

O. TCHA-KONDOR

Couplage entre éléments finis et calculs analytiques pour l'équation de Laplace dans un domaine à frontière angulaire

Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 4 (1993), p. 497-514

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_4_497_0

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**COUPLAGE ENTRE ÉLÉMENTS FINIS
ET CALCULS ANALYTIQUES
POUR L'ÉQUATION DE LAPLACE
DANS UN DOMAINE À FRONTIÈRE ANGULAIRE (*)**

par O. TCHA-KONDOR ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 comportant un point anguleux et (p) un problème elliptique posé sur ce domaine.

L'utilisation de la méthode de Galerkin par approximation polynomiale pour la résolution du problème (p) donne parfois lieu à des convergences trop lentes.

Cela rend donc nécessaire la prise en compte des solutions singulières afin d'améliorer les résultats.

La méthode utilisée à cette fin dans ce travail consiste à effectuer une décomposition de domaines en sous-domaines, puis à utiliser des résultats connus sur le comportement de la solution dans le voisinage du coin.

Abstract. — Consider an open bounded Ω in \mathbb{R}^2 with a corner and (p) an elliptic problem raised in that domain.

The use of the Galerkin method by polynomial approximation to solve (p) gives sometime bad convergences.

It is therefore necessary to use singular solutions in order to improve the results.

The method used here for this aim consists in using both a domain decomposition and results known on the behaviour of the solution near the corner.

INTRODUCTION

La résolution des problèmes elliptiques dans un domaine à coins pose des problèmes qui sont liés à la difficulté de restituer les solutions avec de bonnes précisions.

(*) Manuscrit reçu le 20/12/91 et sous forme révisée le 29 juin 1992.

(1) 7, Rue de Russie, Nice 06000.

L'objet de ce travail est de résoudre un problème elliptique dans un domaine à coins en utilisant des résultats connus sur le comportement de la solution dans le voisinage de coins et une méthode de décomposition de domaines.

Pour résoudre cette question de précision on utilise généralement des méthodes comme celles de raffinements de maillage qui sont des méthodes qui ne prennent pas en compte de manière explicite le comportement singulier de la solution.

On utilise aussi une méthode qui consiste à introduire dans l'espace des éléments finis, des bases singulières.

Cette dernière méthode a l'avantage de prendre en compte le comportement singulier mais donne lieu à une matrice pleine donc à de gros calculs.

Dans ce travail, nous décomposons notre domaine en sous-domaines permettant d'écrire explicitement la solution singulière dans le sous-domaine voisin du point singulier ; puis nous imposons sur l'interface qui sépare les sous-domaines, une condition de couplage non locale.

Ceci donne lieu à un problème auxiliaire variationnel qu'on peut résoudre par éléments finis.

On est donc amené à un couplage entre éléments finis et calculs analytiques.

Des essais numériques effectués avec cette méthode nous donnent de meilleurs résultats sur le coefficient de singularité et une précision relative-ment meilleure de la solution du problème.

Cet article contient 3 étapes :

1. Décomposition du domaine en sous-domaines et mise en évidence d'un problème variationnel où la condition aux limites sur l'interface est exprimée par un opérateur T .
2. Calcul explicite de l'opérateur d'interface T .
3. Quelques essais numériques sur le couplage.

1. DÉCOMPOSITION DU DOMAINE EN SOUS-DOMAINES ET MISE EN ÉVIDENCE D'UN PROBLÈME VARIATIONNEL

1.1. Problème modèle

Soit le problème suivant de trouver u appartenant à $H^1(\Omega)$ telle que :

$$(p) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ u = g & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c \end{cases}$$

où g appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$; $\Gamma = \partial\Omega$.

Ω est le domaine représenté ci-dessous et $\Gamma_c = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (fig. 1).

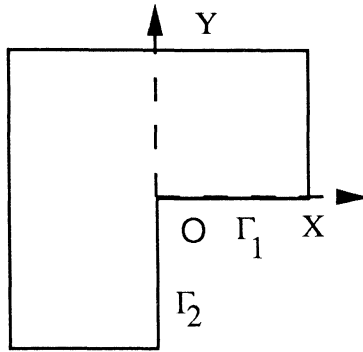


Figure 1.

1.2. Décomposition de domaine et construction d'un problème variationnel

Pour résoudre (p) , nous allons décomposer le domaine Ω en 2 sous-domaines comme l'indique la figure suivante (fig. 2) :

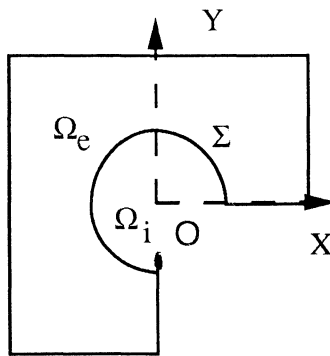


Figure 2.

$\Sigma = \Omega \cap \{r = \rho\}$ est une interface circulaire.

$\Omega_i = \Omega \cap \{r < \rho\}$ est un voisinage de 0 dans lequel on sait décrire la solution.

$\Omega_e = \Omega \cap \{r > \rho\}$ est le complémentaire de $\bar{\Omega}_i$ dans Ω .

Ayant ainsi décomposé notre domaine, nous obtenons 2 sous-problèmes (p_i) et (p_e) posés respectivement dans Ω_i et Ω_e :

$$(p_i) \begin{cases} -\Delta u_i = 0 & \text{sur } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \Gamma_i \text{ où } \Gamma_i = \partial\Omega_i \\ u_i = \Phi & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

et

$$(p_e) \begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{sur } \Omega_e \\ u_e = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \Gamma_e \\ u_e = g & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c \\ u_e = \Phi & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

où Φ est une fonction inconnue et $\Gamma_e = \partial\Omega_e$.

On commence par résoudre (p_i) et ce, par séparation de variables, puisque Ω_i se décrit comme un rectangle en coordonnées polaires :

$$u_i(r; \theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} v_k(r) \sin(k\alpha\theta) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\pi}{\omega}.$$

En remplaçant cette dernière expression dans (p_i) , on trouve :

$$u_i(r, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) \quad \text{où } \alpha_k \text{ est une constante.}$$

Pour

$$r = \rho, \text{ on a } u_i(\rho, \theta) = \Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \alpha_k \rho^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta)$$

d'où :

$$c_k = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \int_0^\omega \Phi(\theta) \sin(k\alpha\theta) d\theta = \alpha_k \rho^{k\alpha} \quad (\text{I-1})$$

et :

$$u_i(r; \theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) \quad (1)$$

$$\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta). \quad (2)$$

De (1), on remarque que :

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega r} c_k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta).$$

On définit ainsi un opérateur T comme suit :

$$T: \tilde{H}^{1/2}(\Sigma) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma) \quad (3)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k \sin(k\alpha\theta).$$

Par définition, $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma) = \{\Phi \in H^{1/2}(\Sigma); \tilde{\Phi} \in H^{1/2}(\mathbb{R})\}$.

On peut écrire :

$$T : \{c_k\} \rightarrow \left\{ \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k \right\}. \tag{4}$$

Ainsi, (4) indique que T est un opérateur de multiplication des coefficients de Fourier c_k par $\frac{k\pi}{\omega\rho}$.

Les fonctions u_i et u_e vérifient donc la condition sur l'interface :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial r} = Tu_i \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} = Tu_e. \end{cases}$$

Finalement u_e est solution de :

$$(p_e) \begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{sur } \Omega_e \\ u_e = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \Gamma_e \\ u_e = g & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} = Tu_e & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

où T est défini en (3).

C'est ce problème (p_e) que nous allons résoudre numériquement.

Mais auparavant, nous décrirons quelques propriétés de l'opérateur T .

1.3. Propriétés de l'opérateur T

T est défini dans l'espace $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ à cause du théorème de trace dans le secteur ci-dessous (fig. 3) :

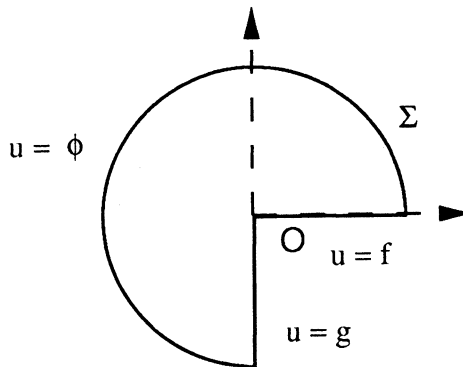


Figure 3.

THÉORÈME DE TRACE : L'application $u \rightarrow (\Phi, f, g)$ de $H^1(\Omega)$ dans $\{(\Phi, f, g) \in H^{1/2}(\Sigma) \times H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_2)\}$, avec les conditions (R) est surjective, où (R) est tel que :

$$(R) \begin{cases} \int_0^\varepsilon |f(t) - g(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \\ \int_0^\varepsilon |f(R-t) - \Phi(Rt)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \\ \int_0^\varepsilon |g(R-t) - \Phi(R(\omega-t))|^2 \frac{dt}{t} < \infty \end{cases}$$

pour un ε assez petit.

Pour la démonstration du théorème de trace, voir Gagliardo [1]. ■

COROLLAIRE : Pour $f = g = 0$, l'application

$$u \rightarrow \{\Phi\}$$

définie sur $\{u \in H^1(\Omega) ; u|_{\Gamma_1} = 0, u|_{\Gamma_2} = 0\}$ a pour image l'ensemble D défini par

$$D = \left\{ \Phi \in H^{1/2}(\Sigma) ; \int_0^\omega |\Phi(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \text{ et } \int_0^\omega |\Phi(\omega-t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \right\}$$

$$D = \{ \Phi \in H^{1/2}(\Sigma), \tilde{\Phi} \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \} \text{ qui est par définition } \tilde{H}^{1/2}(\Sigma).$$

Preuve : On exploite les relations de R avec les conditions $f = g = 0$. ■

PROPOSITION : L'espace $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ est caractérisé par

$$\tilde{H}^{1/2}(\Sigma) = \left\{ \Phi = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta) \text{ tel que } \sum_{k \geq 1} kc_k^2 < \infty \right\}.$$

Preuve : D'après l'interpolation linéaire de Lions-Peetre [2], on a :

$$\tilde{H}^{1/2}(\Sigma) = [H_0^1(\Sigma) ; L^2(\Sigma)]_{1/2; 2}.$$

Or

$$H_0^1(\Sigma) = \left\{ \Phi = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta) \text{ tel que } \sum_{k \geq 1} k^2 c_k^2 < \infty \right\} \text{ et}$$

$$L^2(\Sigma) = \left\{ \Phi = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta) \text{ tel que } \sum_{k \geq 1} c_k^2 < \infty \right\}.$$

En utilisant encore les résultats d'interpolation de Lions-Peetre lorsque $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ et $L^2(\Sigma)$ sont décrits comme ci-dessus, on obtient :

$$\tilde{H}^{1/2}(\Sigma) = \left\{ \Phi = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta) \text{ tel que } \sum_{k \geq 1} kc_k^2 < \infty \right\} \text{ cqfd. } \blacksquare$$

THÉORÈME 1 : Posons $W = \tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ et W' son dual, alors on a :

- (i) $\langle T\Phi, \psi \rangle_{W' \times W} = \langle \Phi, T\psi \rangle_{W \times W'}$.
- (ii) Il existe $\delta > 0$ tel que $\langle T\Phi, \Phi \rangle_{W' \times W} \geq \delta \|\Phi\|_W^2$.

Preuve : C'est une conséquence de la représentation de Φ et Ψ en série de sinus et l'orthogonalité des sinus.

La forme bilinéaire associée au problème (p_e) dans la formulation variationnelle s'écrit :

$$a(u_e, v_e) = \int_{\Omega_e} \nabla u_e \nabla v_e \, dx + \int_{\Sigma} T u_e v_e \, d\sigma, \tag{5}$$

$T u_e$ restreint à Σ appartient à W' et v_e restreint à Σ appartient à W .

v_e appartient à l'espace $V = \{v \in H^1(\Omega_e) \text{ tel que } u_e|_{\Gamma_e \setminus \Sigma} = 0\}$.

En utilisant (i) et (ii), on trouve que $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire continue, coercitive et le problème (p_e) est variationnel. \blacksquare

2. CALCUL DU NOYAU DE L'OPÉRATEUR T

2.1. Calcul du noyau

En écrivant $\sin(k\alpha\theta) = \frac{\exp(ik\alpha\theta) - \exp(-ik\alpha\theta)}{2i}$ et en le remplaçant dans (2), on trouve $\Phi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \exp(ik\alpha\theta)$ où :

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{c_k}{2i} \sqrt{\frac{2}{\omega}} & \text{si } k \geq 1, \\ \frac{-c-k}{2i} \sqrt{\frac{2}{\omega}} & \text{si } k \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Où on pose $\gamma_0 = 0$.

En faisant pareil pour $T\Phi$ dont l'expression est explicitée en (3), on trouve :

$$T\Phi(\theta) = \frac{\pi}{\omega\rho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \gamma_k \exp(ik\alpha\theta). \tag{7}$$

Posons $S_r(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} |k| \exp(ikt)$ pour $r < 1$.

LEMME : Soit $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \exp(ikt)$.

Soit : $S : \tilde{H}^{1/2}]-\pi, \pi[\rightarrow H^{-1/2}]-\pi, \pi[$
 $f(t) \rightarrow Sf(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \gamma_k \exp(ikt)$.

Alors on a :

$$Sf(t) = \lim_{r \rightarrow 1} S_r * f(t) = \frac{d}{dt} \cotg (t/2) * f$$

où * est la convolution périodique de période 2π , cette limite étant prise au sens de $D'_{\#}$, $D'_{\#}$ étant l'espace des distributions périodiques de période 2π .

Preuve : $S_r(t) = \sum_{k \geq 1} r^k k \exp(ikt) - \sum_{k \leq -1} r^{-k} k \exp(ikt)$ et on trouve :

$$S_r(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2r \sin t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \right\} \tag{8}$$

après avoir remarqué que :

$$\sum_{k \geq 1} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}$$

On montre en utilisant la convergence dominée de Lebesgue que $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{2r \sin t}{1 + r^2 - 2r \cos t} \right\}$ converge vers $vp \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)$ lorsque r tend vers 1 dans l'espace D' .

D'où $S_r * f(t)$ tend vers $\frac{d}{dt} vp \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) * f = \frac{d}{dt} vp(\cotg (t/2) * f)$ dans D' lorsque r tend vers 1. ■

Remarquons que :

$$Sf(t) = \frac{1}{2\pi} vp \int_{-\pi}^{\pi} \cotg (s/2) f'(t-s) ds \tag{9}$$

THÉORÈME 2 : L'opérateur $T : W \rightarrow W'$

$$\Phi \rightarrow T\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k \sin(k\alpha\theta)$$

est défini sous forme intégrale par :

$$T\Phi(\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} vp \int_{-\omega}^{\omega} \Phi'(\sigma) \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) d\sigma$$

Preuve : En utilisant la relation (9) et en posant $t = \alpha \theta$ et $s = \alpha \sigma$ on a :

$$T\Phi(\theta) = \frac{\pi}{\omega\rho} S\phi(\alpha\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} v\rho \int_{-\omega}^{\omega} \Phi'(\theta - \sigma) \cotg \frac{\alpha}{2} \sigma d\sigma .$$

En faisant un changement de variables, on obtient :

$$T\Phi(\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} v\rho \int_{-\omega}^{\omega} \Phi'(\sigma) \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) d\sigma$$

d'où le résultat. ■

Remarque : On peut écrire $T\Phi$ de façon plus explicite comme suit :

$$T\Phi(\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} v\rho \times \left\{ \int_0^{\omega} \Phi'(\sigma) \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) d\sigma + \int_{-\omega}^0 \Phi'(\sigma) \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) d\sigma \right\}$$

puis en remarquant que Φ' est paire à cause de (2), on obtient :

$$T\Phi(\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} v\rho \int_0^{\omega} \Phi'(\sigma) \left\{ \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta + \sigma) + \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) \right\} d\sigma . \quad (10)$$

2.2. Forme bilinéaire

Pour expliciter la forme bilinéaire (5), nous avons besoin d'expliciter l'expression $\int_{\Sigma} Tu_e v_e d\sigma$ et nous le ferons de deux manières.

$$\text{De} \quad Tu_e(\rho, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k(u_e) \sin(k\alpha\theta)$$

$$\text{avec} \quad c_k(u_e) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \int_0^{\omega} \Phi(\theta) \sin(k\alpha\theta) d\theta ,$$

$$\text{on a :} \quad \int_{\Sigma} Tu_e v_e d\sigma = \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k(u_e) c_k(v_e) .$$

Puis de la relation (10), en faisant une intégration par parties :

$$\int_{\Sigma} Tu_e v_e d\sigma = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} \int_0^{\omega} \ln \left| \sin \frac{\alpha}{2} (\theta + \sigma) + \sin \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) \right| \times \\ \times \frac{\partial u_e(\rho ; \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial v_e(\rho ; \theta)}{\partial \theta} d\theta d\sigma .$$

On obtient ainsi deux manières d'expliciter la forme bilinéaire donnée par (5) :

$$A) \quad a(u_e; v_e) = \int_{\Omega_e} \nabla u_e \nabla v_e \, dx + \sum_{k \geq 1} \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k(u_e) c_k(v_e).$$

où $c_k(u_e)$ est donné par la relation (I-1).

$$B) \quad a(u_e; v_e) = \int_{\Omega_e} \nabla u_e \nabla v_e \, dx + \frac{1}{\pi} \times \\ \times \int_0^\omega \int_0^\omega \ln \left| \sin \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) + \sin \frac{\alpha}{2} (\theta + \sigma) \right| \frac{\partial u_e(\rho; \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial v_e(\rho; \theta)}{\partial \theta} \, d\theta \, d\sigma.$$

On discrétise $a(\cdot, \cdot)$ dans chacun des cas par une approximation du type nodal puis on résoud (P_e) par éléments finis.

Nous examinons à présent l'effet de troncature sur la solution.

2.3. Erreur de troncature

Soit le domaine représenté ci-dessous (fig. 4) :

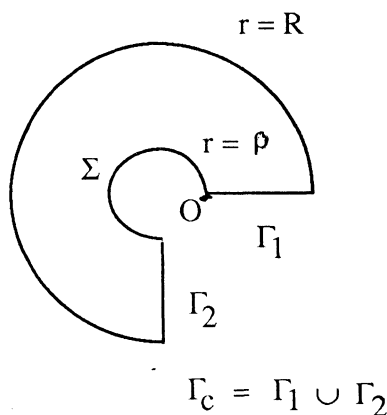


Figure 4.

Nous allons considérer le problème suivant :

trouver u appartenant à $H^1(\Omega_e)$ telle que :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega_e \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \partial\Omega_e \\ u = g & \text{sur } \{r = R\} \\ \frac{\partial u}{\partial r} = Tu & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Soit $\Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \sin(k\alpha\theta)$ appartenant à $\tilde{H}^{1/2}]-\pi; \pi[$.

Soit l'opérateur T_N défini par $T_N \Phi(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k=1}^N \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k \sin(k\alpha\theta)$.

(Série tronquée à N termes.)

Examinons à présent l'effet de cette troncature lorsque la condition sur l'interface (Σ) est décrite par l'opérateur T_N .

Pour cela, on construit le problème (p_N) à l'inconnue u_N suivant : trouver u_N appartenant à $H^1(\Omega_e)$ telle que :

$$(p_N) \begin{cases} -\Delta u_N = 0 & \text{sur } \Omega_e \\ u_N = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \Gamma_e \\ u_N = g & \text{sur } \{r = R\} \\ \frac{\partial u_N}{\partial r} = T_N u_N & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Notre but est de majorer $u - u_N$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION : Soit U_N , la solution du problème (p_N) et u solution de (p) ; alors il existe une constante $C(\alpha, R)$ dépendant de α et R (R étant le rayon délimitant le domaine) telle que :

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C(\alpha, R) \rho^{N+1} \|g\|_{H^{1/2}} \quad (\rho \text{ étant le rayon de l'interface } \Sigma).$$

Preuve : Nous représentons U_N comme suit :

$$U_N(r, \theta) = \sum_{k=1}^N (a_k r^{k\alpha} + b_k r^{-k\alpha}) \sin(k\alpha\theta) + \sum_{k>N} (a_k r^{k\alpha} + b_k r^{-k\alpha}) \sin(k\alpha\theta).$$

On applique T comme opérateur de dérivation par rapport à r , puis on tronque TU_N à N termes pour trouver :

$$(TU_N)_N(\theta) = \sum_{k=1}^N (a_k \rho^k - b_k \rho^{-k\alpha}) \sin(k\alpha\theta).$$

Cela revient à :

(a) $a_k \rho^{k\alpha} - b_k \rho^{-k\alpha} = 0$ pour $k > N$.

On identifie $(TU_N)_N$ à l'expression $T_N u_N$ pour obtenir :

(b) $b_k = 0$ pour $k \leq N$.

En représentant g par :

$$g = \sum_{k>1} g_k \sin(k\alpha\theta) \text{ et puisque } U_N = g \text{ pour } r = R,$$

on obtient :

$$(c) \quad a_k = \begin{cases} \frac{g_k}{R^{k\alpha}} & \text{pour } k \leq N \\ \frac{g_k}{R^{k\alpha} + \rho^{2k\alpha} R^{-k\alpha}} & \text{pour } k \geq N + 1. \end{cases}$$

D'où en utilisant (a), (b), (c),

$$U_N(r, \theta) = \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{R^{k\alpha}} r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{g_k}{R^{k\alpha} + \rho^{2k\alpha} R^{-k\alpha}} (r^{k\alpha} + \rho^{2k\alpha} r^{-k\alpha}) \sin(k\alpha\theta).$$

La fonction u harmonique et vérifiant la condition $u = g$ pour $r = R$ se représente par :

$$u(r, \theta) = \sum_{k>N} \frac{g_k}{R^{k\alpha}} r^{k\alpha} \sin(k\alpha\theta). \\ (u - u_N)(r, \theta) = \sum_{k>N} \frac{\rho^{2k\alpha} g_k}{R^{k\alpha} + \rho^{2k\alpha} R^{-k\alpha}} \left(\frac{r^{k\alpha}}{R^{2k\alpha}} - r^{-k\alpha} \right) \sin(k\alpha\theta).$$

En écrivant $\|u - u_N\|_{H^1}$ et majorant, on obtient :

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C(\alpha, R) \rho^{N+1} \|g\|_{H^{1/2}} \text{ CQFD. } \blacksquare$$

Remarque : La majoration ainsi obtenue est faite sur le domaine particulier ci-dessus.

Mais elle nous donne une idée sur l'erreur de troncature dans une géométrie quelconque. \blacksquare

3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

3.1. Problème auxiliaire

On rappelle ici que le problème dont les résultats numériques sont donnés dans la suite est le problème suivant :

$$(p_e) \quad \begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{sur } \Omega_e \\ u_e = 0 & \text{sur } \Gamma_c \cap \Gamma_e \\ u_e = g & \text{sur } \Gamma_e - \Sigma \\ \frac{\partial u_e}{\partial r} = T u_e & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Ω_e est le domaine ci-dessous (fig. 5) :

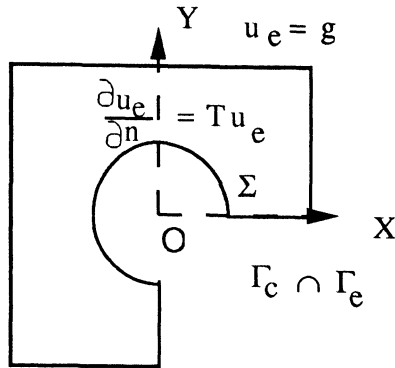


Figure 5.

3.2. Discrétisation de $a(\dots)$

Une triangularisation du domaine Ω_e est donnée par la figure suivante (fig. 6) :

φ_i et φ_j sont des fonctions nodales.

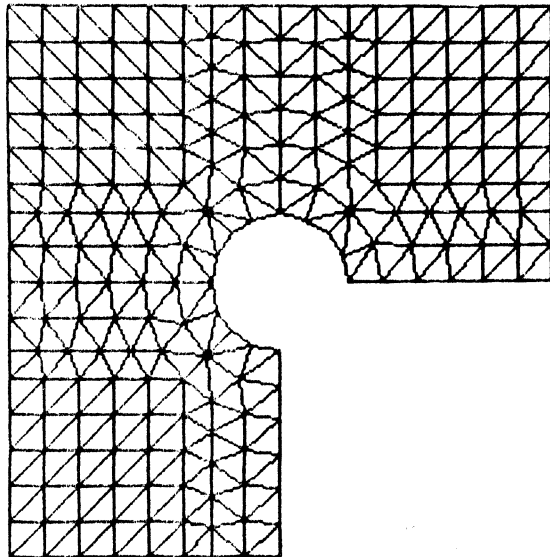


Figure 6.

$c_k(\varphi_i) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \int_0^\omega \varphi_i \sin(k\alpha\theta) d\theta$ lorsque le point nodal définissant la fonction nodale φ_j est sur l'interface Σ et

$$c_k(\varphi_i) = 0 \quad \text{sinon .}$$

La matrice élémentaire s'écrit :

$$A') \quad a_{ij} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \sum_{k=1}^N \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k(\varphi_i) c_k(\varphi_j)$$

dans le cas où la condition sur l'interface Σ est décrite par l'opérateur T_N .

$$B') \quad a_{ij} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\omega \int_0^\omega \ln |\sin \pi [(\theta + \sigma)/2\omega] + \sin \pi [(\theta - \sigma)/2\omega]| \times \\ \times \frac{\partial \varphi_i(\rho; \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \varphi_j(\rho; \theta)}{\partial \theta} d\theta d\sigma$$

dans le cas où la condition sur l'interface Σ est décrite par l'expression intégrale.

Cela correspond au cas B).

Ici, la contribution sous forme d'intégrale double n'a pas lieu lorsque le point nodal définissant la fonction nodale φ_j n'appartient pas à l'interface Σ .

L'approximation de l'intégrale a été faite par une méthode de Gauss avec des précautions aux points singuliers.

3.3. Quelques résultats numériques

Le tableau 1 correspond à la situation où T est remplacé par T_N défini sous forme de série tronquée :

$$T_N u_e(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k=1}^N \frac{k\pi}{\omega\rho} c_k \sin(k\alpha\theta).$$

Le tableau 2 est la situation où T est écrit sous forme intégrale :

$$T u_e(\theta) = \frac{1}{2\omega\rho} v p \int_0^\omega \Phi'(\sigma) \left\{ \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta + \sigma) + \cotg \frac{\alpha}{2} (\theta - \sigma) \right\} d\sigma .$$

Ce qui correspond aux formes bilinéaires des relations A) et B).

ρ est le rayon de l'interface, h le pas du maillage.

Les erreurs sont des erreurs en norme du maximum.

Solution test : $r^{2/3} \sin(2\theta/3)$.

TABLEAU 1.

$h \backslash \rho$	0,5	0,25
0,25	$5,7 \times 10^{-2}$	$5,43 \times 10^{-2}$
0,125	$5,6 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$
0,0625	5×10^{-2}	$4,7 \times 10^{-2}$

Ce tableau étant celui qui correspond au cas où l'on utilise la série tronquée, on fait remarquer que la convergence vers la solution a lieu au bout de 3 ou 4 harmoniques.

TABLEAU 2.

$h \backslash \rho$	0,5	0,25
0,25	$6,8 \times 10^{-2}$	$5,8 \times 10^{-2}$
0,125	$6,9 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$
0,0625	$5,3 \times 10^{-2}$	$4,5 \times 10^{-2}$

A la comparaison des deux tableaux, on obtient les mêmes précisions numériques.

En écrivant l'opérateur T sous forme de série tronquée, on rejoint la méthode utilisée dans Masmoudi [3] pour résoudre les problèmes extérieurs pour l'équation des ondes.

A ρ fixé, on n'obtient pas dans les deux cas un ordre de convergence significatif en h .

a) *Calcul numérique de la solution à partir du coefficient de singularité.*

On considère le problème (p_e) avec la condition sur Σ sous la forme intégrale précédente.

On sait que la solution dans le voisinage de 0 est analytique et que sur Σ ,

$$u_e(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \sum_{k \geq 1} c_k \rho^{k\alpha} \sin k\alpha \theta .$$

Si C est le coefficient de singularité,

$$C = \frac{2}{\omega} \rho^{-\alpha} \int_0^{\omega} u_e \sin \alpha \theta \, d\theta . \quad (11)$$

D'où C_h , valeur approchée de C , est :

$$C_h = \frac{2}{\omega} \rho^{-\alpha} \int_0^{\omega} u_{eh} \sin \alpha \theta \, d\theta \quad (12)$$

u_{eh} solution approchée de u_e .

Nous comparons ici deux situations :

Dans la première situation, nous résolvons le problème (p_e) posé sur le domaine avec interface (voir paragraphe 2, section I), puis en utilisant (12), nous calculons C_h . On obtient le tableau 3.

TABLEAU 3.

Rayon ρ	Valeur approchée de C_h	Valeur exacte C
0,25	1,0062	1
0,125	1,0034	1

Dans la deuxième situation, nous résolvons (p) posé sur le domaine sans interface (voir paragraphe 1, section I), puis en localisant $r = \rho$, nous calculons C_h . On obtient le tableau 4.

Solution test : $r^{2/3} \sin (2/3) \theta + r^2 \sin 2 \theta$.

TABLEAU 4.

Rayon ρ	Valeur approchée de C_h	Valeur exacte C
0,25	1,146	1
0,125	1,086	1

On observe qu'en imposant sur Σ , une condition du type intégral conformément à ce qui a été fait en II, on obtient de meilleurs résultats sur C .

En variant le rayon ρ pendant les essais numériques, on obtient des résultats similaires.

Par exemple ici, on obtient une erreur de l'ordre de 6 % sur le tableau 3, alors qu'il est de 14 % sur le tableau 4 pour $\rho = 0,25$.

3 % au lieu de 8 % pour $\rho = 0,125$.

En multipliant les essais, on remarque qu'on a de meilleurs résultats sur C avec la méthode intégrale.

b) *Calcul de la solution u à partir du problème (p_e) .*

De (p_e) , on effectue d'après (12) un calcul approché de C .

Puis on en déduit u en remarquant que :

$$u = u_R + cu_S, \quad u_S = r^\alpha \sin \alpha \theta \quad (13)$$

et U_R la partie régulière de la solution U et U_R appartient à $H^2(\Omega)$, voir Grisvard [4] pour cette décomposition.

Le problème (p) va se ramener au problème :

$$(p_r) \quad \begin{cases} -\Delta u_R = 0 & \text{sur } \Omega \\ u_R = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ u_R = g - C u_S & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_c. \end{cases}$$

Connaissant C et u_S , on en déduit u .

Nous comparons ici deux situations :

une première situation donnée par le tableau 5 dans laquelle on résout le problème (p) directement par éléments finis.

Dans la deuxième situation donnée par le tableau 6, on résout (p_e) puis on calcule C avant de déduire u par la relation (13).

Solution test : $r^2 \sin 2\theta + r^{2/3} \sin (2/3)\theta$.

TABLEAU 5.

Pas h	Erreur max.
0,25	$1,9 \times 10^{-2}$
0,125	$1,4 \times 10^{-2}$
0,0625	$8,7 \times 10^{-2}$

TABLEAU 6.

Pas h	Erreur max.
0,25	$8,7 \times 10^{-3}$
0,125	$7,8 \times 10^{-3}$
0,0625	4×10^{-3}
0,031	$1,86 \times 10^{-3}$

A la comparaison, on voit que le tableau 6 donne globalement de meilleurs résultats et un ordre de convergence de 1 au lieu de 0,66 prévu par la théorie (voir Tcha-Kondor [5]).

Bien que la méthode ne donne qu'une légère amélioration des résultats, elle a l'avantage de garder globalement la structure creuse de la matrice et de ne pas induire de gros calculs par rapport à la méthode qui consiste à inclure la base singulière en augmentant ainsi la dimension de la matrice de rigidité.

D'autre part, avec cette méthode, on voit comment on peut décrire une condition d'interface en utilisant l'analyticité de la solution dans un voisinage de coins.

Il faut noter aussi que la façon dont est écrite la condition d'interface dépend de l'angle aux coins qu'on traite et des conditions sur les bords aux coins.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GAGLIARDO, *Rendiconti semi, Mat. Univ. Padova* 27, 1957, pp. 284-305.
- [2] LIONS-PEETRE, *Sur une classe d'interpolation*, IHES, 1963.
- [3] MASMOUDI, *Résolution des problèmes extérieurs pour l'équation des ondes*, Thèse de troisième cycle, Université de Nice, 1979.
- [4] GRISVARD, *Problèmes aux limites dans des polygones, Modes d'emploi*, EDF, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Série C-Math-Info, 1986.
- [5] TCHA-KONDOR, *Éléments Finis et Calculs Analytiques*, Thèse soutenue à l'Université de Nice, 1989, pp. 6-9.