_1 \rightarrow X_2$$

et par suite le transformé de la droite $y = y_1$ est sur la droite $Y = Y_1$ l'intervalle $\varphi(-\infty) < X < \varphi(+\infty)$.

Nous dirons que la direction fournie par l'axe de la variable a un caractère intrinsèque ou encore est invariante.

Le même raisonnement s'applique évidemment à la droite $x = x_1$.

2) Si $x_1 < x_2$, en vertu de la croissance stricte de φ : $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ et par suite $X_1 < X_2$.

Il en résulte que la demi-droite ($x \geq x_1, y = y_1$) est transformée en l'intervalle fermé ($\varphi(x_1) \leq X \leq \varphi(x_2); Y = \psi(y_1)$) que nous nommerons demi-droite de même direction et de même sens. De même la demi-droite $x = x_1, y \geq y_1$ est transformée en une demi-droite de même direction et de même sens.

Il en résulte aussi que les demi-plans $x \geq x_1$ et $X \geq X_1$ se correspondent ainsi que les pavés

$$\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ y_1 < y < y_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_1 < X < X_2 \\ Y_1 < Y < Y_2 \end{cases}$$

Un point correspondant à un extremum (minimum ou maximum, strict ou non) de $y = f(x)$ a donc pour homologue un point associé à un extremum de même nature de $Y = F(X)$.

Ce qui précède nous montre que la propriété A établie au I est indépendante du mode de repérage des coûts et des prix (sous la seule réserve d'adopter une échelle continue respectant les croissances). Le résultat se conçoit d'ailleurs aisément: tant que le coût de la dernière unité produite est inférieur au coût moyen la fabrication de cette unité abaisse ce coût, elle l'élève au contraire si le coût marginal est supérieur au coût moyen. Autrement dit, avec les notations du I, si $y_2(x) < y_1(x)$ la fonction $x \mapsto y_1(x)$ décroît et si $y_2(x) > y_1(x)$ la fonction croît.

3) Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est monotone croissante au sens strict sur $[x_1, x_2]$ alors $X \mapsto Y$ est également monotone croissante au sens strict sur $[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$.

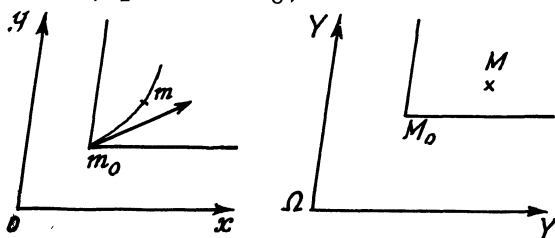
En effet φ étant monotone croissante au sens strict il en est de même de $\bar{\varphi}$ donc de $f(\bar{\varphi})$ donc de $\psi(f(\bar{\varphi}))$ puisque ψ est aussi monotone croissante au sens strict.

Ainsi la croissance (monotone) au sens strict est conservée et, bien entendu, de la même façon, la décroissance au sens strict.

On retrouve ainsi que les maxima (ou respectivement les minima) sont conservés que ce soit au sens strict ou au sens large.

4) Si la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue la fonction $X \mapsto F(X)$ est continue. En effet φ et ψ étant continues, $\bar{\varphi}$, $f \cdot \bar{\varphi}$ donc $\psi \cdot f \cdot \bar{\varphi} = F$ le sont.

5) Si, pour $x = x_0$, la fonction f admet une dérivée $f'(x_0) > 0$ et si F est dérivable pour X_0 alors on a $F'(X_0) \geq 0$.



Si $f'(x_0) > 0$ le point $m(x, f(x))$ est, pour $x > x_0$, dans l'angle de sommet $m_0(x_0, f(x_0))$ défini par $x > x_0$ $f(x) > f(x_0)$, au moins dans un voisinage assez petit de m_0 .

Il en résulte que l'homologue $M(X; Y)$ de $m(x; y)$ est dans la région

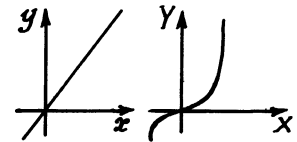
$$X > X_0 = \varphi(x_0) \quad Y > Y_0 = \psi(y_0)$$

Si la fonction f est dérivable pour $x = x_0$ la sécante m_0m admet une position limite qui est, puisque $f'(x_0) > 0$, dans l'angle $x > x_0, f(x) > f(x_0)$. En vertu de la continuité de φ , si $x \rightarrow x_0, \varphi(x) \rightarrow \varphi(x_0)$ et $X \rightarrow X_0$. De même, en vertu de la continuité de ψ , $Y \rightarrow Y_0$. Alors $M \rightarrow M_0$ et la sécante M_0M tend vers la tangente en M_0 (qui existe puisque par hypothèse F est dérivable pour X_0). Les conditions $X > X_0, Y > Y_0$ imposent à la demi-droite M_0M d'être dans l'angle de sommet M_0 défini par $X > X_0, Y > Y_0$ mais la position limite de M_0M n'y est pas forcément et l'on peut obtenir $F'(X_0) = 0$ ainsi que le montre l'exemple suivant.

Considérons la fonction $y = x$ dont le graphe (g) rapporté à des axes ortho-normés par exemple est la première bissectrice. On définit un autre mode de repérage des abscisses et des ordonnées par

$$X = \sqrt[3]{x} \quad Y = y$$

φ est la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ continue, monotone croissante au sens strict, continue, et ψ la fonction $y \mapsto y$. La nou-



velle fonction F ainsi introduite est $X \mapsto X^3$. A $x = 0$ correspond $X = 0$ mais si $f'(0) = 1$ on trouve $F'(0) = 0$.

Ainsi, contrairement à ce que pourrait suggérer le (3) (conservation des extréma) les points à tangentes parallèles à OX sur (G) ne sont pas homologues de points à tangentes parallèles à Ox sur (g) .

Il résulte, aussi, de ce qui précède que si 2 graphes (g_1) et (g_2) sont tangents en m_0 , leurs homologues (G_1) et (G_2) ne sont pas forcément tangents en M_0 . Dans l'exemple précédent $Y = X^3$ est tangent en Ω à ΩX alors que $y = x$ n'est pas tangent en 0 à Ox donc (G) et ΩX tangents en Ω ne sont pas homologues de 2 courbes tangentes puisqu'il s'agit de $y = x$ et $y = 0$. Réciproquement, en prenant pour fonction φ la fonction $x \mapsto x^3$, et pour fonction ψ , la fonction identique on passe du graphe (g) de $y = x^3$ au graphe (G) de $Y = X$ ce qui montre que 2 courbes tangentes n'ont pas pour homologues 2 courbes forcément tangentes. Si, donc, une propriété est basée sur le contact de 2 graphes, son existence est essentiellement liée au mode de repérage utilisé sur les axes. C'est ainsi que la propriété B établie plus haut n'est pas indépendante du repère ce qui la différencie, de façon essentielle, de la propriété A .

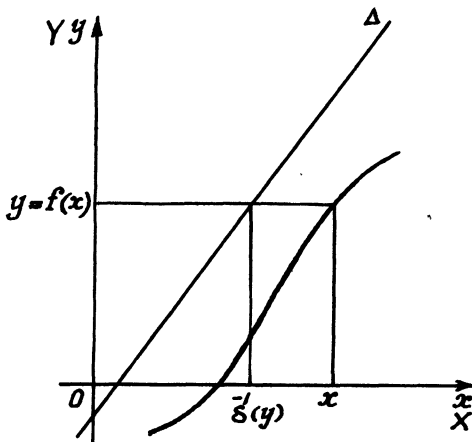
Dès lors, pour étudier des propriétés ayant un caractère invariant il sera parfois plus avantageux d'utiliser un repérage donnant au graphe des propriétés géométriques simples par exemple en le transformant en des points alignés.

IV. TRANSFORMATION DU GRAPHE D'UNE FONCTION CONTINUE, CROISSANTE AU SENS STRICT EN UN SEGMENT; DEUX EXEMPLES D'APPLICATION

Soit (g) le graphe d'une fonction continue, monotone croissante $x \mapsto f(x) = y$ et soit Δ une droite non parallèle à l'un des axes de coefficient angulaire positif;

Δ est le graphe d'une certaine fonction croissante $\bar{x} \mapsto \delta(x)$. En prenant :

$$X = \bar{\delta}^{-1}(f(x)) \quad Y = y$$



on voit que le graphe de la fonction $X \mapsto Y$ est porté par Δ . Comme f est continue monotone croissante au sens strict, et $\bar{\delta}$ également, on voit que $\varphi = \bar{\delta}^{-1}(f)$ est bien une fonction continue monotone croissante au sens strict.

C'est cette propriété qu'on met à profit dans les 2 exemples suivants:

1ère Application: papier gauss-arithmétique. On appelle ainsi une feuille de papier portant, en abscisses, une graduation arithmétique et en ordonnées une graduation telle que le point d'ordonnée t se trouve à la distance linéaire y telle que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du = t$$

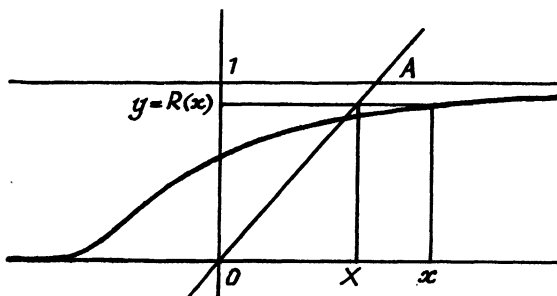
Comme $e^{-\frac{u^2}{2}} > 0$ la fonction $\int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$ est bien une fonction continue croissante de y .

Sur ce papier le graphe des fonctions du type

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}b} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-a}{b}\right)^2} du$$

est une droite d'où des possibilités d'ajustement des distributions normales par la méthode dite de la droite de Henri.

2e Application. Utilisation d'une table de nombres au hasard pour effectuer un tirage suivant une loi donnée.



Soit $R(x)$ la fonction de répartition associée à la loi donnée (cf $R(x) = \text{Proba}(x < x_0)$). C'est une fonction monotone croissante de 0 à 1. Supposons-la continue et monotone croissante au sens strict de façon que R^{-1} ait un sens.

Le changement de variables défini par $X = R(x)$ $Y = y$ substitue à la fonction $x \mapsto R(x)$ une fonction $X \mapsto Y$ de graphe le segment OA où $O(0;0)$ et $A(1;1)$.

Ce nouveau graphe est celui d'une fonction de répartition uniforme sur $[0, 1]$ d'où la possibilité d'utiliser une table de nombres au hasard.

Ayant convenu, par exemple, d'opérer avec 3 chiffres, on associe aux tri-plets $\alpha \beta \gamma$ constituant des nombres répartis au hasard uniformément sur $[000 \ 999]$, les nombres $0, \alpha \beta \gamma$ répartis au hasard uniformément sur $[0 \ 1]$. Alors $R(0, \alpha \beta \gamma)$ fournit des nombres dont la fonction de répartition est $R(x)$.

La transformation étudiée dans ce paragraphe montre que la convexité n'a pas un caractère invariant. Si, dans un premier repère, le graphe est une courbe convexe, dans un autre ce peut être une droite, voire une courbe concave. En effet, étant données 2 fonctions f_1 et f_2 , de graphes respectifs (g_1) et (g_2) l'un convexe et l'autre concave, nous avons vu comment on pouvait définir une transformation $X = \varphi_1(x) \ Y = y$ appliquant (g_1) sur une droite (au moins pour une portion où f_1 est monotone) et de même une transformation $X = \varphi_2(x) \ Y = y$ appliquant (g_2) sur la même droite. Alors $X = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(x)) \ Y = y$ appliquant (g_1) sur (g_2) transforme un graphe convexe en un graphe concave.

V. TRANSFORMATIONS CONSERVANT LES CONTACTS OU LA CONVEXITÉ

Nous venons de voir qu'en général ni les contacts, ni la convexité ne sont conservés; on va rechercher des conditions simples assurant la conservation de l'un ou l'autre.

Contact. Si la transformation conserve le contact entre 2 courbes, elle transforme en particulier, un point à tangente parallèle à Ox en un point à tangente parallèle à OX puisqu'une parallèle à Ox est transformée en une parallèle à OX . Par suite $f'(x_0) = 0$ doit entraîner $F'(X_0) = 0$ où $X_0 = \varphi(x_0)$.

Or :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dy} \times \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dX}$$

donc, si $\frac{dY}{dy}$ et $\frac{dx}{dX}$ sont finis, $\frac{dy}{dx} = 0$ entraîne $\frac{dY}{dX} = 0$.

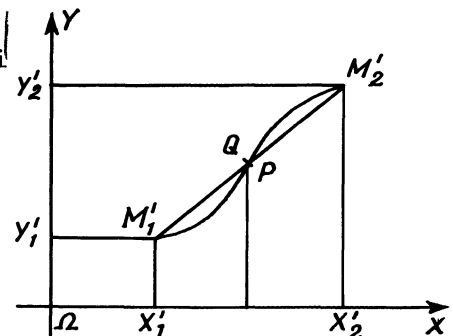
Il est par suite suffisant que les fonctions φ et ψ aient des dérivées ni nulles ni infinies sur le domaine de la transformation et la formule précédente montre que dans ce cas le contact est conservé en tout point.

Convexité. Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction continue, monotone, croissante au sens strict, convexe sur $[x_1 \ x_2]$.

Si la transformation $x \mapsto X$ est affine ainsi que $y \mapsto Y$ la convexité est conservée. En effet, si elle ne l'était pas, c'est qu'on pourrait trouver 2 valeurs x_1 et x_2 sur $[x_1 \ x_2]$ telles que le graphe de $X \mapsto Y$ atteigne la corde $M_1' M_2'$ où

$$M_1' (X_1' = \varphi(x_1'), Y_1' = \psi(y_1')),$$

$$\text{et } M_2' (X_2' = \varphi(x_2'), Y_2' = \psi(y_2')).$$



Soit P le point sur la corde, de coordonnées (X_p, Y_p) et soit p le point dont il est l'image. La fonction $x \mapsto f(x)$ étant convexe, le point p est au-dessous de

la corde $m'_1 m'_2$ (homologue de $M'_1 M'_2$); désignons par q le point de la corde qui a même abscisse que p .

La transformation sur les coordonnées transformant des droites en des droites appliquerait q d'abscisse $x_q = x_p$ du segment $m'_1 m'_2$ sur le point Q d'abscisse $X_p = \varphi(x_p)$ du segment $M'_1 M'_2$ donc sur P . Alors $y_p < y_q$ entraînerait $Y_p = Y_q$, en contradiction avec le fait que $y \rightarrow Y$ est monotone, croissante au sens strict.

Il est donc suffisant que $X = \alpha x + \beta$
 $Y = \gamma y + \delta$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels.

Et $\alpha > 0$ $\gamma > 0$ (afin que φ et ψ soient croissantes au sens strict) pour que la convexité soit conservée.

Montrons, maintenant, que c'est nécessaire en établissant que si φ et ψ ne sont pas affines il existe des courbes convexes transformées en courbes non convexes (ou concaves transformées en courbes non concaves).

La transformation n'étant pas affine il existe certainement des segments qui sont transformés en des arcs non rectilignes. Soit ab un arc du plan Ox, Oy ayant pour homologue le segment AB du plan OX, OY , l'arc ab étant supposé non rectiligne. Alors il existe un point c sur l'arc ab non situé sur la droite ab dont l'image est le point C sur le segment AB . Le transformé de l'arc de cercle acb est une courbe passant par ACB donc certainement pas convexe (ni concave).

En conclusion pour que la convexité (ou la concavité) soit conservée, quelle que soit la forme du graphe (g) , il faut et il suffit que X et Y soient des fonctions affines de x et y .

