

SAMIR AKESBI

**Splitting d'opérateur pour l'équation de transport neutronique
en géométrie bidimensionnelle plane**

ESAIM: Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 34, n° 6 (2000),
p. 1109-1122

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_2000__34_6_1109_0

© SMAI, EDP Sciences, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « ESAIM: Modélisation mathématique et analyse numérique » (<http://www.esaim-m2an.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPLITTING D'OPÉRATEUR POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT NEUTRONIQUE EN GÉOMÉTRIE BIDIMENSIONNELLE PLANE

SAMIR AKESBI¹

Abstract. The aim of this work is to introduce and to analyze new algorithms for solving the transport neutronic equation in 2D geometry. These algorithms present the duplicate favors to be, on the one hand faster than some classic algorithms and easily to be implemented and naturally devised for parallelisation on the other hand. They are based on a splitting of the collision operator holding amount of characteristics of the transport operator. Some numerical results are given at the end of this work.

Résumé. Le but de ce travail est d'introduire et d'analyser de nouveaux algorithmes pour la résolution de l'équation de transport neutronique en géométrie bidimensionnelle plane. Ces algorithmes présentent le double avantage d'être, d'une part, plus rapides que certains algorithmes classiques, et facilement implémentables et parallélisables, d'autre part. Ils sont issus d'un splitting de l'opérateur de collision tenant compte des caractéristiques de l'opérateur de transport. Des résultats numériques sont donnés à la fin de ce travail.

Mathematics Subject Classification. 45K05, 68W40.

Received: September 28, 1999.

INTRODUCTION

On considère l'équation de transport neutronique stationnaire en géométrie bidimensionnelle plane :

$$(P) \quad \begin{cases} Tf(x, \Omega) = Kf(x, \Omega) + S(x, \Omega), & (x, \Omega) \in Q \stackrel{\text{def}}{=} D \times B \\ f(x, \Omega) = d(x, \Omega), & (x, \Omega) \in \Gamma^- \end{cases}$$

où $D = (0, a) \times (0, b)$, $a, b > 0$, $B = \{\Omega \in \mathbb{R}^2 / \|\Omega\|_2 < 1\}$ et $\Gamma^- = \{(x, \Omega) \in \partial D \times B \text{ tel que } \Omega \cdot n(x) < 0\}$, $n(x)$ étant le vecteur normal extérieur à ∂D au point x .

L'opérateur de transport T est défini par :

$$Tf(x, \Omega) = \Omega \cdot \nabla_x f(x, \Omega) + \sigma(x)f(x, \Omega),$$

$$D(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^2(Q), \Omega \cdot \nabla_x f \in L^2(Q), f(x, \Omega) = d(x, \Omega) \text{ sur } \Gamma^-\}.$$

Keywords and phrases. Algorithms, convergence, neutronic transport, integro partial differential equations.

¹ Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Haute-Alsace, 4 rue des frères Lumières, 68093 Mulhouse Cedex, France. e-mail: S.Akesbi@univ-mulhouse.fr

L'opérateur intégral de collision K est défini par :

$$Kf(x, \Omega) = \int_{\overline{B}} k(x, \Omega, \Omega') f(x, \Omega') d\Omega'.$$

La fonction S désigne un terme source positif, k un noyau de collision positif borné, σ la section efficace totale et f représente le flux de neutrons à déterminer.

Sous les hypothèses :

$$(H1) \quad \sigma \in L_+^\infty(D),$$

$$(H2) \quad K \in L_+(L^2(Q)),$$

$$(H3) \quad r_\sigma(\Theta) < 1 \text{ avec } \Theta = T^{-1}K,$$

le problème (P) admet une unique solution positive pour tout $S \in L_+^2(Q)$ et $d \in L_+^2(\Gamma)$.

Une discrétisation directe de ce problème conduirait, de par la présence du terme intégral, à un système plein. L'utilisation d'algorithmes itératifs de résolution est donc nécessaire à la condition que la convergence de ces derniers ne soit pas lente. On appelle algorithme standard de résolution du problème (P) la méthode itérative définie par :

$$(A_s) \quad \begin{cases} Tf^{(n+1)} = Kf^{(n)} + S & \text{dans } Q \\ f^{(n+1)} \in D(T), \quad f^{(0)} & \text{donné dans } D(T). \end{cases}$$

L'inconvénient majeur de cet algorithme est la lenteur de sa convergence (assurée par l'hypothèse (H3)) lorsque le milieu présente des zones proches de la criticité (milieu opaque). Une accélération de la convergence de cet algorithme dite accélération par diffusion synthétique (DSA) a été introduite par Alcoffe en 1977 [6] dans le cas d'une géométrie 1D plane et a été étudiée aussi bien théoriquement que numériquement dans le cas de conditions aux limites de type réflexion (*i.e.* $f(x, \Omega) = f(x, -\Omega)$, $\forall x \in \partial D$). En 1D cette étude peut être consultée dans [6, 9] et en 2D on peut se référer à [1]. Toutefois, dans le cas de conditions aux limites de type flux entrant donné, nous ne disposons d'aucun résultat théorique de convergence de la DSA (voir [12, 13]). D'autre part sa mise en œuvre en géométrie bidimensionnelle, et surtout dans le cas où le noyau de collision k n'est pas constant, est très difficile.

Nous nous proposons alors de définir de nouveaux algorithmes plus rapides que (A_s) présentant trois autres avantages non négligeables à notre avis :

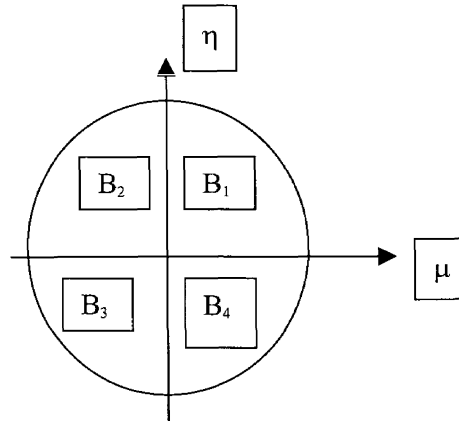
- leur mise en œuvre numérique est aussi aisée que celle de l'algorithme standard (A_s) ;
- ils sont intrinsèquement parallélisables ;
- une accélération de leur rapidité de convergence par une méthode de type correction additive semblable à la DSA est moins difficile aussi bien à mettre en œuvre qu'à étudier théoriquement.

1. DÉCOMPOSITION DE L'OPÉRATEUR DE COLLISION

Les conditions aux limites de notre problème ainsi que les caractéristiques de l'opérateur de transport T nous ont conduit (voir [2-5]) à définir les opérateurs intégraux K_{ij} de noyaux :

$$k_{ij}(x, \Omega, \Omega') = k(x, \Omega, \Omega') \times \mathbf{1}_{Q_i}(x, \Omega) \times \mathbf{1}_{Q_j}(x, \Omega') \text{ où } Q_l \stackrel{\text{déf}}{=} D \times B_l \quad l \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (1.1)$$

les B_l étant donnés par la figure ci-dessous :



Cette nouvelle approche correspond ainsi à un découplage de l'opérateur intégral, suivant les parties de la solution qui correspondent aux directions positives et négatives des composantes μ et η de la variable angulaire Ω .

De manière triviale on a les trois propriétés :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ij}(f) = K_{ij}(f \cdot \mathbf{1}_{Q_j}) \cdot \mathbf{1}_{Q_i} \\ K_{ij}(f_k) = 0 \quad \text{si } k \neq j \\ K = \sum_{i,j=1}^4 K_{ij}. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

On peut alors affirmer que la solution f du problème (P) s'écrit de manière unique sous la forme $f = \sum_{i=1}^4 f_i$ où les fonctions f_i désignent les solutions dans $D(T)$ du système couplé d'équations intégrodifférentielles :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} T - K_{11} & -K_{12} & -K_{13} & -K_{14} \\ -K_{21} & T - K_{22} & -K_{23} & -K_{24} \\ -K_{31} & -K_{32} & T - K_{33} & -K_{34} \\ -K_{41} & -K_{42} & -K_{43} & T - K_{44} \end{pmatrix}}_W \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

où $S_i = S \times \mathbf{1}_{Q_i}$. On a alors nécessairement $f_i = f \times \mathbf{1}_{Q_i}$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$.

L'algorithme standard (A_s) correspond, par analogie avec les systèmes linéaires en dimension finie [7, 14], à une décomposition de la matrice d'opérateurs W sous la forme $M - N$ avec $M = \text{diag}(T)$. On peut alors, toujours par analogie, proposer des algorithmes issus d'autres décompositions, par exemple de type Jacobi, Gauss-Seidel ou de relaxation. Toutefois ces derniers ne seraient intéressants que si le coût (en temps de calcul) de chaque itération est du même ordre que celui d'une itération de l'algorithme standard (A_s). Cela revient à dire qu'il faudrait pouvoir résoudre l'équation *intégrodifférentielle* $(T - K_{ii})f_i = g$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ presque aussi rapidement que l'équation *aux dérivées partielles* $Tf_i = g$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$. Ceci s'avérerait possible grâce à l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(H4) \quad k(x, \Omega, \Omega') = C(x) \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_l(\Omega) \cdot \alpha_l(\Omega').$$

Cette hypothèse, traduisant une sorte de séparabilité de variables du noyau de collision k , n'est pas très restrictive au vu des différents noyaux connus en neutronique.

On appelle méthode de Jacobi associée à la résolution du problème (P) la méthode issue de la décomposition de l'opérateur W sous la forme $M - N$ avec $M = \text{diag}(T - K_{ii})$. L'algorithme associé à cette décomposition est donné par :

$$(A_J) \quad \begin{cases} (T - K_{ii})f_i^{(n+1)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^4 K_{ij}f_j^{(n)} + S_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(n+1)} \in D(T). \end{cases}$$

De la même manière on définit l'algorithme de Gauss-Seidel par :

$$(A_1) \quad \begin{cases} Tf_i^{(n+1)} = \sum_{j \leq i} K_{ij}f_j^{(n+1)} + \sum_{j > i} K_{ij}f_j^{(n)} + S_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(n+1)} \in D(T), f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T). \end{cases}$$

Remarquons que les quatre équations intégrodifférentielles de (A_1) se résolvent dans la pratique de manière quasi-identique à celles de l'algorithme de Jacobi.

On définit enfin, et toujours par analogie avec les systèmes linéaires en dimension finie, l'algorithme de relaxation S.O.R. par :

$$(A_\omega) \quad \begin{cases} (T - K_{ii})f_i^{(n+1)} = (1 - \omega)(T - K_{ii})f_i^{(n)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}f_j^{(n+1)} + \omega \sum_{j=i+1}^4 K_{ij}f_j^{(n)} + \omega S_i \\ f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(n+1)} \in D(T), i \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

Il est clair que, comme en dimension finie, on a $f_i^{(n+1)} = \omega \hat{f}_i^{(n+1)} + (1 - \omega)f_i^{(n)}$ où $\hat{f}_i^{(n+1)}$ est l'itéré de Gauss-Seidel obtenu à partir de $\{f_j^{(n)}, j > i \text{ et } f_j^{(n+1)}, j < i\}$.

Ceci nous permet une mise en œuvre informatique aussi simple que celle de l'algorithme de Gauss-Seidel.

2. COMPARAISON DE LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES ALGORITHMES (A_s), (A_J) ET (A_1)

Dans cette partie nous allons démontrer la convergence des algorithmes (A_s), (A_J) et (A_1) et comparer de manière spectrale leur rapidité de convergence. Auparavant notons $\Theta_{ij} = T^{-1}K_{ij}$ pour $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ et posons $\Theta_d = \sum_{i=1}^4 \Theta_{ii}$ et $\Theta_e = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^4 \Theta_{ij}$.

On peut alors réécrire (A_J) sous la forme :

$$(A_J) \quad \begin{cases} (I - \Theta_{ii})f_i^{(n+1)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^4 \Theta_{ij}f_j^{(n)} + \tilde{S}_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(n+1)} \in D(T), \tilde{S}_i = T^{-1}S_i. \end{cases}$$

En utilisant les propriétés (1.2) on déduit :

$$\begin{cases} \Theta_{ij}(f) = \Theta_{ij}(f \cdot \mathbf{1}_{Q_j}) \mathbf{1}_{Q_i} \\ \Theta = \sum_{i,j} \Theta_{ij} \\ \Theta_{ij}(f_k) = 0 \text{ pour } j \neq k. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ceci permet d'obtenir :

$$(A_J) \quad \begin{cases} (I - \Theta_d)f_i^{(n+1)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^4 \Theta_{ij}f_j^{(n)} + \tilde{S}_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(n+1)} \in D(T). \end{cases}$$

D'après les résultats obtenus dans [8, 11], l'opérateur Θ est compact et positif dans $L^p(Q)$ ($1 < p < +\infty$). De plus $0 \leq \Theta_d \leq \Theta$ et $0 \leq \Theta_e \leq \Theta$, on en déduit que Θ_d et Θ_e sont des opérateurs positifs compacts et, d'après la théorie de comparaison des opérateurs positifs [10], que $r_\sigma(\Theta_d) \leq r_\sigma(\Theta)$. Or, d'après (H3) on sait que $r_\sigma(\Theta) < 1$, ainsi $(I - \Theta_d)$ est inversible et l'algorithme (A_J) est bien défini.

Proposition 2.1. *L'opérateur de l'itération de Jacobi est $J = (I - \Theta_d)^{-1}\Theta_e$.*

Preuve. Posons $\varepsilon^{(n)} = f - \sum_{i=1}^4 f_i^{(n)}$ et $\varepsilon_i^{(n)} = f_i - f_i^{(n)}$ où $f = \sum_{i=1}^4 f_i$ désigne la solution du problème (P) . Il est clair qu'on peut écrire (P) sous la forme :

$$\begin{cases} (I - \Theta_d)f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \Theta_{ij}f_j + \tilde{S}_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ \tilde{S}_i = T^{-1}S_i. \end{cases} \quad (2.2)$$

D'où par différence entre (A_J) et (2.2) on obtient :

$$(I - \Theta_d)\varepsilon_i^{(n+1)} = \sum_{j \neq i} \Theta_{ij}\varepsilon_j^{(n)} = \left(\sum_{j \neq i} \Theta_{ij} \right) \varepsilon^{(n)} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\}.$$

En sommant les égalités obtenues on obtient le résultat annoncé.

L'algorithme (A_1) peut quant à lui s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} f_i^{(n+1)} = \sum_{j \leq i} \Theta_{ij}f_j^{(n+1)} + \sum_{j > i} \Theta_{ij}f_j^{(n)} + \tilde{S}_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(n+1)} \in D(T), f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T). \end{cases}$$

Et en utilisant (2.1), on peut le réécrire sous la forme :

$$(A_1) \quad \begin{cases} (I - \Theta_d)f_i^{(n+1)} = \sum_{j < i} \Theta_{ij}f_j^{(n+1)} + \sum_{j > i} \Theta_{ij}f_j^{(n)} + \tilde{S}_i & \text{pour } i \in \{1, \dots, 4\} \\ f_i^{(n+1)} \in D(T), f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T). \end{cases}$$

De $r_\sigma(\Theta_d) \leq r_\sigma(\Theta) < 1$, on peut alors affirmer que le problème (A_1) est bien défini.

Proposition 2.2. *L'opérateur de l'itération de Gauss-Seidel est donné par :*

$$L_1 = (I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sp} \quad \text{où } \Theta_m = \sum_{\substack{i,j \\ j \leq i}} \Theta_{ij} \text{ et } \Theta_{sp} = \sum_{\substack{i,j \\ j > i}} \Theta_{ij}.$$

Preuve. Posons $\gamma^{(n)} = f - \sum_{i=1}^4 f_i^{(n)}$ et $\gamma_i^{(n)} = f_i - f_i^{(n)}$. Par différence entre (A₁) et (2.4) on a $\gamma_i^{(n+1)} = \sum_{j \leq i} \Theta_{ij} \gamma_j^{(n+1)} + \sum_{j > i} \Theta_{ij} \gamma_j^{(n)}$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$. Compte tenu de (2.1) on obtient alors le système :

$$\begin{cases} (I - \Theta_d)\gamma_1^{(n+1)} = \Theta_{12}\gamma_2^{(n)} + \Theta_{13}\gamma_3^{(n)} + \Theta_{14}\gamma_4^{(n)} \\ (I - \Theta_d)\gamma_2^{(n+1)} = \Theta_{21}\gamma_1^{(n+1)} + \Theta_{23}\gamma_3^{(n)} + \Theta_{24}\gamma_4^{(n)} \\ (I - \Theta_d)\gamma_3^{(n+1)} = \Theta_{31}\gamma_1^{(n+1)} + \Theta_{32}\gamma_2^{(n+1)} + \Theta_{34}\gamma_4^{(n)} \\ (I - \Theta_d)\gamma_4^{(n+1)} = \Theta_{41}\gamma_1^{(n+1)} + \Theta_{42}\gamma_2^{(n+1)} + \Theta_{43}\gamma_3^{(n+1)}. \end{cases}$$

En sommant toutes les équations du système et en utilisant à nouveau (2.1), il vient que : $(I - \Theta_m)\gamma^{(n+1)} = \Theta_{sp}\gamma^{(n)}$.

Il est clair que $0 \leq \Theta_m \leq \Theta$ et $0 \leq \Theta_{sp} \leq \Theta$. Or Θ est un opérateur positif et compact de $L^p(Q)$, ($1 < p < +\infty$), alors Θ_m et Θ_{sp} sont des opérateurs positifs et compacts. On a alors $r_\sigma(\Theta_m) \leq r_\sigma(\Theta)$. L'hypothèse (H3) permet alors de conclure que $(I - \Theta_m)$ est inversible (et à inverse positif et borné). On peut alors en déduire que :

$$\gamma^{(n+1)} = L_1\gamma^{(n)} \quad \text{avec} \quad L_1 = (I - \sum_{\substack{i,j \\ j \leq i}} \Theta_{ij})^{-1} \sum_{\substack{i,j \\ j > i}} \Theta_{ij} = (I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sp}.$$

Maintenant que les opérateurs des différentes itérations sont déterminés, on montre le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Si on suppose (H1), (H2) et (H3) satisfaites alors les rayons spectraux des opérateurs des itérations de l'algorithme de standard, de Jacobi et de Gauss-Seidel vérifient l'inégalité :*

$$r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(J) \leq r_\sigma(\Theta) < 1.$$

Preuve. La démonstration de l'inégalité $r_\sigma(J) \leq r_\sigma(\Theta)$ est rigoureusement identique à celle menée dans le cas 1D [4]. Démontrons donc que $r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(J)$. Nous avons vu dans la preuve de la proposition 2.2 que Θ_{sp} est un opérateur positif compact et que $(I - \Theta_m)^{-1}$ est borné et positif. Or $L_1 = (I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sp}$, ainsi nous obtenons le fait que L_1 est un opérateur positif compact. Si $r_\sigma(L_1) = 0$ alors la relation cherchée est vraie. Sinon $r_\sigma(L_1)$ est une valeur propre de L_1 associé à un vecteur propre non négatif g . On a alors

$$(I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sp}g = r_\sigma(L_1)g.$$

D'où

$$\Theta_{sp}g = r_\sigma(L_1)g - r_\sigma(L_1)\Theta_m g.$$

Soit encore

$$(\Theta_{sp} + r_\sigma(L_1)\Theta_m)g = r_\sigma(L_1)g.$$

Ainsi

$$r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(\Theta_{sp} + r_\sigma(L_1)\Theta_m).$$

Or

$$0 \leq \Theta_{sp} + r_\sigma(L_1)\Theta_m \leq \max(1, r_\sigma(L_1))\Theta.$$

Alors

$$r_\sigma(L_1) \leq \max(1, r_\sigma(L_1))r_\sigma(\Theta).$$

La supposition $r_\sigma(L_1) \geq 1$ conduit à la contradiction de l'hypothèse (H3) donc $r_\sigma(L_1) < 1$. On peut déjà en déduire que $r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(\Theta) < 1$. Notons

$$\Theta_{sm} = \Theta_m - \Theta_d = \sum_{\substack{i,j \\ j < i}} \Theta_{ij}.$$

Nous avons alors avec cette notation :

$$(I - \Theta_{sm} - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sp} g = r_\sigma(L_1) g.$$

Donc

$$\Theta_{sp} g = r_\sigma(L_1) (I - \Theta_d) g - r_\sigma(L_1) \Theta_{sm} g.$$

Soit encore

$$\Theta_e g = r_\sigma(L_1) (I - \Theta_d) g + (1 - r_\sigma(L_1)) \Theta_{sm} g.$$

D'où

$$(I - \Theta_d)^{-1} \Theta_e g = r_\sigma(L_1) g + (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm} g.$$

Ainsi

$$(J - (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm}) g = r_\sigma(L_1) g.$$

On en déduit que

$$r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(J - (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm}). \quad (2.3)$$

D'autre part,

$$J - (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm} = (I - \Theta_d)^{-1} [\Theta_e - (1 - r_\sigma(L_1)) \Theta_{sm}] = (I - \Theta_d)^{-1} [\Theta_{sp} + r_\sigma(L_1) \Theta_{sm}] \geq 0.$$

Cette inégalité et le fait que $r_\sigma(L_1) < 1$, conduisent à :

$$0 \leq J - (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm} \leq J.$$

En combinant le résultat précédent avec (2.3) on a :

$$r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(J - (1 - r_\sigma(L_1)) (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_{sm}) \leq r_\sigma(J).$$

Remarque 2.1. Le théorème 2.1 prouve donc que dans le cas bidimensionnel, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes, et qu'elles convergent au moins aussi vite que la méthode standard. On verra lors des essais numériques que cette convergence est même nettement plus rapide.

Nous allons nous intéresser maintenant à une comparaison de la convergence des algorithmes (A_s) , (A_J) et (A_1) par une approche de monotonie. Ce résultat nous conduira à choisir une discrétisation adaptée à la monotonie des opérateurs mis en jeu.

Proposition 2.3. *Si les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites alors*

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \nu \in C \quad J^{(n)}(\nu) \leq \Theta^{(n)}(\nu) \quad \text{où } C = \{\nu \geq 0, \Theta \nu \leq \nu\},$
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \nu \in C_1 \quad L_1^{(n)}(\nu) \leq J^{(n)}(\nu) \quad \text{où } C_1 = \{\nu \geq 0, J \nu \leq \nu\}.$

Preuve.

(i) Remarquons que $\Theta(\nu) = J(\nu) + (I - \Theta_d)^{-1}\Theta_d(\nu - \Theta(\nu))$. Or l'opérateur $(I - \Theta_d)^{-1}\Theta_d$ est positif alors la propriété proposée est vraie au rang un, pour tout $\nu \in C$. Supposons désormais que $\forall \nu \in C, J^n(\nu) \leq \Theta^n(\nu)$, pour une valeur de n fixée. Donc $\forall \nu \in C$,

$$J(J^{n+1}(\nu)) \leq J^n(\nu) \leq J(\Theta^n(\nu)).$$

Or trivialement on a $\forall \nu \in C, \Theta^n(\nu) \in C$, ce qui combiné au fait que la propriété est vraie au rang un, permet alors d'obtenir que $\forall \nu \in C, J^{n+1}(\nu) \leq \Theta^{n+1}(\nu)$.

(ii) Posons pour tout $\nu \in C_1, w = J(\nu)$ donc $(I - \Theta_d)w = \Theta_e\nu$. Soit aussi

$$(I - \Theta_m)w = \Theta_e\nu - \Theta_{sm}w.$$

D'où

$$(I - \Theta_m)w = \Theta_{sp}\nu + \Theta_{sm}(\nu - w).$$

Finalement on peut déduire que

$$J(\nu) = L_1(\nu) + (I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sm}(\nu - J(\nu)).$$

Or $\forall \nu \in C_1, J(\nu) \leq \nu$ donc $\nu - J(\nu) \geq 0$ et compte tenu de la positivité de l'opérateur $(I - \Theta_m)^{-1}\Theta_{sm}$, il est donc clair que :

$$\forall \nu \in C_1, L_1(\nu) \leq J(\nu).$$

Supposons désormais que $\forall \nu \in C_1, L_1^{(n)}(\nu) \leq J^{(n)}(\nu)$, donc

$$\forall \nu \in C_1, L_1^{(n+1)}(\nu) = L_1(L_1^{(n)}(\nu)) \leq L(J^{(n)}(\nu)) \leq J(J^{(n)}(\nu)) = J^{(n+1)}(\nu)$$

car $J^{(n)}(\nu) \in C_1$. Ainsi on a prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \nu \in C_1, L_1^{(n)}(\nu) \leq J^{(n)}(\nu)$.

Grâce à ce résultat nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3) et en initialisant les différents algorithmes par une même sous-solution $f^{(0)}$ alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \gamma^{(n)} \leq \varepsilon^{(n)} \leq e^{(n)}$$

où $\gamma^{(n)}, \varepsilon^{(n)}$ et $e^{(n)}$ sont respectivement les erreurs à l'itération n des algorithmes $(A_1), (A_J)$ et (A_s) .

Preuve. Il est clair que l'initialisation proposée conduit à

$$\gamma^{(0)} = \varepsilon^{(0)} = e^{(0)} = f - f^{(0)}.$$

De même que dans la proposition 2.3 on montre que $e^{(0)} \in C \subset C_1$. Ainsi en utilisant la proposition 2.3 il vient que $0 \leq \gamma^{(n)} \leq \varepsilon^{(n)} \leq e^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. ÉTUDE DE L'ALGORITHME DE RELAXATION S.O.R.

Proposition 3.1. *L'opérateur de l'itération de relaxation est $L_\omega = (I - \omega J_m)^{-1}((1 - \omega)I + \omega J_p)$ où $J_m = (I - \Theta_d)^{-1}\Theta_{sm}$ et $J_p = (I - \Theta_d)^{-1}\Theta_{sp}$.*

Preuve. L'algorithme (A_ω) peut s'écrire sous la forme :

$$(A_\omega) \quad \begin{cases} (I - \Theta_d)f_i^{(n+1)} = (1 - \omega)(I - \Theta_d)f_i^{(n)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} \Theta_{ij}f_j^{(n+1)} + \omega \sum_{j=i+1}^4 \Theta_{ij}f_j^{(n)} + \omega \tilde{S}_i \\ f_i^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(n+1)} \in D(T), i \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

En sommant sur l'indice i on obtient :

$$(I - \Theta_d)f^{(n+1)} = (1 - \omega)(I - \Theta_d)f^{(n)} + \omega\Theta_{sm}f^{(n+1)} + \omega\Theta_{sp}f^{(n)} + \omega\tilde{S}.$$

D'où en multipliant par $(I - \Theta_d)^{-1}$ on obtient :

$$(I - \omega J_m)f^{(n+1)} = ((1 - \omega)I + \omega J_p)f^{(n)} + \omega(I - \Theta_d)^{-1}\tilde{S}.$$

Or J_m est une matrice d'opérateurs strictement inférieure, alors $(I - \omega J_m)$ est inversible. D'où le résultat.

Théorème 3.1. *L'algorithme de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 1]$.*

Preuve. Il est aisé de démontrer que $(I - \omega J_m)^{-1}$ est de la forme $(I + \omega J_m + \omega \Lambda)$ où Λ est un opérateur compact. On en déduit alors que le spectre de L_ω est le translaté de celui d'un opérateur compact (*i.e.* $L_\omega = \alpha I + \beta B$ où B est compact) et donc qu'il n'est constitué que de valeurs propres. A partir de là et pour $\omega \in]0, 1]$, l'opérateur L_ω est positif et donc il existe une fonction propre g non négative telle que $r_\sigma(L_\omega)(g - \omega J_m g) = (1 - \omega)g + \omega J_p g$. Soit encore $(\frac{r_\sigma(L_\omega) + \omega - 1}{\omega})g = (r_\sigma(L_\omega)J_m + J_p)g$. On en déduit que $\frac{r_\sigma(L_\omega) + \omega - 1}{\omega} \leq r_\sigma(r_\sigma(L_\omega)J_m + J_p) \leq \max(1, r_\sigma(L_\omega))r_\sigma(J)$. L'hypothèse que $r_\sigma(L_\omega) \geq 1$ conduirait, en utilisant le fait que $r_\sigma(J) < 1$, à l'inégalité $r_\sigma(L_\omega) < 1$, ce qui est absurde.

Remarque 3.1. En appliquant la même démarche que dans la preuve du théorème 2.1 on peut montrer que $r_\sigma(L_1) \leq r_\sigma(L_\omega) < 1$ pour tout $\omega \in]0, 1]$. Ceci prouve que l'algorithme de Gauss-Seidel est le plus rapide quand ω décrit l'intervalle $]0, 1]$. Pour les autres valeurs de ω , on perd le caractère positif de L_ω et l'étude spectrale par comparaison d'opérateurs positifs ne peut plus se faire. D'autre part, l'étude menée dans le cas 1D dans [4] était possible grâce au caractère tridiagonal par bloc de l'opérateur W de l'équation (1.3), ce qui n'est plus le cas en géométrie 2D plane. Nous avons estimé néanmoins intéressant de simuler numériquement cet algorithme pour $\omega \in]1, 2]$, en commençant tout d'abord par rechercher l'existence éventuelle d'un paramètre optimal de relaxation. Les résultats numériques obtenus nous confortent dans l'idée que des résultats théoriques de convergence et d'existence de paramètre optimal de relaxation peuvent être obtenus ultérieurement.

4. DISCRÉTISATION ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour chacun des nouveaux schémas proposés, on a en fait à résoudre un problème de la forme :

$$\begin{cases} (T - K_{ll})f_l = g \text{ dans } Q, \text{ où } g \text{ est donné} \\ f_l \in D(T). \end{cases}$$

On se contentera donc d'exposer la discrétisation du problème obtenu pour $l = 1$. Compte tenu du support de f_1 , il suffit de résoudre le problème dans Q_1 . Le problème étudié s'écrit alors pour le noyau proposé sous la forme :

$$\mu \frac{\partial f_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial f_1}{\partial y} + \sigma f_1 = C(x, y) \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_l(\mu, \eta) \left(\int_{B_1} \alpha_l(\mu', \eta') f_1(x, y, \mu', \eta') d\mu' d\eta' \right) + g. \quad (4.1)$$

On considère une triangulation du rectangle D (respectivement du quart de disque B_1) sous la forme :

$$\bar{D} = \cup_{i,j} ([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) = \cup_{i,j} \bar{D}_{i,j} \quad (\text{respectivement } \bar{B}_1 = \cup_k \bar{T}_k).$$

On note $P_h(k, l)$ l'ensemble des fonctions $f_h(x, y, \mu, \eta)$ définies sur Q dont la restriction à $D_{i,j} \times T_k$ soit un polynôme de degré inférieur ou égal à k par rapport aux variables d'espace x et y et de degré inférieur ou égal à l par rapport aux variables de direction μ et η . On considère alors comme espace d'approximation l'espace V_h des fonctions $f_h \in P_h(1, 0)$ vérifiant $f_h = 0$ sur Γ_- , et assurant la continuité des moyennes sur les "arêtes" du maillage du rectangle D .

Soit π_h l'opérateur de projection de $D(T)$ dans $P_h(0, 0)$ défini par :

$$\pi_h(f)|_{D_{i,j} \times T_k} = \frac{1}{|D_{i,j}| |T_k|} \int_{D_{i,j} \times T_k} f dx dy d\mu d\eta.$$

En tenant compte de l'hypothèse (H4), on définit l'opérateur A_h sur $D(T)$ par :

$$A_h(f) = \pi_h \left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \pi_h(\sigma) \pi_h(f) - \pi_h(C) \sum_{l=1}^{N_k} \pi_h(\alpha_l) \left(\int_{B_1} \pi_h(\alpha_l(\mu', \eta')) \pi_h(f_1(x, y, \mu', \eta')) d\mu' d\eta' \right).$$

On considère ensuite le problème discret :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } f_h \in V_h \text{ tel que} \\ A_h(f_h) = \pi_h(g). \end{cases}$$

Sur $D_{i,j} \times T_k$ les degrés de liberté imposés sont définis par :

$$m_{i,j,k} = \frac{1}{|D_{i,j}| \times |T_k|} \int_{D_{i,j} \times T_k} f_h(x, y, \mu, \eta) dx dy d\mu d\eta, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_{i,j,k}^X = \frac{1}{h_x |T_k|} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{T_k} f_h(x, y_j, \mu, \eta) dx d\mu d\eta, \quad (4.3)$$

$$\Gamma_{i,j,k}^Y = \frac{1}{h_y |T_k|} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{T_k} f_h(x_i, y, \mu, \eta) dy d\mu d\eta, \quad (4.4)$$

où h_x (respectivement h_y) désigne le pas en x (respectivement le pas en y) supposé constant.

Remarquons que pour tout $f_h \in V_h$ les conditions de continuité imposées conduisent aux égalités suivantes :

$$m_{i,j,k} = \frac{1}{2} (\Gamma_{i,j+1,k}^X + \Gamma_{i,j,k}^X) = \frac{1}{2} (\Gamma_{i+1,j,k}^Y + \Gamma_{i,j,k}^Y). \quad (4.5)$$

En utilisant (4.1) à (4.5), le problème (P_h) s'écrit alors sous la forme :

$$\left(\frac{2\mu_k}{h_x} + \frac{2\eta_k}{h_y} + \sigma_{i,j} \right) m_{i,j,k} = \frac{2\mu_k}{h_x} \Gamma_{i,j,k}^Y + \frac{2\eta_k}{h_y} \Gamma_{i,j,k}^X + C_{i,j,k} \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_{l,k} \Phi_{i,j}^l + g_{i,j,k} \quad (4.6)$$

Comparaison des temps de convergence en fonction de c ($\sigma = 50$)

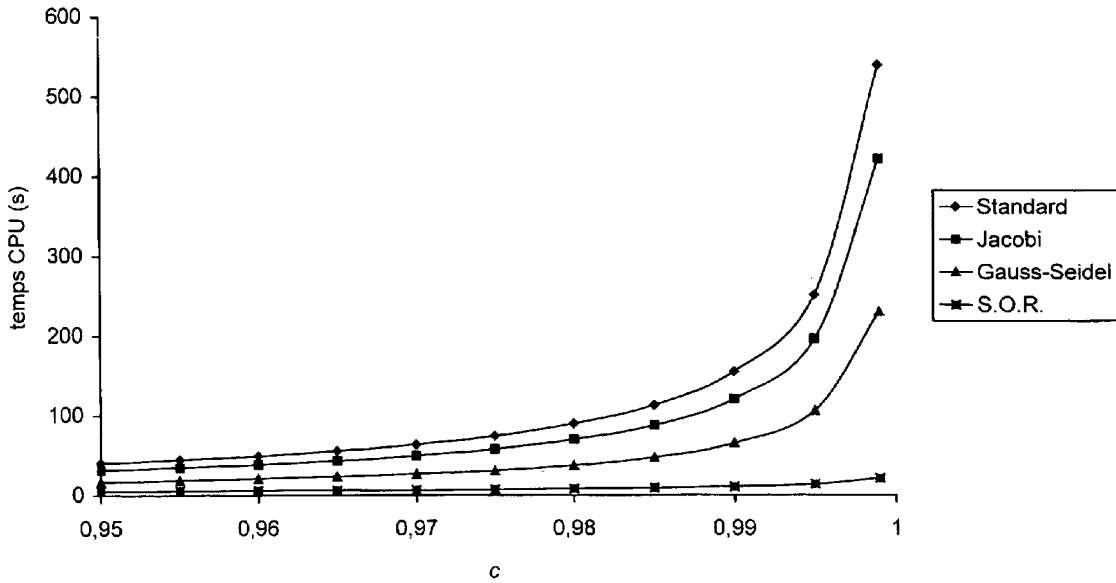


FIGURE 1.

pour tout i, j et k tel que $T_k \in B_1$, avec $\mu_k, \eta_k, \sigma_{i,j}, C_{i,j,k}, g_{i,j,k}$ connus et $\Phi_{i,j}^l = \sum_{k' / T_{k'} \in B_1} \alpha_{l,k'} m_{i,j,k'}$.

En multipliant cette dernière relation par $\left(\frac{2\mu_k}{h_x} + \frac{2\eta_k}{h_y} + \sigma_{i,j}\right)^{-1} \alpha_{l,k}$ et en sommant sur k , on obtient un petit système linéaire de N_k équations pour la détermination des inconnues $\Phi_{i,j}^l$. Une fois ces inconnues déterminées, on utilise la relation (4.6) pour déterminer les $m_{i,j,k}$ puis grâce à (4.5) on calcule les $\Gamma_{i,j+1,k}^X$ et les $\Gamma_{i+1,j,k}^Y$.

Pour l'application numérique, on considère : $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et $h_x = h_y = \frac{1}{100}$. La triangulation de chaque quart de disque compte 25 mailles. On se place dans le cas où le noyau de collision est constant défini par $k(\Omega, \Omega') = \frac{\sigma c}{\pi}$.

La solution exacte du problème traité étant donnée par :

$$f(x, y, \mu, \eta) = \begin{cases} xy \text{ sur } Q_1 \\ (1-x)y \text{ sur } Q_2 \\ (1-x)(1-y) \text{ sur } Q_3 \\ x(1-y) \text{ sur } Q_4. \end{cases}$$

Le test d'arrêt utilisé est $\frac{\|Kf^{(n)} - Kf\|_2}{\|Kf\|_2} < 10^{-6}$.

Sur les figures 1 et 2, on a représenté les temps de calcul nécessaires à la convergence des différents algorithmes en fonction de c et de σ supposé constant. Comme dans le cas monodimensionnel [4], on constate que l'algorithme le plus lent est l'algorithme standard, suivi par celui de Jacobi, puis par celui de Gauss-Seidel et enfin par la relaxation S.O.R. avec paramètre optimal (déterminé numériquement). L'algorithme de Jacobi converge plus rapidement que le standard, mais l'accélération obtenue est néanmoins plus faible que pour Gauss-Seidel. On retrouve la même dépendance par rapport aux différents paramètres qu'en dimension un. L'algorithme de

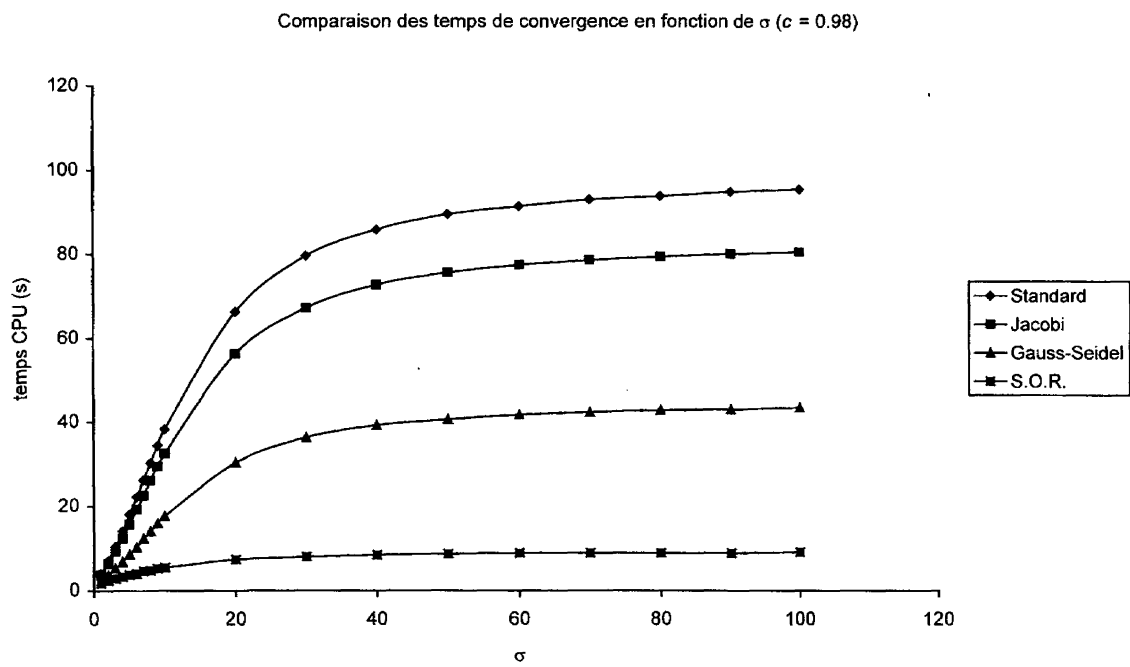


FIGURE 2.

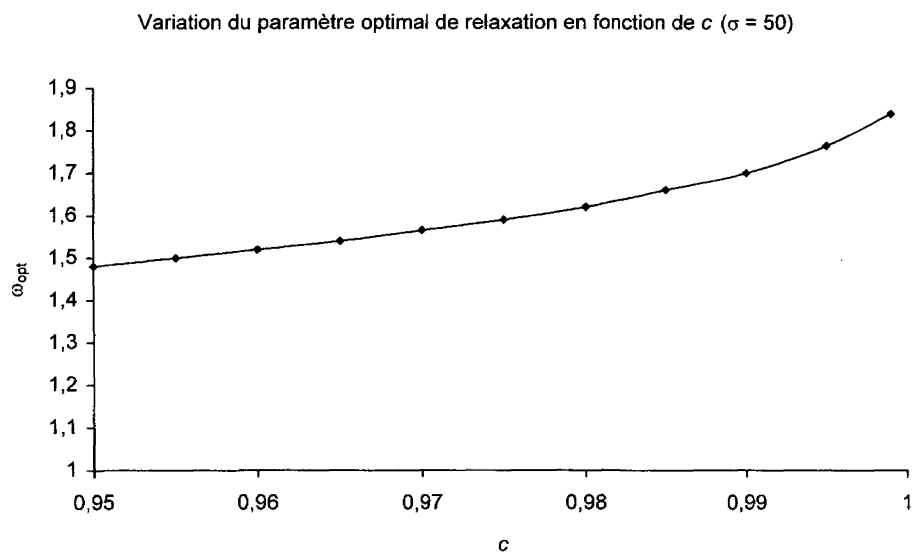


FIGURE 3.

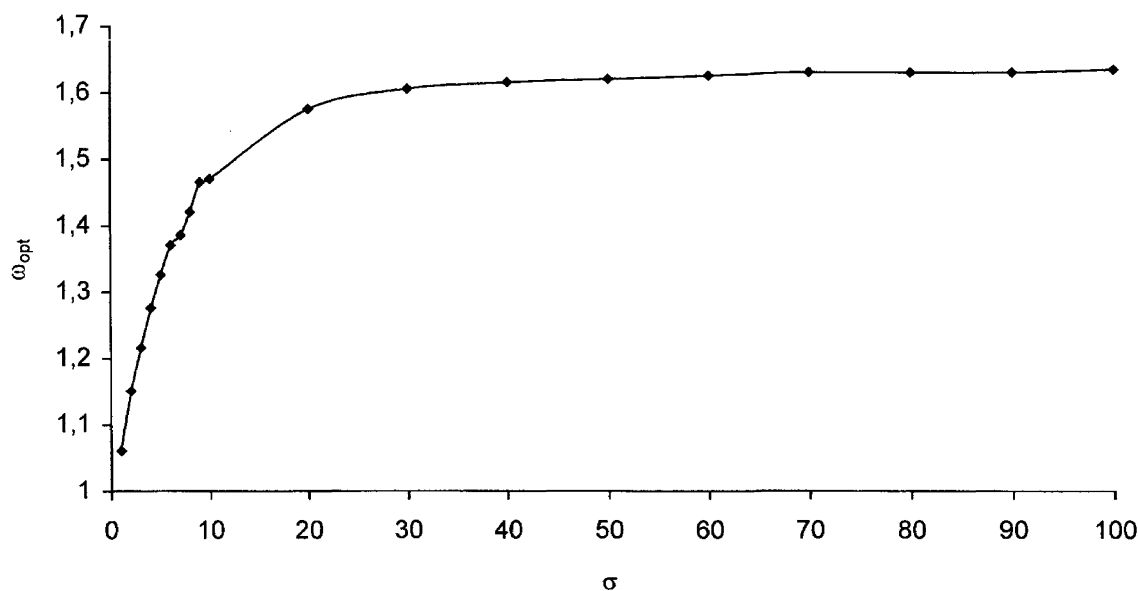
Variation du paramètre optimal de relaxation en fonction de σ ($c = 0.98$)

FIGURE 4.

relaxation S.O.R. est de loin le plus rapide, mais il présente dans le cas bidimensionnel l'inconvénient majeur de devoir au préalable rechercher une estimation numérique, pouvant s'avérer relativement coûteuse, de l'éventuel paramètre optimal de relaxation. Sur les figures 3 et 4, on a donné les estimations numériques du paramètre "optimal" de la relaxation S.O.R. en fonction de c et σ . Ce sont ces données que l'on a utilisées pour les essais relatifs à la détermination du temps de calcul associé à la convergence de la méthode de relaxation. Il est donc clair que dans le cas bidimensionnel, les algorithmes de décomposition restent une assez bonne réponse au problème de l'accélération de la convergence, même si cette accélération est moins importante que pour le cas monodimensionnel. D'autres algorithmes, toujours par analogie avec les systèmes linéaires en dimension finie, sont en cours d'étude et feront l'objet d'une communication très prochaine.

RÉFÉRENCES

- [1] S. Akesbi, *Accélération de la convergence par diffusion synthétique pour l'équation de transport*. Thèse de l'université de Franche-Comté, n° 129 (1989).
- [2] S. Akesbi, M.R. Laydi et M. Mokhtar-Kharroubi, Décomposition d'opérateurs et accélération de la convergence en neutronique. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **319** (1994) 765-770.
- [3] S. Akesbi, M. Nicolet, Accélération de la convergence par relaxation en théorie du transport. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **321** (1995) 637-640.
- [4] S. Akesbi et M. Nicolet, Nouveaux algorithmes performants en théorie du transport. *ESAIM: M2AN* **32** (1998) 341-358.
- [5] S. Akesbi et M. Nicolet, Nouveaux algorithmes pour l'équation de transport en géométrie bidimensionnelle plane. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **324** (1997) 699-706.
- [6] R.E. Alcoofe, Diffusion synthetic acceleration method for the diamond-differenced discrete-ordinates equations. *Nucl. Sci. and Eng.* **64** (1977) 344-345.
- [7] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson (1982).
- [8] R. Kress, *Linear integral equations*. Springer-Verlag (1989).
- [9] E.W. Larsen, Unconditionally stable diffusion-synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations, Part I, Part II. *Nucl. Sci. and Eng.* **82** (1982) 47-63.

