

JEAN-LOUIS MERRIEN

**Interpolants d'Hermite  $C^2$  obtenus par subdivision**

*ESAIM: Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 33, n° 1 (1999), p. 55-65

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1999\\_\\_33\\_1\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1999__33_1_55_0)

© SMAI, EDP Sciences, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « ESAIM: Modélisation mathématique et analyse numérique » (<http://www.esaim-m2an.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INTERPOLANTS D'HERMITE $C^2$ OBTENUS PAR SUBDIVISION

JEAN-LOUIS MERRIEN<sup>1</sup>

**Abstract.** We propose a two point subdivision scheme with parameters to draw curves that satisfy Hermite conditions at both ends of  $[a, b]$ . We build three functions  $f, p$  and  $s$  on dyadic numbers and, using infinite products of matrices, we prove that, under assumptions on the parameters, these functions can be extended by continuity on  $[a, b]$ , with  $f' = p$  and  $f'' = s$ .

**Résumé.** Nous proposons un schéma de subdivision dépendant de paramètres pour construire des courbes satisfaisant à des conditions d'Hermite aux extrémités d'un intervalle  $[a, b]$ . Trois fonctions,  $f, p$  et  $s$  sont définies sur les nombres dyadiques :  $a + (b - a)\frac{k}{2^n}$ . Puis, à l'aide de produits infinis de matrices et sous des conditions sur les paramètres, nous montrons que ces fonctions peuvent être prolongées par continuité à l'intervalle  $[a, b]$  avec de plus,  $f' = p$  et  $f'' = s$ .

**AMS Subject Classification.** 41A05, 63D05.

Reçu : 18 Novembre 1997.

### 1. INTRODUCTION

Les techniques de subdivision sont des outils efficaces pour construire des courbes et des surfaces par ordinateur. La plupart des méthodes importantes de tracé de courbes peuvent être considérées comme des processus de subdivision (voir Boehm *et al.* [2]). Elles sont généralement basées sur des découpages des coins des polygones ou polyèdres de contrôle et ne sont pas interpolantes...

Dans cet article, nous étudions le problème d'interpolation d'Hermite suivant : construire une fonction  $f \in C^2[a, b]$  interpolant les 6 données suivantes aux extrémités de l'intervalle :

$$f(a) = y_a, f'(a) = y'_a, f''(a) = y''_a, f(b) = y_b, f'(b) = y'_b, f''(b) = y''_b.$$

Une solution bien connue est fournie par le polynôme d'interpolation d'Hermite de degré 5. Mais l'objet de cet article est de construire une famille de fonctions interpolantes dépendant de paramètres à laquelle appartiennent, entre autres, le polynôme d'Hermite et quelques fonctions polynômiales par morceaux. La technique utilisée est celle de la subdivision dyadique, dite de base 2.

Pour des données de Lagrange, elle a été introduite par Deslauriers et Dubuc [4, 5] puis peu après par Dyn *et al.* [6]. Micchelli [10] donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de ces schémas. Pour des données d'Hermite formées des fonctions et des dérivées premières aux bords, elles ont été proposées par Merrien [9]. De nouvelles conditions de convergence sont proposées par Dyn et Levin [7], mais elles sont difficilement généralisables au cas  $C^2$ .

---

<sup>1</sup> INSA de Rennes, 20 avenue des Buttes de Coesmes, CS 14315, 35043 Rennes Cedex, France.  
e-mail: Jean-Louis.Merrien@insa-rennes.fr

Dans la section 2, on définit l'algorithme, dit  $HC^2$ , sur  $[a, b] = [0, 1]$ , dépendant de 8 paramètres, permettant la construction de 3 fonctions  $f, p$  et  $s$  sur l'ensemble dyadique  $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$  où  $D_n = \left\{ \frac{i}{2^n}, i = 0 \dots 2^n \right\}$ , dense dans  $[0, 1]$ . Puis on donne des conditions nécessaires sur les paramètres pour que l'interpolant  $f$ , obtenu par prolongement par continuité soit de classe  $C^2$  et vérifie  $f' = p$  et  $f'' = s$ .

Dans la section 3, on démontre 2 lemmes donnant des conditions suffisantes pour le prolongement par continuité d'une fonction définie sur  $D$  à l'intervalle  $[0, 1]$  en une fonction continue ou continûment dérivable. Cette section fait apparaître des quantités étudiées dans la section 4 consacrée aux conditions nécessaires et/ou suffisantes de convergence de l'algorithme  $HC^2$  en fonction des paramètres. Les démonstrations sont basées sur la convergence de produits infinis de matrices utilisant les résultats de Daubechies et Lagarias [3].

Enfin, dans la section 5, on donne plusieurs exemples illustrant les résultats précédents et une étude du domaine de convergence.

## 2. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME $HC^2$

Sur l'intervalle  $[a, b]$ , on se fixe les 6 données aux extrémités,  $y_a, y'_a, y''_a, y_b, y'_b, y''_b$ . Si on interpole ces données par le polynôme d'Hermite de degré 5, noté  $q$ , on trouve pour les valeurs au milieu  $m = \frac{a+b}{2}$  de l'intervalle :

$$\begin{aligned} q(m) &= \frac{1}{2}(q(b) + q(a)) - \frac{5}{32}h(q'(b) - q'(a)) + \frac{1}{64}h^2(q''(b) + q''(a)) \\ q'(m) &= \frac{15}{8h}(q(b) - q(a)) - \frac{7}{16}(q'(b) + q'(a)) + \frac{1}{32}h(q''(b) - q''(a)) \\ q''(m) &= \frac{3}{2h}(q'(b) - q'(a)) - \frac{1}{4}(q''(b) + q''(a)) \text{ où } h = b - a. \end{aligned}$$

En réinterpolant ces nouvelles données sur  $[a, m]$  et  $[m, b]$  par le polynôme d'Hermite, on retrouvera des formules analogues. Par unicité de ce polynôme, on peut ainsi construire le polynôme  $q$  sur  $D = \cup D_n$  défini précédemment. Le processus est convergent au sens que les fonctions construites sur  $D$  sont prolongeables sur  $[a, b]$  en  $q, q'$  et  $q''$  respectivement.

Pour des simplifications d'écriture, nous supposerons désormais que  $[a, b] = [0, 1]$ . Nous allons étudier les fonctions  $f, p$  et  $s$  définies sur  $D$  par l'algorithme  $HC^2$  suivant, dépendant de 8 paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  :

### Algorithme $HC^2$

*Étape 0.* sur  $D_0$ ,

$$\begin{aligned} f(0) &= y_0, f(1) = y_1, \\ p(0) &= y'_0, p(1) = y'_1, \\ s(0) &= y''_0, s(1) = y''_1. \end{aligned}$$

Étape  $n+1$ . connaissant  $f, p$  et  $s$  sur  $D_n$ , on définit ces 3 fonctions sur  $D_{n+1} \setminus D_n$  par :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \alpha_1 \left( f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + f\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) + \alpha_2 h_n \left( p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) + \alpha_3 h_n^2 \left( s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \\ p\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \frac{\beta_1}{h_n} \left( f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) + \beta_2 \left( p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) + \beta_3 h_n \left( s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \\ s\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) &= \frac{\gamma_2}{h} \left( p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) + \gamma_3 \left( s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \end{aligned}$$

pour  $i = 1 \dots 2^n - 1$ , où  $h_n = 1/2^n$ .

**Définition 1.** L'algorithme  $HC^2$  est convergent si les fonctions  $f, p, s$  définies sur  $D$  sont prolongeables par continuité sur  $[0, 1]$  avec de plus  $f' = p, f'' = s$ .

Outre les paramètres correspondant au polynôme de Hermite, nous pouvons assurer la convergence dans certains cas.

- Proposition 2.** 1. Si  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -23/144, \alpha_3 = 5/288, \beta_1 = 9/4, \beta_2 = -5/8, \beta_3 = 1/16, \gamma_2 = 3/2$  et  $\gamma_3 = -1/4$  alors l'algorithme  $HC^2$  converge vers l'interpolant  $C^2$  polynômial de degré 3 sur les intervalles  $[0, 1/3], [1/3, 2/3]$  et  $[2/3, 1]$ , (spline cubique avec 2 noeuds intérieurs).  
2. Si  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3/2$  et  $\gamma_3 = -1/4$ , l'algorithme  $HC^2$  converge vers l'interpolant  $C^3$  polynômial de degré 4 sur  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ , (spline quartique avec un nœud intérieur).

*Démonstration.* Il suffit pour ces 2 interpolants de calculer les valeurs aux milieux des segments. En réitérant, on obtient des formules analogues ; puisqu'il y a unicité de l'interpolant vérifiant les conditions imposées, on obtient la convergence comme pour le polynôme d'Hermite.  $\square$

Donnons maintenant une condition nécessaire plus générale sur la convergence qui permettra de réduire le nombre de paramètres.

**Proposition 3.** Si pour toutes les données initiales, l'algorithme  $HC^2$  est convergent alors :  $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$ .

*Démonstration.* Elle est basée sur le développement de Taylor des fonctions au voisinage de 0, sachant que  $h_n = 1/2^n$  tend vers 0.

Ainsi pour la fonction  $f$ , nous avons :

$$f(h_n/2) = \alpha_1(f(h_n) + f(0)) + \alpha_2 h_n(f'(h_n) - f'(0)) + \alpha_3 h_n^2(f''(h_n) + f''(0))$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(0) + \frac{h_n}{2} f'(0) + (1/2) \left(\frac{h_n}{2}\right)^2 f''(0) &= \alpha_1(2f(0) + h_n f'(0) + (1/2) h_n^2 f''(0)) \\ &+ \alpha_2 h_n(h_n f''(0)) + \alpha_3 h_n^2 2f''(0) + o(h_n^2), \end{aligned}$$

soit  $\alpha_1 = 1/2$  et  $-1/8 = \alpha_2 + 2\alpha_3$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Les autres égalités s'obtiennent de manière similaire.  $\square$

Nous nous placerons désormais dans ce cas, par conséquent dans la suite de l'article, l'algorithme  $HC^2$  ne dépend plus que des paramètres  $\alpha_2, \beta_1, \beta_3$  et  $\gamma_2$ .

**Remarques :**

1. Les paramètres correspondant aux trois cas particuliers étudiés précédemment vérifient naturellement les conditions de la proposition 3.
2. Il était inutile d'introduire un paramètre supplémentaire  $\gamma_1$  dans l'expression de  $s$  ; le développement de Taylor impose  $\gamma_1 = 0$ .
3. En poursuivant le développement, on obtient les conditions supplémentaires suivantes :
  - si  $f$  est de classe  $C^3$ , alors,  $3 = 4\beta_1 + 12\beta_2 + 24\beta_3$  ;
  - si  $f$  est de classe  $C^4$ , alors,  $\alpha_2 = 1/64, \alpha_3 = -5/32$ ,  
 $3 = 4\beta_1 + 12\beta_2 + 24\beta_3, \gamma_1 = 3/2$  et  $\gamma_2 = -1/4$  ;
  - si  $f$  est de classe  $C^5$ , alors  $\alpha_2 = 1/64, \alpha_3 = -5/32, \beta_1 = 15/8$ ,  
 $\beta_2 = -7/16, \beta_3 = 1/32, \gamma_1 = 3/2$  et  $\gamma_2 = -1/4$ , qui correspond au polynôme d'Hermite.
4. La réciproque de la proposition 3 est fautive. Si  $\beta_1 = \beta_3 = 0, \beta_2 = 1/2, \gamma_2 = 0$  et  $\gamma_3 = 1/2$ , alors  $p$  et  $s$  sont affines et interpolent  $y'_a, y'_b$ , respectivement  $y''_a, y''_b$  ; on a  $p' \neq s$  dès que  $y''_a \neq y''_b$ .
5. Lorsque les paramètres vérifient les conditions imposées par la proposition 3, si l'on part de données interpolables par un polynôme de degré 2, l'algorithme  $HC^2$  converge vers ce polynôme.

**3. CONDITIONS DE PROLONGEMENTS**

Une condition suffisante pour prolonger à  $[0, 1]$  une fonction  $\phi$  définie sur  $D = \cup D_n$  est la continuité uniforme sur  $D$ . C'est cette condition que nous utiliserons pour prolonger  $s$ . Une fois montrée la continuité de  $s$ , nous montrerons que  $p' = s$ , puis de même, nous pourrions prolonger  $f$  et montrer  $f' = p$ . Nous avons besoin de deux lemmes inspirés des travaux de Faber [8].

**Lemme 4.** *Soit  $\phi$  une fonction définie sur  $D$  vérifiant :*

$$\exists \kappa \in [0, 1[, \exists c_1 \in \mathbb{R}_+^* : \left| \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq c_1 \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

alors  $\phi$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$ , et

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 \kappa^n.$$

*Démonstration.* Nous démontrons d'abord la majoration pour  $x, y$  dans  $D$ , puis après avoir prolongé  $\phi$ , nous l'étendons à tout l'intervalle.

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $D$  vérifiant  $|x - y| \leq 1/2^n$ . Alors il existe  $z$  élément de  $D_n$  vérifiant :  $|x - z| \leq 1/2^n$  et  $|y - z| \leq 1/2^n$ .

Nous allons montrer que  $|\phi(x) - \phi(z)| \leq c\kappa^n$ . Une inégalité semblable avec  $y$  assurera le résultat.

Si  $x$  est dans  $D_n$ , le résultat est vrai avec  $c = c_1$ .

Sinon, soit  $r$  un entier strictement positif tel que  $x \in D_{n+r}$ . Si nous supposons  $z < x$ , nous pouvons écrire que

$$x = z + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{2^{i+n}} \text{ avec } \lambda_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Posons alors  $p_0 = z$  et  $p_j = z + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{2^{i+n}}$ , pour  $j$  variant de 1 à  $r$ . Nous avons  $p_j = p_{j-1}$ , dans le cas où

$\lambda_j = 0$  ou encore  $p_j = p_{j-1} + 1/2^{n+j}$ , d'où  $|\phi(p_j) - \phi(p_{j-1})| \leq c_1 \kappa^{n+j}$ . Maintenant, nous pouvons obtenir la

majoration :

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(z)| &= \left| \sum_{i=1}^r \phi(p_i) - \phi(p_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^r |\phi(p_i) - \phi(p_{i-1})| \\ &\leq c_1 \sum_{i=1}^r \kappa^{n+i} \leq c_1 \kappa^n \frac{\kappa}{1-\kappa} = c\kappa^n. \end{aligned}$$

où  $c = c_1 \frac{\kappa}{1-\kappa}$ . Le même raisonnement peut être fait si  $z > x$ . On obtient évidemment la même majoration pour  $|\phi(y) - \phi(z)|$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\exists c_2 \in \mathbb{R}_+^* : \forall (x, y) \in D^2, |x - y| \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 \kappa^n.$$

De cette majoration, on déduit que  $\phi$  est uniformément continue sur  $D$ , donc prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$ . Pour étendre la majoration précédente à  $[0, 1]$ , il suffit de reprendre le raisonnement en écrivant que  $x = z + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^{i+n}}$  avec  $\lambda_i = 0$  ou 1 puisque  $x$  est limite d'une suite de points de  $D$ .

Remarquons qu'en fait  $\phi$  est höldérienne :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 : |\phi(x) - \phi(y)| \leq c_2 |x - y|^{-\frac{\ln \kappa}{\ln 2}}.$$

□

Notons que l'hypothèse  $\left| \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq \varepsilon(n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ , n'est pas suffisante pour conclure à la possibilité de prolongement. On peut trouver des fonctions  $\phi$  non bornées vérifiant cette propriété.

**Lemme 5.** Soient  $\phi$  une fonction définie sur  $D$  et  $\psi$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  vérifiant :

$$\left| 2^n \left( \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) - \left( \psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon(n), 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ , alors  $\phi$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$  en une fonction de classe  $C^1$  vérifiant  $\phi' = \psi$ .

*Démonstration.* Avec la majoration de l'hypothèse, on obtient que :

$$\left| \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon(n)}{2^n} + \frac{\max |\psi(x)|}{2^n} \leq c_3 \frac{1}{2^n},$$

donc, par le lemme précédent,  $\phi$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$ .

La fonction  $\chi$  définie par  $\chi(x) = \phi(0) + \int_0^x \psi(t)dt$  est de classe  $C^1$  et vérifie  $\chi' = \psi$ . Montrons que  $\chi$  et  $\phi$  coïncident sur  $D$ .

Soit  $x \in D$  et soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $x \in D_n$  alors  $x \in D_{n+p}$ , pour tout  $p \geq 0$ , donc nous pouvons choisir  $n$  aussi grand que nous le voulons. Comme  $\psi$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ , nous pouvons supposer que  $n$  est assez grand pour que :

$$\forall t \in \left[ \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right] \left| \psi(t) - \left( \psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon/2.$$

De même, nous pouvons supposer  $n$  assez grand pour que  $\varepsilon(n) \leq \varepsilon/2$ . Alors, en posant  $x = j/2^n, 0 \leq j \leq 2^n$ ,

$$\begin{aligned} \chi(x) - \phi(x) &= \phi(0) + \int_0^x \psi(t)dt - \phi(x) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \psi(t)dt - \left( \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \int_{i/2^n}^{(i+1)/2^n} \left( \psi(t) - \left( \psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{j-1} \left\{ \left( \psi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) / 2 - 2^n \left( \phi\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{i}{2^n}\right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |\chi(x) - \phi(x)| \leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^n} \varepsilon / 2 + \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon / 2 \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon$  étant choisi arbitrairement, on obtient  $\chi = \phi$  sur  $D$ . Par continuité des deux fonctions,  $\chi = \phi$  sur  $[0, 1]$  et  $\chi' = \phi' = \psi$ .  $\square$

#### 4. REPRÉSENTATION MATRICIELLE ET CONVERGENCE

Pour  $f, p, s$  définies sur  $D$ , nous notons  $U_n^i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  :

$$U_n^i = \begin{pmatrix} s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right) \\ \frac{p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - p\left(\frac{i}{2^n}\right) - h_n \frac{s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + s\left(\frac{i}{2^n}\right)}{2}}{h_n} \\ \frac{f\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{i}{2^n}\right) - h_n \frac{p\left(\frac{i+1}{2^n}\right) + p\left(\frac{i}{2^n}\right)}{2} + h_n^2 \frac{s\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{i}{2^n}\right)}{12}}{h_n^2} \end{pmatrix}.$$

Compte tenu des lemmes 4 et 5 précédents, les 2 premières composantes apparaissent naturellement. Pour la troisième, le facteur  $h_n^2 (s(\frac{i+1}{2^n}) - s(\frac{i}{2^n})) / 12$  peut être omis, en changeant de base, mais il permet une écriture intéressante des matrices introduites ci-dessous.

**Proposition 6.** *Il existe 2 matrices  $A_1$  et  $A_{-1}$  de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  ne dépendant que des paramètres de l'algorithme HC<sup>2</sup> telles que :  $U_{n+1}^{2i} = A_1 U_n^i$  et  $U_{n+1}^{2i+1} = A_{-1} U_n^i$ .*

*Démonstration.* Avec un logiciel de calcul formel on vérifie que :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon \gamma_2 & 0 \\ \varepsilon(1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6) & 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ -(1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6)/2 & \varepsilon(1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12) & 2 - \beta_1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1.$$

On obtient alors immédiatement :

$$U_n^i = A_{\varepsilon_1} A_{\varepsilon_2} \dots A_{\varepsilon_n} U_0^0, \varepsilon_j = \pm 1.$$

Pour étudier la convergence de  $U_n^i$  vers 0, nous avons besoin d'un certain nombre de résultats de Daubechies et Lagarias [3], (noté D-L dans la suite), sur les produits infinis de matrices.  $\square$

Introduisons les notations utiles. Soit  $\| \cdot \|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous noterons  $\| \cdot \|$  la norme matricielle subordonnée sur  $\mathbb{R}^{n \times n}$  :  $\| M \| = \sup_{\|x\|=1} \| Mx \|$ .

Comme dans l'article de D-L, pour un ensemble  $\Sigma$  de matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , nous définissons :

- $\rho(M)$ , le rayon spectral d'une matrice  $M$  ;
- $\rho(\Sigma)$ , le rayon spectral généralisé,  $\rho(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\rho_k(\Sigma))^{\frac{1}{k}}$  où

$$\rho_k(\Sigma) = \sup \left\{ \rho \left( \prod_{i=1}^k M_i \right), M_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq k \right\} ;$$

- $\hat{\rho}(\Sigma)$ , le rayon spectral joint,  $\hat{\rho}(\Sigma) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|))^{\frac{1}{k}}$ , où

$$\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|) = \sup \left\{ \left\| \prod_{i=1}^k M_i \right\|, M_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq k \right\} .$$

À noter que par équivalence des normes sur  $\mathbb{R}^n$ , la notion de rayon spectral joint ne dépend pas de la norme choisie, même si  $\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|)$  en dépend.

Rappelons deux résultats de D-L :

1. On a les inégalités :

$$\rho_k(\Sigma)^{\frac{1}{k}} \leq \rho(\Sigma) \leq \hat{\rho}(\Sigma) \leq (\hat{\rho}_k(\Sigma, \| \cdot \|))^{\frac{1}{k}} .$$

2. En utilisant les théorèmes 3.1 et 4.1 de leur article,

si  $\Sigma = \{M_1, M_2, \dots, M_m\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ , les produits  $M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_p}$  tendent vers la matrice nulle lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si  $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$ .

Au cours de la démonstration de ce théorème, les auteurs montrent que si  $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$ , la convergence des produits est géométrique au sens que :

$$\exists t \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } \hat{\rho}_t(\Sigma, \| \cdot \|) < 1 \text{ et } \| M_{d_1} M_{d_2} \dots M_{d_p} \| \leq c \kappa^p, \kappa = (\hat{\rho}_t(\Sigma, \| \cdot \|))^{\frac{1}{t}} < 1 .$$

Nous pouvons maintenant donner des conditions de convergence sur nos algorithmes en choisissant  $\Sigma = \{A_1, A_{-1}\}$ .

**Proposition 7.** *Pour  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$  donnés vérifiant*

$$\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1,$$

*l'algorithme  $HC^2$  est convergent si et seulement si  $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$ .*

*Démonstration.* Supposons  $\hat{\rho}(\Sigma) < 1$  et choisissons la norme infinie :  $\| \cdot \|_{\infty}$ . Alors en utilisant la condition de convergence de D-L, nous savons qu'il existe  $\kappa \in [0, 1[$  et  $c \in \mathbb{R}_+^*$  tels que :

$$\| A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} \|_{\infty} \leq c \kappa^n, d_j = \pm 1 .$$

À partir d'un vecteur  $U = U_0^0$  de données initiales quelconques, on a donc pour tout  $n$  entier,

$$\| U_n^i \| \leq c \kappa^n \| U \|_{\infty} = c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1 .$$

On a tout d'abord la majoration :

$$\left| s \left( \frac{i+1}{2^n} \right) - s \left( \frac{i}{2^n} \right) \right| \leq c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$



si bien que par le lemme 3,  $s$  est prolongeable par continuité sur  $[0, 1]$ .  
Ensuite comme  $h_n = 1/2^n$ ,

$$\left| 2^n \left( p \left( \frac{i+1}{2^n} \right) - p \left( \frac{i}{2^n} \right) \right) - \left( s \left( \frac{i+1}{2^n} \right) + s \left( \frac{i}{2^n} \right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon(n) = c' \kappa^n, 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

donc, par le lemme 4,  $p$  est prolongeable par continuité et  $p' = s$ .

Enfin

$$\left| 2^n \left( f \left( \frac{i+1}{2^n} \right) - f \left( \frac{i}{2^n} \right) \right) - \left( p \left( \frac{i+1}{2^n} \right) + p \left( \frac{i}{2^n} \right) \right) / 2 \right| \leq \varepsilon(n), 0 \leq i \leq 2^n - 1,$$

avec  $\varepsilon(n) = c' \kappa^n 2^{-n} + 2^{-n} \sup |s| / 6$ .

Donc  $f$  est prolongeable par continuité et  $f' = p$ .

Réciproquement, supposons que l'algorithme converge ; nous allons montrer que les produits de matrices  $A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n}, d_j = \pm 1$  tendent vers 0. En utilisant des développements de Taylor et la continuité uniforme de  $s$ , il est aisé de voir que quel que soit le vecteur  $U$  de données initiales, les vecteurs  $U_n^e$  tendent vers 0 uniformément. Autrement dit  $\|U_n^i\| \leq \varepsilon(n, U)$  soit  $\|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} U\|_\infty \leq \varepsilon(n, U)$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n, U) = 0$ .

Nous partons des 3 vecteurs  $V_1, V_2, V_3$  où

$V_1 = (1, 0, 0)^T$  pour  $y_a = y'_a = 0, y''_a = -1/2, y_b = -1/6, y'_b = 0, y''_b = 1/2$ ,

$V_2 = (0, 1, 0)^T$ , pour  $y_a = 0, y'_a = -1/2, y''_a = 0, y_b = 0, y'_b = 1/2, y''_b = 0$ ,

$V_3 = (0, 0, 1)^T$  pour  $y_a = y'_a = y''_a = 0, y_b = 1, y'_b = y''_b = 0$ .

Soit  $U \in \mathbb{R}^3$  avec  $\|U\|_\infty = 1, U = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$  et  $\max |\lambda_i| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n} U\|_\infty &\leq |\lambda_1| \varepsilon(n, V_1) + |\lambda_2| \varepsilon(n, V_2) + |\lambda_3| \varepsilon(n, V_3) \\ &\leq \varepsilon(n, V_1) + \varepsilon(n, V_2) + \varepsilon(n, V_3) = \varepsilon(n) \end{aligned}$$

avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ .

D'où  $\|A_{d_1} A_{d_2} \dots A_{d_n}\|_\infty \leq \varepsilon(n)$  et donc le résultat.  $\square$

De manière pratique, compte tenu des inégalités de D-L rappelées ci-dessus, nous obtenons les conditions suivantes :

**Proposition 8.** (i) S'il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^3$  et un entier  $k$  tel que  $\hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) < 1$ , alors l'algorithme converge.

(ii) S'il existe  $k$  entier tel que  $\rho_k(\Sigma) > 1$ , alors l'algorithme diverge.

## 5. DOMAINE DE CONVERGENCE ET EXEMPLES

La détermination pratique du rayon spectral joint est difficile. Berger et Wang [1] ont montré que pour un ensemble  $\Sigma$  de matrices uniformément bornées, alors  $\rho(\Sigma) = \hat{\rho}(\Sigma)$ , ce qui est le cas ici. Rappelons aussi un de leurs résultats qui permet, dans certains cas, d'évaluer  $\hat{\rho}(\Sigma)$ .

Si les  $M_i$  sont triangulaires par blocs,  $M_i = \begin{pmatrix} M_i^1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & M_i^l \end{pmatrix}$  où les  $M_i^p$  sont des matrices carrées de même dimension lorsque  $i$  varie, alors

$$\hat{\rho}(M_1, \dots, M_m) = \max(\hat{\rho}(M_1^1, \dots, M_m^1), \dots, \hat{\rho}(M_1^l, \dots, M_m^l)). \quad (*)$$

Si le nombre de paramètres initiaux est important, la condition nécessaire de convergence de la proposition 3 entraîne que l'algorithme  $HC^2$  ne dépend plus que de 4 paramètres, par exemple :  $\alpha_2, \beta_1, \beta_3$  et  $\gamma_2$ .

**Proposition 9.** Si  $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$  et si de plus  $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$  et  $1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12 = 0$ , alors l'algorithme converge si et seulement si :  $|1 - \gamma_2/2| < 1$  et  $|2 - \beta_1| < 1$ .

*Démonstration.* Compte tenu des hypothèses, la matrice  $A_\varepsilon$  s'écrit :

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ 0 & 0 & 2 - \beta_1 \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1.$$

En utilisant (\*), il vient :

$$\hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = \max(1/2, |1 - \gamma_2/2|, |2 - \beta_1|),$$

d'où le résultat. □

**Exemple 10.** Les paramètres correspondant au polynôme d'Hermite vérifient les hypothèses.

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.15/4 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = 1/2.$$

De même pour l'interpolant de classe  $C^3$  polynômial de degré 4 sur  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ , (spline quartique à 1 nœud), pour lequel

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\rho}(A_1, A_{-1}) = 1/2.$$

Nous ajoutons maintenant seulement l'hypothèse :  $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$  et définissons

$$B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_2/2 & \varepsilon 2\beta_1 \\ \varepsilon(1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12) & 2 - \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix}, \varepsilon = \pm 1.$$

**Proposition 11.** Si  $\alpha_1 = 1/2, 8\alpha_2 + 16\alpha_3 = -1, \beta_1 + 2\beta_2 = 1, \gamma_2 + 2\gamma_3 = 1$  et si de plus  $1/4 + 2\beta_3 - \beta_1/6 = 0$ , alors l'algorithme  $HC^2$  converge si et seulement si  $\hat{\rho}(B_1, B_{-1}) < 1$ .

Une condition suffisante de convergence est :

$$|1 - \gamma_2/2| < 1, |2 - \beta_1| < 1$$

$$\text{et } |1/2 + 4\alpha_2 + \gamma_2/12| \cdot |2\beta_1| < (1 - |1 - \gamma_2/2|)(1 - |2 - \beta_1|).$$

*Démonstration.* La première partie résulte du rappel (\*).

Pour la seconde, choisissons sur  $\mathbb{R}^2$ , la norme  $\|(x, y)^T\| = |x| + \lambda|y|$  où  $\lambda$  est un réel strictement positif à fixer. Alors :

$$\|B_\varepsilon\| \leq \max(|a| + \lambda|c|, \frac{|b|}{\lambda} + |d|).$$

Peut-on choisir  $\lambda$  tel que :  $|a| + \lambda|c| < 1, \frac{|b|}{\lambda} + |d| < 1$  ? Pour cela, il suffit que :  $1 - |a| > 0, 1 - |d| > 0$  et  $|c| \cdot |b| < (1 - |a|)(1 - |d|)$ , ce qui permet de conclure. □

**Exemple 12.** Dans le cas de l'interpolant de classe  $C^2$ , polynômial de degré 3 par morceaux sur  $[0, 1/3], [1/3, 2/3]$  et  $[2/3, 1]$ , (spline cubique à 2 nœuds),

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & \varepsilon.3/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & \varepsilon.9/2 \\ 0 & -\varepsilon.3/72 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

L'inégalité :  $(1/72).(9/2) < (1 - 1/4).(1 - 1/4) = 9/16$  nous assure la convergence.

Dans le cas général, on pourra rechercher une norme sur  $\mathbb{R}^3$  sous la forme  $\| (x, y, z)^T \| = |x| + \lambda_1 |y| + \lambda_2 |z|$ .

**Illustrations.** Dans les figures ci-dessous, nous avons interpolé les données suivantes :

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = -1, f''(1) = 0,$$

et représenté les trois fonctions  $f, f', f''$  sur un même graphe. La convergence est assurée par les propositions 9 ou 11. Attention aux changements d'échelle dans les illustrations.

Figure 1 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 15/8, \beta_2 = -7/16, \beta_3 = 1/32, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$ , spline quintique.

Figure 2 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -5/32, \alpha_3 = 1/64, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$ , spline quartique à un nœud :  $1/2$ .

Figure 3 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -23/144, \alpha_3 = 5/288, \beta_1 = 9/4, \beta_2 = -5/8, \beta_3 = 1/16, \gamma_2 = 3/2, \gamma_3 = -1/4$ , spline cubique à 2 nœuds :  $1/3, 2/3$ .

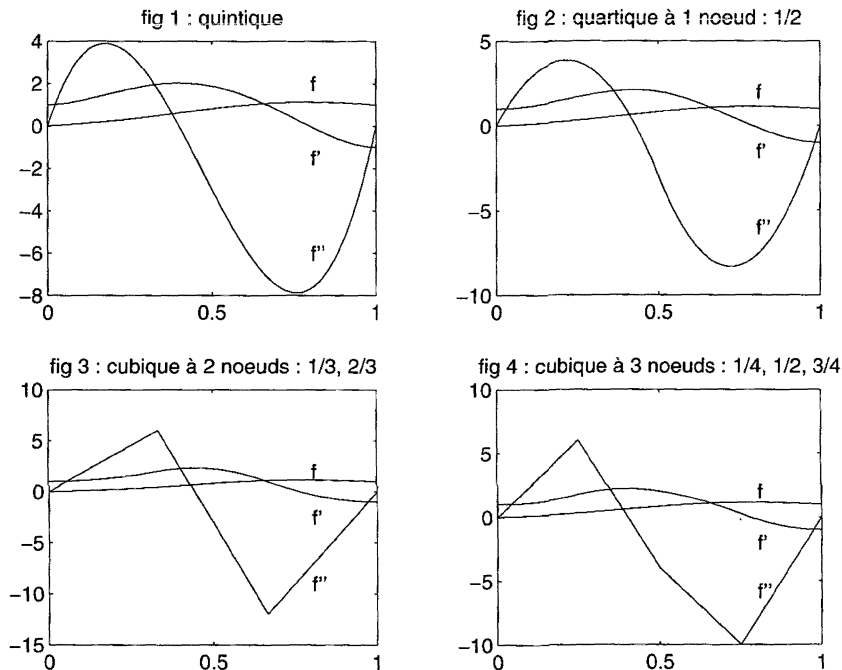
Figure 4 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -1/6, \alpha_3 = 1/48, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$ , spline cubique à 3 nœuds :  $1/4, 1/2, 3/4$ .

Figure 5 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -3/16, \alpha_3 = 1/32, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -1$ .

Figure 6 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -11/64, \alpha_3 = 3/128, \beta_1 = 2, \beta_2 = -1/2, \beta_3 = 1/24, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -1$ .

Figure 7 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -1/6, \alpha_3 = 1/48, \beta_1 = 3/2, \beta_2 = -1/4, \beta_3 = 0, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$ .

Figure 8 :  $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = -3/16, \alpha_3 = 1/32, \beta_1 = 3/2, \beta_2 = -1/4, \beta_3 = 0, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = -1/2$ .



splines par subdivision

