MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 10 (1965), p. 67-71
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__10__67_0>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

QUELQUES EXERCICES A TRAITER SUR SIMPLEXES (suite)

Une serrure est constituée de six broches: chacune peut être levée ou baissée. On a perdu la combinaison, celle qui ouvre la serrure. Il faut entreprendre de les essayer toutes. Dans quel ordre?

On pensera tout de suite aux règles habituelles de ce type de manipulation:
- n'oublier aucune combinaison
- ne pas former deux fois la même combinaison.

Représentons nos broches par les caractères d'un mot de six caractères: la présence dans le mot du symbole 1 au rang i signifie que la broche i est levée, la présence de 0 au rang i signifie que i est baissée.

100111 est une des combinaisons possibles.
Il n'est pas interdit de regarder un tel mot comme un numéro écrit dans la base deux.

On peut proposer comme liste complète des combinaisons possibles tout simplement la liste naturelle de la numérotation binaire de 000000 à 111111 :

000000 - 000001 - 000010 - 000011
000100 - 000101 - 000110 - 000111
001000 ... etc.;

Elle satisfait aux deux exigences énoncées ci-dessus. Quant à notre manipulation pas à pas, elle sera bien peu économique, si le parcours des combinaisons est fait dans l'ordre des mots de la liste.

passer de 000011 à 000100 nécessite de bouger trois broches
passer de 000111 à 001000 nécessite de bouger quatre broches.

La liste ci-dessus est un mauvais plan de travail.

On peut espérer faire mieux. (On peut effectivement faire à peu près deux fois moins de pas).

On voit maintenant le problème posé: former toutes les combinaisons les unes après les autres en faisant un nombre minimum d'opérations élémentaires (manipulations de broches). En fait, on va le voir, ce nombre minimum est égal au nombre de combinaisons possibles, soit 2^6 - et si le seul but est d'ouvrir la serrure, il suffira en moyenne de 2^5 manipulations ($2^5 = 2^6 \times 1/2$) pour y parvenir.

Circuit hamiltonien sur le simplexe s_n

Chaque combinaison, telle 100111, est aussi une partie d'un ensemble de cardinal six, en l'occurence la partie constituée des broches levées: celles de rang 1, 4, 5 et 6. Nos combinaisons peuvent donc être disposées sur les sommets

d'un simplexe (1). Parcourir une arête du simplexe tracée entre deux sommets (combinaisons), traduit que l'on passe de l'une à l'autre des combinaisons représentées par les sommets en touchant une seule broche.
Exemple: 010011 ——— 010111

Nouvel énoncé du problème posé

Peut-on cheminer sur les arêtes du simplexe S_n, de sommet en sommet, de façon à visiter tous les sommets une seule fois et revenir au point de départ ? (On veut les essayer tous et remettre les choses en l'état après les manipulations).

Ce problème est célèbre: c'est le problème de la promenade d'Hamilton appliqué aux simplexes.

Le simplexe S_n est de ces rares labyrinthes qui supportent une telle promenade: il appartient comme on dit, aux graphes hamiltoniens. Montrons-le.

Démonstration de la proposition

S_n est hamiltonien.

Il nous faut revenir à la règle de base des simplexes, à savoir la règle de dédoublement:

- S_n s'obtient en recopiant deux fois S_{n-1} et en joignant deux à deux les sommets correspondants par une arête. (C'est ce que nous avons appelé précédemment l'homorphisme de S_n dans S_1).

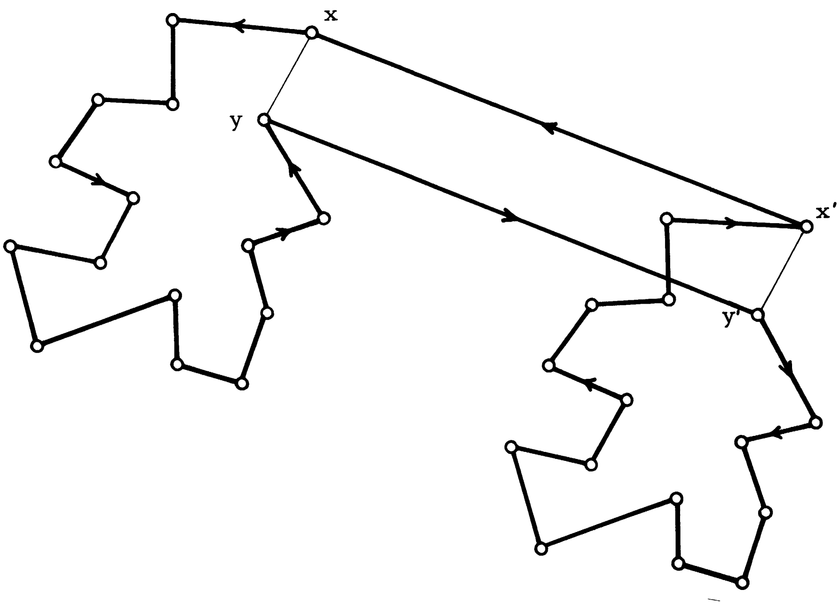
Nous raisonnerons encore ici par récurrence. Imaginons trouvé un circuit hamiltonien sur S_{n-1}.

En recopiant S_{n-1} deux fois, on recopie deux circuits hamiltoniens identiques de rang n-1 et les sommets correspondants sont deux à deux reliés par une arête. Privilégions une arête xy sur l'un, et l'arête x'y' correspondante sur l'autre. On ne les empruntera pas, mais on empruntera xx' et yy'. On voit se dessiner un circuit hamiltonien sur S_n :

On explore S_{n-1} en suivant son circuit hamiltonien de x en y, puis au lieu de revenir en x par l'arête yx on emprunte yy', on explore le double de S_{n-1} comme on a exploré S_{n-1} mais en sens inverse, on arrive en x' et on rentre au point de départ par l'arête x'x. Tout sommet a été visité une fois et une seule.

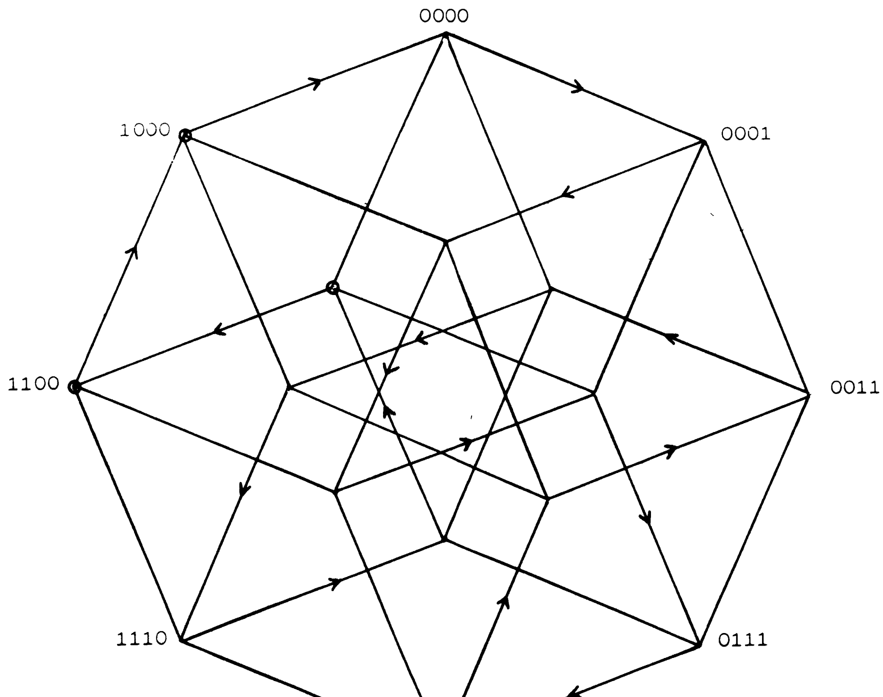
---

(1) Voir Bulletin numéro 9, 1964, pages 41 à 45.



Dédoublement du circuit hamiltonien de s_{n-1}
en un circuit hamiltonien pour s_n

Il ne nous reste qu'à constater que S_2 est hamiltonien. Cela va de soi. S_n est donc hamiltonien. La promenade complète n'a que 2^n pas.
On a tracé ci-dessous un circuit hamiltonien sur S_4.



Circuit hamiltonien
sur le Simplexe S 4

Il nous reste à l'écrire.

0000	1000
0001	1001
0011	1011
0010	1010
0110	1110
0111	1111
0101	1101
0100	1100

sens de lecture

<u>L'algorithme d'écriture</u> d'un chemin hamiltonien sur S_n apparait maintenant simplement:

(0) les mots ci-dessous qui seront écrits avec les deux caractères 0 et 1 sont supposés, quand ils ne sont pas longs de n caractères, complétés à gauche avec des zéros, afin de toujours y voir des mots longs de n caractères.

(1) On écrit la liste de mots suivante: 00, 01, puis on recopie à la suite les mêmes mots en les prenant dans l'ordre inverse de cette liste et en plaçant le caractère 1 en tête de chaque mot recopié:
101,100 - On passe en (2).

(2) -Si le dernier mot écrit comporte effectivement n caractères écrits, la liste totale des mots écrits jusqu'alors, dans l'ordre d'écriture, complétée par le mot de départ qui n'a que des zéros, constitue une écriture complète d'un circuit hamiltonien sur S_n. CQFD.

-Sinon on passe en (3).

(3) On recopie à la suite de la liste de tous les mots déjà écrits la même liste, en la prenant dans l'ordre inverse d'écriture, et en prenant soin de toujours placer en tête de chaque mot recopié le caractère 1. On passe en (2).

(à suivre)

P. ROSENSTIEHL.

STAGE D'INITIATION

organisé par le Centre de Mathématique Sociale et de Statistique
17, Rue Richer, PARIS 9ème

Du 27 Septembre au 2 Octobre 1965

sur

LES ALGEBRES DE BOOLE

Ce stage s'adresse, comme tous ceux qui ont été préalablement organisés par le Centre, aux chercheurs et aux enseignants en Sciences de l'Homme. Il sera réservé en priorité aux personnes relevant du Ministère de l'Education Nationale ou d'un organisme public de Recherche. Pour tous renseignements et inscriptions, s'adresser au C.M.S.S., à l'adresse ci-dessus.

Programme

- Algèbres de Boole finies, simplexes et combinatoire.
- Algèbres de Boole abstraites.
- Algèbres de Boole libres.
- Homomorphismes d'algèbres de Boole.
- Représentation des algèbres de Boole.
- Anneaux booléens, tribus, clans.
- Mesures sur une algèbre de Boole et axiomatique du Calcul des Probabilités.
- Algèbres de Boole et Logique.
- Application de l'algèbre de Boole à l'analyse des questionnaires.
- L'algèbre de Boole selon George Boole.