MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. MORLAT

Des poids et des choix

Mathématiques et sciences humaines, tome 3 (1963), p. 3-19
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__3__3_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

G. MORLAT

DES POIDS ET DES CHOIX

Note de la Rédaction

Ainsi qu'il résulte de l'inventaire qui figurait dans la première livraison de "Mathématiques et Sciences Humaines", on enseigne ici et là, dans les Facultés des Lettres et des Sciences Humaines et dans les Instituts de psychologie, et d'une façon fort inégale, des techniques statistiques; mais on n'enseigne guère, semble-t-il, le calcul des probabilités; - qui seul peut à la fois justifier, faire bien comprendre, et permettre un emploi exempt d'erreurs grossières, des techniques statistiques - ni a fortiori la théorie de la décision, qui fournit la meilleure assise logique, et sans doute la seule valable pratiquement, à la notion de probabilité. C'est pour attirer l'attention sur cette lacune, qu'il faudra bien songer un jour à combler, que la Rédaction de M.S.H. a jugé opportun de publier l'article qu'on va lire, dont l'objet est de décrire, sans aucun appareil mathématique, les diverses théories de la décision, individuelle ou collective, dans lesquelles on peut trouver les fondements logiques de la probabilité, de l'utilité, et des systèmes de vote. Ce thème a fait l'objet, au printemps 1962, d'un exposé de l'auteur au séminaire sur les modèles mathématiques dans les Sciences Humaines (Ecole Pratique des Hautes Etudes - VIe section - Centre de Mathématique Sociale et de Statistique).

●

Note de l'Auteur

Vers la même époque où M. GUILBAUD nous avait invité à parler, au séminaire sur les méthodes mathématiques dans les Sciences Humaines, des théories de la Décision, M. Bertrand de Jouvenel avait publié dans le Bulletin S.E.D.E.I.S. (Société d'Etudes et de Documentation Economiques, Industrielles et Sociales) un intéressant mémoire, faisant la synthèse des recherches théoriques sur la décision, et examinant de façon critique les possibilités d'applications au domaine politique. Ce mémoire intitulé : "Les Recherches sur la Décision" constituait la vingt-troisième livraison (20.1.62) de la série "Futuribles" du Bulletin que dirige M. de Jouvenel, série où il présente depuis plusieurs années des études d'auteurs fort divers, ayant trait à la prévision dans le domaine politique : modes de gouvernement, développement économique des diverses zônes mondiales, évolution sociale, rôle de la science et de la technique, le travail humain, l'information, la liberté, bien d'autres thèmes encore contribuent à faire de la série "Futuribles" une fresque composée des images que nos contemporains les plus raisonnables se font de la société et du monde dans dix ou quinze ans; cette fresque est sans doute connue de beaucoup des lecteurs de "Mathématiques et Sciences Humaines".

Donc, ayant publié dans ce cadre son tableau des "Recherches sur la Décision" M. Bertrand de Jouvenel avait invité quelques personnes à y répondre, et il publia dans les mêmes "Futuribles" (n° 26 - 1.3.1962) des commentaires de MM. Bruno de Finetti, R. Larger, G.L.S. Schackle et nous-même. Le présent article reproduit pour l'essentiel notre contribution à "Futuribles", avec l'aimable autorisation de la S.E.D.E.I.S. (1).

---

(1) Société d'Etudes et de Documentation Economiques, Industrielles et Sociales - 205, Boulevard Saint-Germain - PARIS (7ème)

Un homme doit prendre une décision: cela signifie qu'il a le choix, plusieurs actions lui sont offertes. Il hésite. Ce choix est important, et notre homme est cultivé. Il a entendu parler des "théories de la décision". Ces théories peuvent-elles l'aider, en quoi peuvent-elles l'aider? Probablement pas à discerner ce qui est bon pour lui de ce qui ne l'est pas, mais plutôt :

- à vérifier que ses préférences sont "cohérentes", d'une certaine façon que définit précisément la théorie - quitte à corriger des incohérences ainsi révélées;

- à compléter ses préférences, pour certaines alternatives complexes dont l'ordre n'est pas directement ressenti, mais peut résulter d'autres choix, directement et clairement exprimés;

- à comprendre et justifier son choix, dans la mesure où le modèle impliqué par la théorie lui semblera décrire correctement les éléments essentiels de sa situation.

Ce n'est point là une aide négligeable, mais on ne saurait trop insister sur le dernier point: les théories de la décision offrent des modèles, d'abord, et accessoirement des critères de choix; avant d'employer quelque critère, dans une situation pratique, il faut juger et critiquer le modèle, ce qui comprend à la fois les définitions et les postulats. Si l'on juge que le modèle est un bon modèle dans cette situation, alors il ne faut plus mettre en doute les conséquences de la théorie: ce serait une attitude incohérente. Que sont donc précisément ces modèles? Nous essaierons d'en donner une idée, en termes aussi peu abstraits que possible, en discutant d'une situation exemplaire de décision: celle d'un homme à qui on offre le choix entre plusieurs situations. Pour faciliter le langage, cet homme s'appellera "Je".

Je me vois offrir le choix entre trois situations, attirantes à des titres divers, respectivement à Paris, Athènes et Santiago du Chili.

C'est pour moi une décision assez importante pour que je prenne la peine d'établir le tableau bien connu :

PARIS					...
ATHENES					...
SANTAGIO					...

Mais que vais-je donc mettre dans les colonnes ?

LA DECISION INDIVIDUELLE

En première analyse, je puis classer les avantages et les inconvénients respectifs des trois situations qui me sont offertes sous trois chapitres importants:

- le métier (possibilité d'un travail plus ou moins intéressant sur le plan intellectuel, plus ou moins rémunérateur, etc....)

- la famille (conditions de vie, d'éducation des enfants, agréments de l'épouse, etc...)

- les autres relations (amicales, facilités culturelles, etc...) considérations que je résumerai, pour parler bref, par le mot "ambiance".

Chacun de ces titres résume donc une foule de considérations, mais il n'est pas question de pousser plus loin l'analyse, sous peine de me retrouver désemparé devant un tableau trop complexe. Je puis supposer qu'à l'intérieur de chaque titre la manière dont j'ordonnerais Paris, Athènes et Santiago reste assez semblable. Une première agrégation m'a donc paru à la fois nécessaire et possible. D'ailleurs, je sais que les modèles sont forcément grossiers. Simplifions et bornons-nous résolument à ces trois titres. Je suis capable, à l'égard de chacun d'eux, de marquer un ordre de préférence net entre mes trois "actions" éventuelles.

Pour ce qui concerne le métier, mon expérience acquise, des travaux en cours, ... font que la meilleure solution serait de rester à Paris. Ensuite vient Athènes, puis Santiago.

Côté famille: j'ai des enfants en âge de profiter des voyages, et le Chili est un pays où ma femme pourrait avoir plusieurs domestiques, quand elle ne peut être assurée à Paris de l'aide d'une femme de ménage à temps partiel. Santiago l'emporte, puis Athènes et Paris.

Pour les autres relations, Athènes l'emporte de loin par l'aspect culturel et artistique, autant que climatique (il s'agit peut-être d'un séjour de quelques années, l'éloignement est modéré .....) Bref; j'ordonne ainsi pour ce titre: Athènes, Paris, Santiago et sans aucune hésitation.

Mes préférences aux divers égards retenus sont figurées au tableau ci-dessous (dans chaque case figure le rang de préférence de la ville en ligne par rapport au titre en colonne).

	Métier	Famille	Ambiance
Paris	1	3	2
Athènes	2	2	1
Santiago	3	1	3

Muni de ce tableau, comment vais-je choisir? A moi, la théorie de la Décision! Je me précipite sur les bons ouvrages (1) pour trouver la recette. Las! Aucun d'eux ne m'enseigne comment prendre cette décision individuelle, où n'entre pas d'incertitude, pas d'opposition, pas de choix collectif ..... rien de ce qui fait les délices des théoriciens. J'ai dû trop simplifier le problème.

Je pourrais me tirer d'affaire en admettant, à l'instar de Van Dantzig (2), qu'il y a en moi un statisticien, un père de famille et un épicurien, et qu'il s'agit pour ces trois individus distincts de prendre une décision collective!

J'examinerai un peu plus tard la théorie de la décision collective et ses ressources. Pour l'instant je noterai seulement que l'inventaire de mes personnages élémentaires est bien arbitraire (j'ai laissé tomber le patriote, le révolutionnaire, le syndicaliste et quelques autres qui pourraient revendiquer ....). D'autre part, le sort du père de famille et celui de l'épicurien sont si étroite-

(1) Cf. Bibliographie sommaire, in fine
(2) Cf. La Décision - Colloque CNRS. 1961

ment liés, que je ne suis pas certain que le modèle proposé par une collectivité d'individus physiquement distincts, soit ici le plus raisonnable.

Mais il semble que la théorie qui a fait couler le plus d'encre, jusqu'ici, concerne la décision en présence d'incertitude.

LA DECISION DEVANT L'INCERTITUDE

Qu'à cela ne tienne, des incertitudes, l'avenir n'en manque pas, les journaux en sont remplis, et je prends conscience à cet instant qu'elles pèsent et combien gravement, sur les conséquences de la décision que je vais prendre aujourd'hui. Rester à Paris n'est peut-être guère prudent, avec ce climat pré-révolutionnaire (1), mais aller à Athènes ne l'est guère plus, en cas de conflit international, même limité. Je sais très bien que dans les pays d'Amérique latine aussi les troubles sont fréquents, mais le Chili se flatte à juste titre de n'avoir connu aucune révolution depuis des temps immémoriaux.

Je vais donc établir un tableau conforme au modèle proposé par nos bons théoriciens:

	"Conjonctures"/ou "Etats"		
"Actions"	Paix	Guerre civile	Guerre mondiale
Paris			
Athènes			
Santiago			

Ce tableau résume, comme disent certains, un "jeu contre la nature". (Dans le cas présent, c'est pour moi un jeu fort sérieux, soit dit en passant). Mais examinons si ma description est correcte.

Les états doivent être définis de manière telle qu'ils soient incompatibles, et décrivent exhaustivement l'avenir. Il me suffira d'admettre qu'un avenir comportant à la fois une guerre civile (en France) et une guerre mondiale sera classé à la rubrique "guerre mondiale". De façon précise, j'adopte les définitions suivantes :

Paix: pas de guerre civile en France, pas de guerre mondiale.
Guerre civile: guerre civile en France, pas de guerre mondiale.
Guerre mondiale.

Ces trois états sont bien incompatibles et décrivent exhaustivement, à ce qu'il semble, tout ce qui peut arriver. Naturellement, il faut sous-entendre dans chaque définition: "au cours des cinq prochaines années", ce qui représente la durée des contrats qui me sont offerts à Paris, Athènes et Santiago.

(1) La première version de ce texte était écrite en Décembre 1961, à une époque où le parachutage sur Paris d'activistes venus d'Alger constituait, pour des gens raisonnables, une éventualité nullement exclue.

Plusieurs théoriciens ont souligné que les actions ne devraient pas avoir d'influence sur les états. Etant statisticien, et non pas agent secret, j'ai le sentiment que cette condition est assez bien vérifiée.

Pour l'instant, je n'ai encore rien mis dans les cases de mon tableau. Que recommandent les auteurs? D'aucuns me disent d'y mettre des chiffres, exprimant des sommes d'argent ou des utilités. Mais je suis bien en peine d'évaluer en francs, ou même en "utiles" (1), les conséquences de mon départ à Athènes en cas de guerre mondiale. Je prévois seulement que je serai bien ennuyé, et c'est sans doute une litote! Heureusement, des théoriciens plus tolérants m'autorisent à mettre, dans les cases, des "conséquences" de quelque nature qu'elles soient. Entendez par là que dans chaque case je décris les heurs et malheurs qui surviendront, à moi et aux miens, si je choisis la ligne correspondante et si le sort (2) réalise la colonne correspondante. Bien sûr, pour décrire tout celà en détail il faudrait des volumes. Mais ici commence la magie de la théorie: Admettons seulement que de telles conséquences sont concevables, et baptisons-les commodément a, b, c, ...

	Paix	Guerre civile	Guerre mondiale	
Paris	a	b	c	(a b c)
Athènes	d	e	f	(d e f)
Santiago	g	h	i	(g h i)

J'aurai, dans le cas présent, vraisemblablement neuf conséquences toutes différentes. Avant de tirer profit de la théorie classique, je veux encore examiner plus complètement ses prémisses.

Il s'agit d'un arsenal de postulats, qui m'ont tous paru bien inoffensifs lorsque j'ai lu leur énoncé, en termes abstraits, sur les pages de garde de l'ouvrage de J.L. Savage: "The foundations of statistics". Quelques uns impliqueront que j'enrichisse, par la pensée, l'ensemble des actes entre lesquels je dois choisir: j'y joindrai des actes fictifs, qui n'ont peut-être pas toujours grande signification pratique, mais ce n'est pas très grave: si de tels actes étaient possibles, et que je dusse choisir parmi eux, je veux bien admettre que je m'imposerais des exigences logiques, correctement exprimées par ces postulats.

Pour résumer le sens pratique des postulats, Savage nous dit: Ce sont des propositions du genre: "Tu n'échangeras pas deux francs contre un franc". Il est vrai qu'on peut trouver un certain air de famille avec une proposition aussi simple et convaincante. Mais nous pensons utile de décrire plus complètement ces postulats en les énonçant en termes littéraires, ce qui sera forcément moins précis qu'un énoncé mathématique. Il y en a sept; dont les uns expriment les propriétés logiques qu'on est en droit d'attendre du choix d'un acte, les autres des exigences techniques assez peu compromettantes.

---

(1) Pour employer le langage très commode de Jimmy L. Savage.

(2) Entendez "fatum" et non point "sortem".

Le premier postulat demande qu'on ordonne complètement toutes les actions entre lesquelles il faut choisir. Est-ce trop demander ?

Le deuxième postulat implique ceci: si je préfère Paris à Athènes en cas de guerre mondiale et si je préfère Paris à Athènes dans le cas où il n'y a pas de guerre mondiale, alors je préfère Paris à Athènes lorsque j'ignore si une guerre mondiale va survenir. N'est-ce pas "logique" ?

Avant d'énoncer le troisième postulat, enrichissons l'ensemble des actes de tous les "actes constants". Si par exemple je nomme a la conséquence qu'aurait pour moi le fait de rester à Paris en cas de paix, je supposerai qu'il existe aussi un acte me procurant a quel que soit l'état déterminé par le sort (fatum). Plus généralement, il peut être expédient de convenir dès maintenant que tout acte procurant les résultats (x y z) sera pris en considération. Dans cette écriture, chacune des trois lettres (x y z) peut prendre, indépendamment des autres, n'importe laquelle des neuf valeurs, a, b, c, ... g, h, i. (Rappelons qu'il s'agit ici des neuf conséquences figurées dans le tableau initial). Il ne faut pas trop épiloguer sur la signification que pourraient avoir les actes fictifs. Cela pourrait signifier qu'en allant à Tahiti ou dans la Lune, je m'assurerais par exemple :

- en cas de paix, la même "conséquence" que si j'allais à Athènes et qu'il y eût une guerre mondiale,
- en cas de guerre civile, la même "conséquence" que si je restais à Paris, et que la paix fut préservée,
- en cas de guerre mondiale, la même "conséquence" que si j'allais à Athènes par temps de paix.

Peu importe que de telles actions ne me soient pas réellement offertes: comme je l'ai déjà signalé, je peux bien admettre que si elles l'étaient, mes exigences logiques seraient les mêmes.

Ces actions fictives vont faciliter l'étude de la structure de mes choix - et cela fait, libre à moi d'utiliser les propriétés acquises pour décider parmi les seules actions réellement offertes. On notera que les actions fictives que je viens de définir sont fort nombreuses (il y en a précisément sept cent vingt neuf), mais j'en introduirai dans un instant de bien plus nombreuses encore.

Revenons aux actes constants, du type (x, x, x). Le premier postulat énoncé doit s'y appliquer, ces actes seront supposés parfaitement ordonnés. Par exemple, je préfèrerai (b, b, b), à (d, d, d). On pourra dire, pour parler bref, que je préfère la conséquence b à la conséquence d. Le troisième postulat assure que je dois encore préférer b à d lorsque je sais, par exemple, qu'une guerre mondiale ne se produira pas. Cela paraîtra presque trivial. J'écrirai, de manière abrégée, que je préfère (b, b,) à (d, d,) dès lors que je préfère b à d.

Que dit le quatrième postulat? Il exige ceci: Supposons que je préfère b à d et f à c (conséquences). Alors les couples d'actions (bdx) et (dbx) d'une part, (fcx) et (cfx) d'autre part, doivent être classés dans le même ordre: préférer (bdx) à (dbx) implique que je préfère (fcx) à (cfx) - quel que soit l'élément x, pourvu que ce soit le même dans les quatre actions en cause. Que l'élément x ne joue aucun rôle, cela résulte en vérité du deuxième postulat. Mais que signifie donc la proposition contenue dans les lignes précédentes? Puisque b est pour moi la bonne conséquence, et d la mauvaise (relativement à cette comparaison binaire) dire que je préfère (b d x) à (d b x) implique en quelque sorte que je donne plus de poids à la première éventualité (paix) qu'à la seconde (guerre civile). En

d'autres termes, je considère que la paix est plus probable que la guerre civile. Il est donc naturel, puisque je préfère aussi f à c, que je préfère (f c x) à (c f x).

Le lecteur sourcilleux jugera que cette théorie fait bien des façons pour introduire la probabilité! Qu'il prenne garde que je n'ai introduit qu'un ordre, et pas une valuation, sur les états. Il était pour le moins agréable de montrer que cet ordre peut résulter de l'ordre sur les actes, au prix d'un postulat somme toute assez naturel. On concevra (mais mon exemple n'est peut-être pas assez riche pour que cela prenne tout son intérêt), que le quatrième postulat permet d'ordonner non seulement les états, mais tous les ensembles partiels d'états (ce que l'on nomme en algèbre les parties de l'ensemble des états, et qu'on appellera ici des "évènements"). Le rôle de ce postulat est donc d'assurer que l'ordre sur les actes induit un ordre sur les évènements, c'est ce qu'on appelle aussi, en termes techniques, une "probabilité qualitative".

Le cinquième postulat a un rôle technique mineur: il exclut l'indifférence générale, à l'égard de toutes les conséquences. (Si j'étais indifférent à ce point, il n'y aurait plus de problème !).

Le sixième postulat a aussi un rôle technique, mais il n'est pas mineur. C'est un postulat de continuité. Il veut qu'on puisse subdiviser ad libitum les états de manière qu'une modification de la conséquence affectée à un élément de la subdivision ait assez peu de poids pour ne pas affecter la préférence entre les actes.

Précisons cela. Comment subdiviser les états? Le plus commode sera de faire appel à des tirages au sort (sortem).

Si je préfère Paris à Athènes, c'est-à-dire (a b c) à (d e f), c'est le résultat de préférences conditionnelles entre a et d, b et c, c et f respectivement. Supposons, comme il est raisonnable dans cet exemple, que je préfère légèrement a à d, que je préfère de beaucoup e à b, et un tout petit peu c à f. (Je n'attache pas d'intérêt à discuter la valeur de ces préférences du point de vue moral, le lecteur l'aura bien compris. Cela ne fait rien à la logique).

Donc, je préfère de beaucoup e à b. Mais, comme il est dit au sixième postulat, construisons une subdivision assez fine de l'état correspondant (guerre civile). Par exemple, envisageons l'état ainsi défini: guerre civile, et une série de cent tirages à pile ou face amenant cent fois pile - ou bien encore, si l'on juge que ma pièce de monnaie n'est pas pertinente ici: guerre civile déclenchée le sept octobre mil neuf cent soixante deux, à neuf heures trente cinq du matin, sur la place de la mairie de Luz Saint Sauveur (Hautes Pyrénées) par l'assassinat d'un général par un adjudant de vingt sept ans et trois mois. La date du sept octobre n'est pas un anniversaire remarquable, et je ne connais pas de sous-officier révolutionnaire, encore moins d'adjudant de vingt sept ans. Je puis donc penser que l'éventualité élémentaire que j'ai énoncée, à l'intérieur de l'état "guerre civile", est pour moi suffisamment improbable, pour que toute modification des conséquences de mon choix, liée à cette éventualité, reste sans effet sur mes préférences. C'est ainsi qu'il faut comprendre le sens du sixième postulat.

Je qualifierai le septième postulat de technique; il s'énonce ainsi: si (a, b, c), est préférable à (d, d, d), ainsi qu'à (e, e, e), ainsi qu'à (f, f, f), alors (a, b, c,) est préférable à (d, e, f). En d'autres termes; un acte préférable à toute conséquence d'un autre est aussi préférable à ce dernier. Proposition assez banale, donc peu discutable.

Voilà énoncés les postulats, sur lesquels repose la théorie classique de la décision. On a peut-être jugé cet énoncé un peu lourd. Je ne crois pas qu'il soit indifférent. On a trop tendance à retenir la propriété fondamentale qui s'en déduit et qui caractérise finalement, de manière simple, les préférences satisfaisant aux postulats: cette propriété présente l'allure d'une règle. Et l'on éprouve le besoin très légitime de discuter de cette règle. S'impose-t-elle vraiment? - on a envie de chercher si une règle un peu plus raffinée ne plairait pas mieux. "Une formule linéaire, c'est bien simpliste ..... Et que faites-vous de la dispersion, Monsieur? ....." - Pour moi, il semble bien que les postulats, énoncés en termes de structures algébriques, doivent être l'objet essentiel de la critique.

Mais il convient de préciser ce qu'on a construit à partir de ces postulats (Ramsey, de Finetti, Von Neumann, Savage). C'est d'ailleurs assez connu. Ces postulats permettent de montrer trois choses: il existe des probabilités numériques, attachées aux états, et obéissant aux règles habituelles du calcul des probabilités - il existe une fonction numérique des conséquences (unique à ceci près que l'origine et l'unité de mesure peuvent être choisies arbitrairement) qu'on appellera "utilité" - la préférence obéissant aux postulats est précisément l'ordre engendré par l'espérance mathématique de l'utilité.

Revenons à notre exemple: Paris, Athènes ou Santiago. Si mes préférences sont conformes aux postulats décrits plus haut, alors je sais que tout se passe comme si j'avais mis des valeurs numériques dans les cases du tableau, au lieu des symboles a, b, c, ..., des probabilités numériques en tête des colonnes, et que je calculasse pour chaque ligne la moyenne pondérée (par les probabilités correspondantes) des valeurs qui figurent dans cette ligne.

Comment vais-je déterminer valeurs et probabilités? C'est une tout autre affaire, et une affaire bien délicate. Il existe pourtant quelques procédés pouvant aider à y voir plus clair.

Ai-je quelque idée sur les chances de paix ou de guerre? Bien sûr, j'en ai, mais je n'oserais d'emblée les traduire numériquement. Je peux éclairer ma lanterne en me demandant si je préfère risquer ma fortune, ou une certaine somme d'argent, sur la guerre ou sur telle loterie convenablement construite. De façon précise, combien faut-il mettre de boules noires et de boules blanches dans une urne, pour qu'il me soit indifférent de risquer un enjeu important pour moi sur le tirage d'une boule noire, ou sur l'éventualité d'une guerre au cours des cinq prochaines années? Au point d'indifférence, je dirai que la probabilité d'une guerre et la probabilité de tirage d'une boule noire sont égales à mes yeux. J'aurai, certes, bien du mal à décider du point d'indifférence, et peut-être devrai-je me satisfaire d'une précision fort grossière. Mais la situation n'est-elle pas la même dans d'autres problèmes de mesure des grandeurs? Je puis évaluer avec une assez bonne précision le tour de taille de la Vénus de Milo, d'une manière déjà beaucoup plus approximative celui de telle dame en chair et en os, et sans doute d'une façon fort grossière celui d'une éponge vivante (encore que je n'aie jamais tenté sérieusement ces diverses expériences). Ce n'est pas une raison pour dire que la circonférence d'une éponge vivante est une notion dénuée de sens.

Il faut commenter ici la distinction, faite par un certain nombre d'auteurs, entre probabilités objectives et probabilités subjectives. Je ne crois pas que cette distinction soit fondamentale, pas plus que je ne crois que la circonférence d'une éponge vivante et celle d'une boule de pétanque soient deux notions de natures différentes. Dans le domaine des probabilités, considérez les propositions suivantes :

La pièce de monnaie que je vais lancer en l'air tombera sur pile.

La pièce que j'ai lancée, qui est là sur la table, et que je cache de ma main, est tournée sur pile.

La pièce que j'ai tirée de mon gousset et que j'ai posée sur la table, sans que vous la voyiez, est tournée sur pile.

J'ouvre la Bible au hasard: la troisième lettre de la première ligne de la page de droite est une voyelle.

J'ouvre la Bible à la page cinq cent treize: la troisième lettre de la première ligne est une voyelle.

Un Français de soixante cinq ans mourra avant dix ans.

Monsieur DUPONT, qui a soixante cinq ans, mourra avant dix ans.

La première personne que je rencontrerai demain en sortant dans la rue mourra à soixante cinq ans.

St Grégoire de Nazianze est mort à l'âge de soixante cinq ans.

Toutes ces propositions sont pour moi incertaines.

Pour vous aussi, cher lecteur, je pense, elles le sont toutes, car vous ne savez pas quelle édition de la Bible je possède. Personnellement, je me sens plus ou moins apte à leur attribuer des probabilités, mais la notion de probabilité est dans tous les cas valable. Demandez-vous quelles probabilités sont objectives et quelles subjectives?

Réfléchissez et comparez. Si après cela la distinction entre probabilité objective et probabilité subjective garde quelque intérêt à vos yeux, c'est, ou bien que vous n'avez pas assez réfléchi, ou bien que la variété des propositions que j'ai énoncées était insuffisante.

Passons maintenant aux valeurs, pour rappeler que des méthodes de comparaison s'appliquent aussi, en principe, à leur détermination. Mais ici, il faut faire appel à des comparaisons un peu plus raffinées.

Je reprends le choix exemplaire: Paris, Athènes, ou Santiago? Imaginons que la perspective la plus séduisante pour moi soit de vivre en paix à Paris. La pire serait la guerre mondiale à Athènes. Profitant de l'arbitraire de l'origine, et de l'échelle de mesure, je donnerai la valeur cent à la première perspective (Paris et la paix), zéro à la seconde (Athènes et la guerre). Cela fait, je veux déterminer la valeur que j'attribue à un séjour à Santiago en cas de paix. Je vais envisager le choix entre :

- la certitude d'un séjour à Santiago en cas de paix,
- une loterie qui me donnerait avec une probabilité p, Paris et la paix, et avec une probabilité 1-p, Athènes et la guerre. Si p est voisin de zéro, je choisirai Santiago dans la paix, et si p est voisin de l'unité (imaginez que j'aie le loisir de prendre $p = 1 - 10^{-9}$) je choisirai la loterie. Il existe une valeur d'indifférence, p_0 et je conviendrai d'affecter la valeur $100\ p_0$ à la conséquence "Santiago dans la paix". Bien sûr, il se peut que cette valeur soit déterminée avec aussi peu de précision que la circonférence d'une éponge vivante, mais cela ne change rien au principe. Il est vrai que dans certaines circonstances la mesure des éponges perd tout intérêt, en raison même de son imprécision. Nous nous garderons d'en juger ici.

LA DECISION COLLECTIVE

Arrivé à ce point de mes réflexions, j'ai pensé que j'étais père de famille et que le choix pour Paris, Athènes ou Santiago intéressait ma femme et mes enfants. Ai-je assez tenu compte de leurs opinions? Cela intéresse aussi mes collègues, des amis chers ou moins chers, des parents proches ou moins proches .... Mais il faut savoir se limiter, et je prendrai seulement l'avis de mon épouse et de mes enfants (ces derniers sont assez unanimes entre eux, partageant un enthousiasme juvénile pour l'aventure). Voilà une tout autre interprétation de mon tableau initial: je vais y inscrire les préférences de chacun.

	Moi	Femme	Enfants
Paris	1	3	3
Athènes	2	1	2
Santiago	3	2	1

Je préfère Paris, ma femme préfère Athènes, mes enfants préfèrent Santiago. Chacun de nous a même ordonné complètement les trois éventualités, et les rangs de préférence figurent au tableau ci-dessus. Dans ma famille règne un bon esprit de démocratie. nous souhaiterions nous mettre d'accord selon les meilleures règles de la théorie de décisions collectives. Que nous apprend cette théorie, ou plutôt que nous apprennent ces théories? Pour l'essentiel, ceci (qui est la traduction en termes littéraires d'un résultat mis en évidence par Kenneth J. Arrow; nous ne saurions énoncer ce résultat de manière rigoureuse sans user d'un langage algébrique) :

Si les ordres de préférence individuelle sont quelconques et si l'on veut un choix démocratique, on ne peut être sûr de pouvoir toujours déduire une préférence collective. Mais l'expression de "choix démocratique" est trop vague pour éviter le risque de graves contresens. Il nous faut énoncer avec plus de précision le théorème d'Arrow. Considérons donc les quatre conditions suivantes, qu'il paraît raisonnable d'imposer à une bonne règle de choix démocratique:

La première condition exprime que si Paris est préféré à Athènes dans le choix collectif résultant du tableau ci-dessus, il en sera de même si une préférence individuelle est modifiée de façon que Paris gagne des places, sans autre changement pour l'ordre entre Athènes et Santiago. Par exemple, si le tableau précédent conduit à préférer collectivement Paris à Athènes, il doit en être de même du tableau suivant :

	Moi	Femme	Enfants
Paris	1	3	2
Athènes	2	1	3
Santiago	3	2	1

dans lequel mes enfants ont fait gagner une place à Paris, sans que rien soit modifié par ailleurs.

La deuxième condition exprime que l'ordre de préférence collective entre Paris et Athènes ne dépend que des préférences individuelles entre Paris et Athènes, et pas de la place occupée par Santiago dans les préférences individuelles. Par exemple, si Paris est préféré à Athènes (collectivement) à partir du premier tableau cité, il en sera de même pour les préférences individuelles ci-dessous :

	Moi	Femme	Enfants
Paris	2	3	3
Athènes	3	1	2
Santiago	1	2	1

On constate en effet que j'ai seulement déplacé le rang de Santiago dans la première colonne, sans modifier l'ordre Paris-Athènes dans cette colonne, ni quoi que ce soit aux autres colonnes. Bien entendu, il se peut que l'ordre collectif ait été Paris-Athènes-Santiago dans le cas du premier tableau et que ce soit maintenant Santiago-Paris-Athènes. C'est seulement l'ordre pour le couple (Paris, Athènes) qui ne doit pas être affecté. On voit que cette deuxième condition exprime l'indépendance, pour la préférence collective à l'égard d'un couple d'éventualités par rapport à la place individuelle des éventualités n'appartenant pas au couple. On pourra juger qu'elle exige ainsi une cohérence logique élémentaire.

La troisième condition exprime qu'il peut exister un tableau de préférences conduisant au choix collectif de n'importe quelle éventualité. C'est trivial (mais la logique demande qu'on exprime ainsi des exigences triviales, nous l'avons vu à propos de la décision en présence d'incertitude): si tout le monde préférait Athènes, mon problème serait simple.

La quatrième condition (non-dictatorship, dit Arrow), exprime vraiment une idée démocratique. Elle dit simplement que je tiens compte de l'opinion de ma femme et de mes enfants. Cela signifie que la préférence collective ne saurait être Paris, Athènes, Santiago (c'est ma préférence personnelle) quelle que soit la nature des deux autres colonnes (femme et enfants respectivement). N'est-ce pas là le contenu minimum que l'on peut donner à l'idée de démocratie?

Hélas! Arrow m'apprend que ces quatre conditions sont incompatibles (1).

Ne peut-on prendre de décision collective de manière démocratique? On peut certes le faire, mais il ne faut pas être aussi exigeant; il y a plusieurs façons de mettre de l'eau dans son vin. Citons deux voies différentes, ayant toutes les deux quelque intérêt pratique.

Si l'on veut s'en tenir aux données prises en compte jusqu'ici (ordres de préférence individuelle, et rien de plus) on notera que le théorème d'impossibilité d'Arrow a pour conséquence, entre autres, l'apparition de certaines diffi-

(1) Dans les théories de la décision, on trouve assez fréquemment des théorèmes d'existence (Savage) ou des théorèmes d'impossibilité (Milnor, Arrow). Les uns et les autres ne sont pas, à nos yeux, dépourvus d'intérêt pratique. Si un théorème d'existence (concernant la probabilité par exemple) ne nous apprend pas comment déterminer numériquement cette probabilité, il nous dit au moins: ne cherchez pas systématiquement à vous en passer. L'intérêt d'un théorème d'impossibilité est encore plus évident: n'insistez pas. On notera que le résultat fondamental mis en évidence par Milnor dans le mémoire "Games against Nature", (in "Decision Processes", édité par Thrall, Coombs et Davis, Wiley, 1954) constitue, comme celui d'Arrow, un théorème d'impossibilité.

cultés, dans "les décisions prises à la pluralité des voix", qu'avait signalées en son temps le conventionnel Antoine - Nicolas de Condorcet, et que G.Th.Guilbaud a très clairement rappelées et analysées naguère (1). Nous n'y reviendrons pas ici, d'autant moins que le mémoire de G.Th. Guilbaud va être réimprimé très prochainement. Nous observerons seulement avec l'auteur que des procédures de vote démocratique (élections des édiles ou des députés, référendum) fonctionnent parfois de manière satisfaisante. La condition pour qu'il en soit ainsi réside dans un certain accord (on dirait aussi bien: pas de désaccords trop vifs et trop généralisés) entre les opinions individuelles des citoyens. Si les opinions divergent trop, le peuple a le sentiment que le vote perd son sens, en tout cas il n'y croit plus: sur cette réaction, le théorème d'impossibilité d'Arrow jettera quelque lumière.

Mais une seconde voie est ouverte: si nous ne réussissons pas dans l'agrégation des préférences individuelles (structures d'ordre) nous pouvons songer à exprimer les opinions des individus par des structures algébriques plus particulières - et ce n'est pas gratuit.

Ne quittons pas notre exemple: Paris, Athènes ou Santiago. Les tableaux de préférence auxquels je me suis intéressé jusqu'ici expriment-ils tout de ma situation? Certainement pas, et dès les premières réflexions, apparaissent deux éléments psychologiques et familiaux, de grande importance dans ce problème.

Le premier réside dans l'intensité des préférences. D'après le tableau initialement envisagé, je range mes trois décisions dans l'ordre Paris - Athènes - Santiago. Ma femme déclare Athènes, Santiago, Paris. Mais il se peut que je préfère de beaucoup Paris à Athènes, et presque pas Athènes à Santiago; tandis que mon épouse aura dans tous les cas des préférences très légères. Si nous sommes capables (et nous le sommes, elle et moi, bien sûr) de discuter ensemble nos sentiments, nous pourrions nous mettre d'accord pour tenir compte proprement des préférences de chacun, selon qu'elles sont fortes ou faibles. Voilà introduite une notion qui se rapproche de l'utilité. Il ne semble pas qu'on ait jusqu'ici réussi à rendre cette notion très "opérationnelle" dans ce genre de problème, et particulièrement, pour les décisions politiques, mais qu'importe? Ce n'est pas une raison suffisante pour nier son existence et son rôle.

Il y a autre chose. Je suis le chef de famille (je ne sais pas où en est la réforme du régime matrimonial en France) et j'ai un peu d'autorité morale, en tout état de cause, sur mon épouse et mes enfants. J'accorderai peut-être plus de poids à mes préférences (munies, si grossièrement que ce soit, de leurs intensités) qu'à celle de ma femme et de mes enfants (munies de même), ou bien, si je suis époux galant et père dévoué (ou faible) je pondérerai à l'inverse. Le souci de tenir la balance égale reviendrait à une pondération particulière. En tout cas, l'idée de pondérer les opinions ne semble pas fausse: elle traduit au contraire une réalité psychologique et sociale évidente.

Comment déterminer ces poids, c'est une autre affaire. Dans la cité, on jugera peut-être, au nom d'un certain idéal démocratique (bien plus exigeant que la quatrième condition d'Arrow) que des poids égaux à tous les citoyens s'imposent sans conteste. Historiquement cela n'a pas toujours été le cas, et aujourd'hui encore on retire parfois le droit de vote pour sanctionner certaines fautes, ou simplement en vertu de certains statuts sociaux particuliers, etc....

---

(1) G. Th. Guilbaud - Les théories de l'intérêt général - (Economie Appliquée - 1952 - N° 4).

Je retiens simplement que la prise en compte de l'intensité des préférences et de l'importance sociale des citoyens peut résoudre le problème des décisions collectives. C'est au moins une réponse logique. C'est même la seule, dans un certains contexte et avec une définition formelle convenable de l'exigence logique. On y reviendra un peu plus loin.

LA DECISION EN FACE D'UN ADVERSAIRE

Je viens d'apprendre, par une indiscrétion, que mon collègue Dupont se demande lui aussi quel poste il va briguer, précisément parmi les trois affectations qui me sont offertes. Il sait que je sais qu'il se pose le même problème que moi. Connaissant ses compétences (et les miennes) connaissant aussi les sentiments de notre commun patron, je puis imaginer ce qui se passera, dans toutes les hypothèses, et je représente cela par un tableau (toujours le même cadre, mais avec un sens nouveau !).

		Dupont brigue		
		Paris	Athènes	Santiago
Je brigue	Paris			
	Athènes			
	Santiago			

C'est, disent nos théoriciens, un jeu à deux personnes à somme non nulle. On a étudié de tels jeux lorsque les "conséquences" (le contenu des cases) s'expriment d'emblée numériquement: somme d'argent ou nombre de haricots, selon le cas. C'est déjà assez complexe.

Pour les jeux à somme nulle, ou "duels" (les gains de Dupont et les miens seraient dans chaque case égaux mais de signes contraires, ce que l'un gagne, l'autre le perd) existe une théorie générale assez simple: le lecteur intéressé pourra se reporter à un bon exposé sur la question (Guilbaud, Bouzitat, Williams, Luce et Raiffa, etc....).

J'ai voulu seulement citer en bonne et due place cet aspect de mon problème exemplaire.

LA DECISION COLLECTIVE DEVANT L'INCERTITUDE

Voici une dernière forme d'analyse du choix exemplaire; Paris, Athènes, Santiago. Je consulte ma famille, et nous envisageons ensemble l'avenir et la paix du monde.

Chacun exprime ses préférences conditionnelles - en cas de paix, en cas de guerre civile, en cas de guerre mondiale (même définitions que plus haut pour ces trois "états").

Je donne dans les tableaux ci-dessous une représentation simplifiée des opinions ainsi exprimées: j'ai seulement marqué d'une croix les décisions préférées. pour chaque état, par moi-même, ma femme et mes enfants. J'ai gardé quant à moi.

les préférences justifiées plus haut, qui correspondent en gros à un souci de sécurité.

Les choix de ma femme marquent un souci encore plus marqué pour la sécurité, tempéré par l'idée qu'en cas de guerre mondiale, même le Chili n'offre aucun abri, et alors mieux vaut mourir chez soi, si l'on doit mourir. Quant à mes enfants, leur âge est celui du goût pour l'aventure: ils veulent être partout aux premières loges. Cela donne les tableaux suivants :

	Paix	Guerre civile	Guerre mondiale		Paix	Guerre civile	Guerre mondiale		Paix	Guerre civile	Guerre mondiale
Paris	X						X			X	
Athènes		X			X						X
Santiago			X			X			X		

MOI FEMME ENFANTS

Ce qui a été dit au chapitre de la décision individuelle devant l'incertitude s'applique, bien entendu, à chacun de nos trois personnages: si toutefois ils veulent bien exiger de leurs choix qu'ils obéissent aux normes de "rationalité" définies, par exemple, par les postulats de Savage (cf Supra) alors chacun possède une utilité, une probabilité, et cherche à maximiser l'espérance de la première par rapport à la seconde.

Il serait séduisant de pouvoir construire simultanément une probabilité collective et une utilité collective, de manière telle que les choix collectifs consistent à rendre maximum l'espérance de l'utilité collective, par rapport à la probabilité collective. Mais c'est en général impossible, si l'on désire à la fois laisser les individus fixer librement leurs utilités et leurs probabilités, et imposer quelque lien logique entre les choix individuels et le choix collectif.

Nous nous restreindrons donc, en supposant que nous avons pu nous mettre a priori parfaitement d'accord, ma femme, mes enfants et moi-même, pour ce qui concerne les probabilités de paix et de guerre (1). Par contre, nos utilités individuelles sont choisies par chacun en toute liberté.

Cela dit, qui d du choix collectif? Supposons le problème résolu, suivant une méthode assez féconde en géométrie élémentaire; c'est-à-dire, admettons que notre collectivité soit capable d'exprimer des choix "rationnels" (toujours dans le même sens des postulats de Savage). Cela entraîne que la collectivité possède elle aussi une utilité, une probabilité, et qu'elle cherche à maximiser son espérance d'utilité.

Dès lors, il me suffira d'admettre en outre un postulat assez naturel, qui exprime un lien logique entre les choix individuels et le choix collectif - et que Jacques Drèze appelle "principe d'unanimité" - à savoir :

Si tous les individus jugent deux décisions indifférentes, alors la collectivité juge aussi ces deux décisions indifférentes.

(1) Cela ne signifie nullement que ces probabilités puissent être qualifiées d'objectives.

L'utilisation de ce postulat permet d'établir d'importantes propriétés, caractérisant le choix collectif.

Il permet de montrer, comme il est naturel, que la probabilité collective se confond avec la probabilité commune aux divers individus.

Mais surtout, il permet d'établir que l'utilité collective n'est rien d'autre qu'une somme pondérée des utilités individuelles. Les coefficients de pondération, propres aux différents individus, seront dénommés "poids sociaux" ou "autorités". Si l'on impose que deux décisions, jugées indifférentes par tous les individus sauf un, soient classées par la collectivité dans le même ordre où elles le sont par l'individu qui n'est pas indifférent, alors les autorités seront toutes positives. C'est une condition naturelle, si l'on est entre gens de bonne compagnie.

Maintenant, comment va-t-on fixer les autorités attribuées aux divers individus? Ce n'est certes pas à la logique de nous l'apprendre. De même, la théorie classique de la probabilité-utilité nous enseigne seulement l'existence de certaines fonctions numériques (à partir de postulats donnés). Les méthodes de paris et de comparaisons introspectives que nous avons sommairement décrites ne ressortissent plus à la logique. Elles donnent néanmoins une méthode pour se faire une idée, parfois grossière, des probabilités et des utilités, même si cette méthode n'est pas toujours applicable facilement.

Pour ce qui concerne les autorités, nous ne connaissons rien de comparable. Est-ce à dire qu'il s'agit d'une notion tout à fait dénuée d'intérêt? Nous ne le croyons pas; si une collectivité accepte de prendre une décision collective, cela implique beaucoup: que chacun est disposé à tenir compte de l'opinion des autres, et même - soyons réalistes - à faire plus ou moins grand cas de telle opinion suivant la personnalité, la compétence ou la puissance de fait de l'individu qui l'exprime. C'est là qu'il faut chercher la source psychologique des "poids sociaux" ou "autorités" dont nous n'avons fait qu'établir l'existence logique (à l'aide de postulats déterminés, et qu'on pourra juger relativement peu exigeants). La traduction en chiffres est certainement fort délicate, si même on la juge nécessaire.

LES DECISIONS REELLES ET LA THEORIE

Si l'on croit possible, voire utile, de tirer de ces propriétés logiques quelque inspiration (à défaut d'applications pures et simples) ce n'est certes pas dans le cadre d'une décision familiale comme celle que propose le problème exemplaire que j'ai discuté tout au long des pages précédentes. On attend plutôt que cette logique simple éclaire, à défaut de les résoudre, les choix civiques, les décisions économiques nationales (on souhaiterait pouvoir ajouter internationales aussi), les problèmes constitutionnels. Il faut insister sur la portée de cette logique dont nous avons donné une description sommaire: elle établit que des autorités régissent l'ordre entre les actions disponibles, dans une situation donnée, pour que cet ordre soit cohérent avec les postulats. Elle n'impose nullement, que dans une autre situation toute différente, devant laquelle serait placée la même collectivité, les autorités seraient nécessairement les mêmes.

Revenons pourtant à notre problème exemplaire; il s'agit de ma situation pour les cinq prochaines années, à Paris, à Athènes ou Santiago, et je pense que ma propre autorité sera légitimement assez importante et sans doute supérieure à celle de mes enfants. Si je discute en famille du choix entre une table de ping-pong et

un kayak pour les prochaines vacances, j'admettrai très volontiers que l'autorité de mes enfants l'emporte assez largement sur la mienne.

De même, s'il était concevable, au sein de la cité, de consulter par référendum ses différents membres sur des questions assez particulières, touchant par exemple à la décoration des églises, à la répartition des crédits entre les différents laboratoires universitaires et à la conception d'un réseau d'irrigation, peut-être ne conviendrait-il pas d'user des mêmes autorités si l'on a retenu le principe des autorités inégales pour les différents citoyens. Mais la théorie n'impose nullement des autorités invariantes dans des situations aussi diverses.

En vérité, l'emploi pratique des autorités est fort ancien, et se fonde bien sur les arguments de compétence que nous avons cités. Certaines règles constitutionnelles ont accordé plusieurs voix à certaines catégories de citoyens jugés particulièrement sages. Des votes pondérés se rencontrent également dans quelques instances internationales. Mais le plus souvent, faute d'un procédé assez général et assez raffiné pour mesurer les autorités, on se contente de leur accorder des valeurs égales à zéro ou à un. Cela revient à dire que le rôle assigné à la Constitution est de définir le Collège électoral qui sera consulté pour les diverses catégories de décisions collectives.

Cela fait, la consultation elle-même doit être nécessairement simplifiée. Les procédures de détermination des utilités individuelles, par des comparaisons multiples et honnêtes, risquent de s'avérer souvent inapplicables ainsi que l'a noté Bertrand de Jouvenel. On demandera alors à chaque individu d'attribuer l'utilité "un" à l'éventualité qu'il préfère, et "zéro" à toutes les autres. Moyennant quoi, on retrouve la procédure la plus courante de vote à la majorité simple, qui donne souvent assez bien satisfaction. Il faut que les utilités individuelles soient assez gravement divergentes pour que la simplification admise dans ce système de vote s'avère franchement inacceptable. Dans ce cas, il serait peut-être intéressant de rechercher une méthode un peu plus raffinée pour mesurer les utilités individuelles. Admettons, pour une collectivité assez nombreuse, que l'amplitude des variations des utilités des différents citoyens n'est statistiquement pas trop dispersée - on pourrait trouver une bonne présomption dans ce sens dans le fait qu'il s'agirait de décisions collectives intéressant à peu près au même degré les différents citoyens; des problèmes comme ceux qui concernent les investissements routiers ou hospitaliers ne sont pas loin, dans un pays comme la France, de jouir de cette propriété. Alors, on pourrait réhabiliter à bon droit l'attribution de notes, comprises dans un intervalle fixé (de zéro à dix par exemple) et qui seraient attribuées par les citoyens aux grandes options soumises à leur choix, au cours d'un référendum. On atteindrait ainsi une approximation un peu plus raffinée des utilités individuelles et donc de l'utilité collective. Il va de soi que la mise en oeuvre d'une telle pratique suppose un minimum d'information, touchant à la logique des décisions, de la part de tous les citoyens. Ce n'est peut-être pas inconcevable.

*

* *

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

En Français :

B. de Finetti. La prévision; ses lois logiques; ses sources subjectives. Annales de l'Institut Henri Poincaré. 1937.

La Décision - Colloques internationaux du C.N.R.S. - 1961.

L'incertitude et l'action - (Economie Appliquée - Tome XIII - N° 1 - 1960).

Georges Th. Guilbaud - Leçons sur les éléments principaux de la Théorie Mathématique des jeux - Stratégies et Décisions Economiques - (C.N.R.S. - 1954).

Jacques Drèze - L'utilité Sociale d'une vie humaine.
(numéro 22 de la Revue française de Recherche Opérationnelle, 2ème trimestre 1962).

En Anglais :

R. Ducan Luce et H. Raiffa - Games and Decisions - (Wiley-1957).

Jimmy L. Savage - The foundations of Statistics - (Wiley-1954).

Thrall, Coombs and Davis (éditors) - Decisions Processes - (Wiley-1954).