MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. GARDELLE

Cadences

Mathématiques et sciences humaines, tome 9 (1964), p. 31-38
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__9__31_0>

J. GARDELLE

(avec la collaboration de G. Th. GUILBAUD)

CADENCES

Ce qui suit n'est qu'un nouvel exercice, annoncé dans notre N° 2 (p. 37), destiné à illustrer ce fait: il est impossible d'obtenir une suite suffisamment longue d'objets, pris dans une catégorie finie, sans qu'apparaisse dans la suite des objets une certaine régularité. "Régularités inévitables", c'est là le thème fondamental que l'on voudrait éclairer par ce nouvel exemple.

Dans le numéro précédent de cette revue,(n° 8, p. 36), nous avons soumis à la réflexion du lecteur quelques exemples de suites, singulières en ce sens qu'elles possèdent les trois propriétés:

1 - elles ne renferment pas de "cadences";

2 - on ne peut leur adjoindre un élément sans faire apparaître au moins une cadence;

3 - il n'existe pas de suite qui soit formée d'un plus grand nombre d'éléments, et qui ne contienne pas de cadences.

Le problème que l'on va poser consiste, en effet, d'abord à se fixer un type de régularité; ensuite à prouver que ce type de régularité se présente nécessairement pour peu que l'on considère une suite assez longue d'éléments.

Mais précisons un peu; et, d'abord

I.- DE QUELLE REGULARITE S'AGIT-IL?

Quelques exemples illustreront d'abord ce que l'on entend par "cadence".

Ecrire un mot, c'est composer une suite avec, pour objets, les lettres d'un alphabet; les régularités auxquelles l'on s'intéresse sont les répétitions de lettres à intervalles réguliers; on dira que le mot comporte une cadence d'ordre k, si la même lettre est répétée k fois à des places équidistantes. Par exemple, dans le mot INSTITUTION, les T constituent une cadence d'ordre 3, parce que les intervalles entre deux T consécutifs sont égaux; les I constituent une autre cadence d'ordre 3. De même: dans le mot EXEGESE, les E forment une cadence d'ordre 4.

On aurait pu s'exprimer encore en langage arithmétique: les éléments d'une suite sont repérés par leur numéro d'ordre: le premier, le deuxième, ... On dira donc que la suite comporte une cadence d'ordre k, si le même objet se trouve en k places dont les numéros d'ordre sont en progression arithmétique.

Supposons, par exemple, que l'on suive l'évolution dans le temps d'une grandeur économique ou autre, en en relevant la valeur à intervalles de temps réguliers; on notera, pour chaque relevé, le sens de la variation par rapport au relevé précédent; ainsi, l'alphabet comportera trois symboles: + (croissance), = (stagnation), - (décroissance). Une évolution sur 20 périodes sera représentée par une suite, telle que

$$+ + = + = = - + + = = + = - - + + = = +$$

cette suite comporte une cadence d'ordre 4; il existe, en effet, quatre signes (+), correspondant à des relevés dont les dates sont en progression arithmétique (4, 8, 12, 16); mais aussi une cadence d'ordre 3, puisqu'il existe trois signes (=), correspondant à des relevés dont les dates sont en progression arithmétique (3, 11, 19). On pourra caractériser une cadence par son ordre et par la raison(1) de la progression arithmétique qui lui est associée.

On pourrait multiplier les exemples en les empruntant aux domaines les plus divers: suite des résultats d'un jeu de roulette, organisation d'une guirlande de perles de couleur (à distinguer du collier, qui implique une notion de circularité), mélodie musicale, ...

En bref, on se donne un alphabet (lettres, nombres, signes, couleurs, notes, ...); on se fixe un type de régularité, c'est-à-dire, un ordre K de cadence; et l'on se propose d'écrire un texte (suite de symboles, pris dans l'alphabet), qui ne contienne aucune cadence d'ordre K; mais, bien entendu, on permet toute cadence, dont l'ordre soit inférieur à K.

Le résultat essentiel, connu sous le nom de "conjecture de Baudet" s'énonce, en désignant par L le nombre des lettres de l'alphabet:

Théorème.- Il existe un nombre N (L, K), tel que pour un alphabet de L lettres tout texte formé de plus de N lettres contient au moins une cadence d'ordre K.

Ce résultat a été démontré par Van der Waerden (2). Nous donnerons d'abord une démonstration intuitive, en considérant un couple particulier de valeurs pour L et K.

2.- DESCRIPTION D'UN CAS PARTICULIER

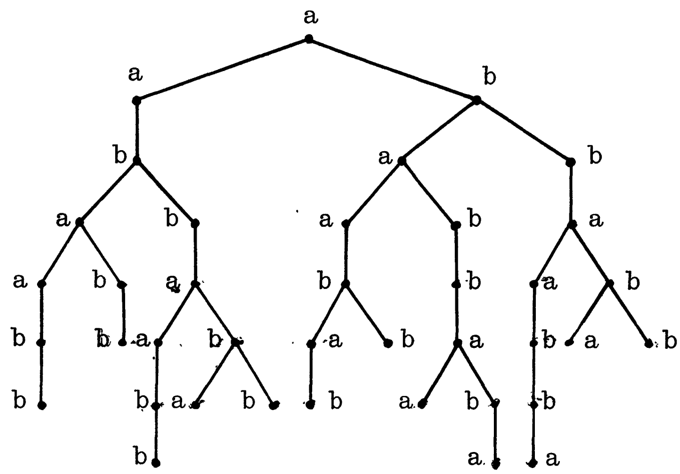
Pour comprendre le sens du théorème, nous allons constater la propriété qu'il énonce, en décrivant l'ensemble des textes que l'on peut écrire avec un alphabet de deux lettres, et qui ne comportent pas de cadence d'ordre 3.

---

(1) On a utilisé, dans le numéro précédent de cette revue, le pas de la cadence qui représentait le nombre d'objets entre deux éléments consécutifs de la cadence; le pas ainsi défini est égal à la raison diminuée d'une unité.

(2) "Beweis einer Baudet'schen Vermutung". Van der Waerden. Nieuw Archief voor Wiskunde. T 15, 1927, pp. 212-216.

Soient donc a et b les lettres de l'alphabet; on utilise la procédure de construction en arbre, qui s'explique d'elle-même; chaque branche de l'arbre constitue un texte; il est clair que la première lettre est arbitraire



On constate que l'on ne peut prolonger aucune branche, sans faire apparaître au moins une cadence d'ordre 3. Les textes les plus longs, écrits avec deux lettres, et qui ne comportent pas de cadence d'ordre 3, sont donc formés de huit lettres, autrement dit, N (2, 3) = 8; ce sont

a a b b a a b b

a b a b b a b a

a b b a a b b a

On peut, bien entendu, permuter les lettres a et b ; on remarquera qu'opérer ainsi revient, pour le premier texte, à le lire de droite à gauche.

3.- DEMONSTRATION INTUITIVE DU THEOREME

3.1.- On s'efforcera de dégager l'idée directrice de la démonstration de Van der Waerden, en considérant le cas simple d'un alphabet à deux lettres, et en fixant, comme régularités à éviter, les cadences d'ordre 3; soit, le cas pour lequel nous avons pu procéder à une analyse descriptive complète, et pour lequel nous sommes parvenus à la conclusion: N (2, 3) = 8.

Il sera commode d'utiliser le terme de "fausse cadence" d'ordre k, pour désigner un ensemble de (k) éléments en progression arithmétique dont les (k - 1) premiers constituent une cadence d'ordre (k - 1); le kème, appelé "réponse", étant quelconque, c'est-à-dire pouvant éventuellement, mais éventuellement seulement, constituer avec les (k - 1) premiers une cadence d'ordre k.

Considérons des mots de 5 lettres, M_5; un tel mot contient nécessairement une fausse cadence d'ordre 3; les possibilités sont, en effet,

a a x . .

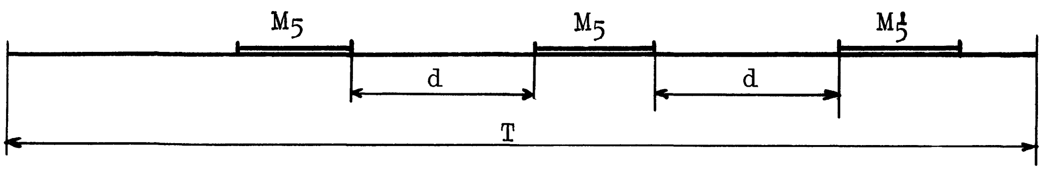
ou a b a . x

ou a b b x .

Il existe $2^5 = 32$, au plus, mots M_5 différents; si, par conséquent, on considère un texte de $5 \cdot 33 = 165$ lettres, et si l'on découpe ce texte en mots successifs de 5 lettres, on trouvera nécessairement deux mots identiques.

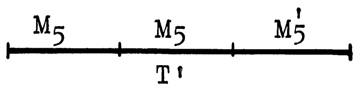
Ces deux mots identiques pourront être, soit contigüs, soit séparés d'une distance d, qui est au maximum $165 - 2 \cdot 5 = 155$; le cas extrême étant atteint, lorsque les deux mots identiques sont respectivement le premier et le dernier des 33 mots qui composent le texte.

Prenons alors un alphabet à 32 caractères (les mots de 5 lettres) on est assuré qu'un texte T de 65 caractères, soit 325 lettres, contient une fausse cadence de mots d'ordre 3 :



Il reste à montrer qu'il existe nécessairement dans T ainsi choisi une cadence d'ordre 3.

<u>Proposition</u>.- S'il existe, dans T, une cadence d'ordre 3, qui utilise une lettre de chacun des trois mots, M_5, M_5 (identique au précédent), M_5', alors cette cadence se retrouve dans le texte condensé T'.



Considérons le premier élément de la fausse cadence contenue dans M_5, le dernier élément de cette fausse cadence que l'on a désigné par x et l'élément occupant la place correspondante dans M_5' , que l'on désignera par y ; puisque l'alphabet n'a que deux lettres, deux des trois éléments considérés sont identiques, ce qui met en évidence l'existence d'une cadence d'ordre 3 dans T'. En clair, prenons successivement les trois cas possibles

3.1.1.- M_5 = a a x . . ; alors M' = . . y . .

d'où

T' = a a x . . a a x . . . . y . .

que l'on écrira, "en allant à la ligne"

"a a x . .
T' = a a x . .
. . y . .

deux des trois éléments a, x, y sont identiques: donc

si x = a , lire en ligne; la cadence est évidente

x = y , lire en colonne; la cadence est évidente

y = a , lire en diagonale; la cadence est évidente.

3.1.2.- M_5 = a.a.x ; alors M' = ... y

```
            a.a.x
et  T'  =   a . a . x
            . . . . y
```

conclusions analogues.

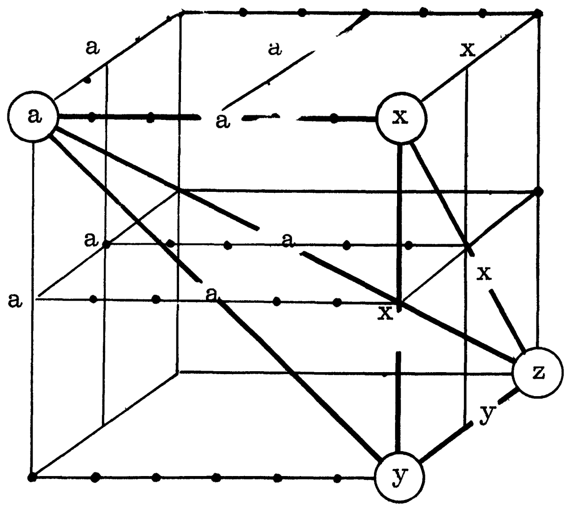
3.1.3.- M_5 = . b b x . ; alors M' = . . . y .

```
            . b b x .
et  T'      . b b x .
            . . . y .
```

Mêmes conclusions.

3.2.- Indications pour une démonstration générale

3.2.1.- Sur L. Supposons que l'on ait eu un alphabet à 3 lettres. On eût considéré des mots de 7 lettres M_7, qui contiennent nécessairement une fausse cadence d'ordre 3; il existe 2^7 mots différents; on eût alors considéré une phrase écrite dans un alphabet à 2^7 caractères, assez longue pour qu'elle contienne une fausse cadence (de mots) d'ordre 3; enfin un texte suffisamment long pour que, à son tour, il renferme une fausse cadence de phrases, également d'ordre 3. Pour mettre en évidence une cadence dans le texte ainsi choisi, on écrira le texte T' condensé, "en allant à la ligne", puis "en allant à la page"; d'où, par exemple,



On considère les 4 éléments a, x, y, z encerclés; puisque l'alphabet ne comporte que trois lettres, deux de ceux-ci sont égaux, et l'on décèle la cadence soit le long d'une arête renforcée, soit le long d'une diagonale renforcée, soit le long de la diagonale du parallélépipède.

3.2.2.- Sur K. La ligne est maintenant tracée. On considère des mots suffisamment longs pour contenir nécessairement une fausse cadence d'ordre K, puis des phrases qui contiennent nécessairement une fausse cadence de mots d'ordre K, et ainsi de suite. On porte son attention sur le premier élément de la fausse cadence de lettres contenue dans le premier mot de la fausse cadence de mots contenue dans la première phrase ..., sur la réponse de la fausse cadence de lettres, sur l'élément correspondant de la réponse de la fausse cadence de mots, et ainsi de suite, ...; sur les (L+1) éléments ainsi sélectionnés, deux sont égaux, qui définissent les extrêmités de la cadence.

4.- UN RESUME DE QUELQUES EXPERIENCES

On a présenté, ci-dessus, une analyse descriptive des textes que l'on peut écrire avec deux caractères, sans faire apparaître de cadence d'ordre 3. Une analyse complète pour d'autres valeurs simples de L et de K a conduit aux résultats suivants. (Bien que simples, ces valeurs semblent pourtant épuiser les possibilités d'analyse manuelle).

4.1.- <u>L = 2 , K = 3</u>. On a donc trouvé les trois textes

a a b b a a b b

a b b a a b b a

a b a b b a b a

de sorte que

$$\boxed{N\,(2\,,\,3) \;=\; 8}$$

4.2.- <u>L = 2 , K = 4</u>. En désignant par n (noyau) l'expression

n = a b a a a b b b a b

les textes les plus longs, à deux caractères, qui ne contiennent pas de cadence d'ordre 4 sont de la forme

$$\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} n \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} n \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} n \left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \qquad (T)$$

L'accolade signifiant que l'on peut prendre au choix a ou b ; la seule restriction consistant évidemment à ne pas prendre quatre fois le même caractère. Au lieu de n, on aurait pu prendre

$\overline{n}$ = b a b b b a a a b a

obtenu à partir de n en permutant a et b; mais, dans un même texte, on ne peut utiliser simultanément n et $\overline{n}$.

Ainsi

$$\boxed{N\,(2\,,\,4) \;=\; 34}$$

On pourrait disserter longuement sur ces textes "maximaux"; on se limitera à deux remarques:

- La première concerne l'abondance des cadences d'ordre 3.
- La deuxième est moins évidente. Si l'on déduit de (T) un texte T_r, obtenu en prenant dans (T) des éléments en progression arithmétique de raison r , T_r est de même nature que T ; ainsi, pour r = 2, on a :

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{b a b b b a a a b a} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{b a b b b}$$

ou

$$\text{a a a b a} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{b a b b b a a a b a} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

4.3.- <u>L = 3 , K = 3</u>. On a obtenu cinq types de textes maximaux. On considère comme du même type, deux textes qui ne diffèrent que par une des six permutations des trois caractères; de plus, pour les textes non symétriques, on ne privilégie point un sens de lecture.

type A	a b c c b c b a a b b a a b c b c c b a a c c a c a
type B	a b a a b a b c c b b c c b a b a a b c c a a c a c
type C	a b a b b c b a a c a c c b c b b a b a c c a a c c
type D	a a b b c a a c a c b b c c b b c a c a a c b b a a
type E	a a b c b a a c a c b b c c b b c a c a a b c b a a

Ainsi

$$\boxed{N\,(\,3,\;3) \;=\; 26}$$

Là encore, que dire de ces textes? Nous nous limiterons à ceci.

- Les types A et B ne diffèrent que par la première lettre.
- Les types D et E, symétriques, ne diffèrent que par une permutation des 4ème et 5ème lettres (et 22ème et 23ème).
- Le type C est plus singulier. Si l'on déduit de ce texte les textes T_3 (v. 4.2 ci-dessus), on fait apparaître les textes maximaux à deux caractères, sans cadence d'ordre 3.

A savoir:

a b b c c b b c c

b b a a b b a a c

a c a c c a c a

5.- QU'EN CONCLURE ?

Sur la recherche du nombre N(L , K).- L'ébauche de la démonstration suffit à convaincre le lecteur que la borne trouvée, quant à la longueur du texte nécessaire pour affirmer l'existence d'une cadence, croît à une rapidité considérable, soit avec L, soit avec K. Déjà, pour L = 2, K = 3, il nous a fallu un texte de 325 lettres pour affirmer l'existence d'une cadence; alors que nous avons montré, expérimentalement, que la limite N (2, 3) est égale à 8. Certes, on pourrait réduire quelque peu la borne (cf. Van der Waerden); mais l'esprit de la démonstration demeure, et montre que la croissance est du même ordre que celle d'une exponentielle d'exponentielles ... On peut alors, s'interroger sur le fait que, par sa nature, la démonstration s'écarte délibérément de la procédure expérimentale; c'est là, peut-être, une direction de recherche !

Sur l'existence du nombre N(L, K).- Que ce soit l'économiste en présence d'une chronique, le joueur devant une série de résultats de boule, quiconque en présence d'une suite de caractères, cherche à y découvrir des régularités, puis à les interpréter. Que nous enseigne la conjecture de Baudet? La prudence, et seulement cela; la régularité peut n'être que la manifestation d'une nécessité arithmétique. Rien ne dit qu'elle n'est pas justiciable d'une autre interprétation.