M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

B. LACOLLE
P. VALENTIN

Modélisation géométrique de la faisabilité de plusieurs mélanges

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, nº 3 (1993), p. 313-348

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_3_313_0>

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 3, 1993, p. 313 à 348)

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FAISABILITÉ DE PLUSIEURS MÉLANGES (*)

par B. LACOLLE (1) et P. VALENTIN (2)

Communiqué par P. J. LAURENT

Résumé. — *Le problème étudié dans cet article concerne la modélisation de la fabrication de produits connus par leur composition en des espèces fondamentales, à partir de produits de base donnés. L'origine de ce travail est une étude de la gestion de mélanges de produits pétroliers. Nous utilisons un modèle géométrique dans lequel les produits de base et les mélanges sont des vecteurs de l'espace vectoriel des espèces physico-chimiques. La somme vectorielle représente le procédé de mélange. La somme de Minkowski ainsi qu'une classe de convexes particuliers, les zonotopes, sont les notions de base qui sont utilisées. Les problèmes de fabrication d'un seul mélange, faisabilité et optimisation, ont déjà été étudiés et nous nous intéressons ici la fabrication simultanée de plusieurs mélanges et son modèle mathématique de la coexistence d'une famille de vecteurs dans une autre. Nous exposons d'abord des outils numériques, directement issus des méthodes de calcul d'un seul mélange. Nous nous intéressons ensuite à des aspects nouveaux concernant le problème de la coexistence d'une famille de vecteurs dans une autre, tant sur le plan théorique que pratique.*

Abstract. — Geometrical modelling of the feasibility of several mixtures. *In this paper, we are interested in modelling the production of some given mixtures by mixing parts of basic products This study is justified by a stock management problem in a oil refinery. We use a geometrical framework in which mixtures and basic products are represented by vectors in the vector space of physico-chemical species. The sum of vectors represents the mixing process. Minkowski sums and particular convex sets known as zonotopes, are the basic tools we use. The production and feasibility of one mixture only, have been previously studied, as well as some optimal production strategies. In this paper, we deal with the fabrication of several mixtures. In a straightforward way, we develop efficient generalizations of numerical methods used in the fabrication of one mixture. Then, we introduce the notion of coexistence between two families of vectors, and we are interested in some theoretical features and computational applications of this important concept.*

(*) Reçu pour publication en avril 1992.

Ce travail a bénéficié du soutien de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, du CNRS et du Centre de Recherche Elf de Solaize.

(1) Université Joseph Fourier, Laboratoire LMC-IMAG, BP 53 X, 38041 Grenoble Cedex, France.

(2) Elf-France, Centre de Recherche Elf-Solaize, BP 22, 69360 St-Symphorien D'Ozon, France.

1. INTRODUCTION

A partir de la théorie géométrique des mélanges développée par P. Valentin [18, 19], des études ont été élaborées pour la fabrication d'un seul mélange [6, 7, 17]. Dans le problème pratique, il s'agit de fabriquer des mélanges de produits pétroliers de propriétés données (tonnage, volume et autres propriétés, comme la teneur en soufre par exemple) à partir d'un ensemble de produits de base. La modélisation géométrique utilisée suppose que les lois de mélange sont additives : ceci signifie que les propriétés caractérisant un mélange se calculent par additions des propriétés correspondantes des produits de base utilisés pour le mélange. Cet aspect sera détaillé dans le paragraphe 2.1.

• Fabrication d'un seul mélange

Il s'agit tout d'abord de trouver s'il existe une solution et de la calculer. Dans le modèle géométrique utilisé, l'existence se traduit par l'appartenance à un convexe particulier, appelé *convexe de mélanges* et qui est un zonotope. Calculer une solution est équivalent à trouver un point vérifiant un ensemble de contraintes linéaires. Nous verrons que ces problèmes se posent dans des espaces différents : *espaces des espèces* et *espace de réalisations*. Des méthodes ont été proposées par K. Slaoui [17]. Mais, en général, il y a une infinité de façons à réaliser un mélange donné : certaines façons de réaliser le mélange sont plus intéressantes que d'autres et il convient de matérialiser cette pertinence par un critère mathématique. Un critère de *séparation résiduelle* proposé par D. Girard [7], permet de prendre en compte des demandes ultérieures aléatoires. Cette méthode conduit à un problème d'optimisation convexe. D. Girard propose également des critères linéaires : dans ce cas, le problème d'optimisation est un programme linéaire facile à résoudre mais les critères sont *a priori* moins pertinents.

• Fabrication de plusieurs mélanges

Dans cet article nous traitons le cas de la fabrication simultanée de plusieurs mélanges. La stratégie de fabrication est décidée de façon globale. Dans une stratégie séquentielle il est possible que la façon dont on a réalisé le premier mélange ne permet plus de faire le second, alors que globalement une stratégie permettant de faire les deux mélanges aurait pu être élaborée. Utilisant la théorie géométrique des mélanges, ce problème sera appelé problème de la *coexistence d'une famille de vecteurs* dans une autre famille de vecteurs. Le modèle mathématique utilisé est exposé dans le paragraphe 2.3.

Dans le paragraphe 3, nous proposons des outils numériques permettant de résoudre le problème de la faisabilité de plusieurs mélanges et de son optimisation. En effet, même dans le cas de la coexistence, les solutions ne sont pas uniques et il convient également d'utiliser un critère d'optimisation. Le critère de séparation résiduel peut également être utilisé mais le coût du calcul risque d'être plus important. On montre également que des critères linéaires peuvent être très facilement utilisés et qu'ils n'ont pas tous les inconvénients du cas d'un seul mélange. De plus, la formulation est très souple et permet de rendre compte de nombreuses modélisations de situations réelles, incorporant par exemple une planification dans le temps de la disponibilité des produits de base (coexistence multi-périodes). De nombreuses expériences pratiques concluantes ont été faites en utilisant des critères linéaires.

Dans le paragraphe 4, nous présentons la notion de *convexe de q-mélanges,* généralisation à plusieurs mélanges du *convexe de mélanges,* dans un espace dont la dimension croît avec le nombre de mélanges. Cette interprétation donne une explication simple de certaines propriétés de coexistence, en particulier sur la structure de l'ensemble des solutions. Dans le cas où le nombre d'espèces est égal à deux, on peut retrouver des résultats très particuliers [8].

Ensuite, nous exposons dans le paragraphe 5, une autre formulation en termes de somme et d'intersection de convexes dans l'espace des réalisations, sans augmenter la taille de l'espace avec le nombre de mélanges. On élabore une méthode géométrique de résolution qui, associée à la possibilité de réduction du nombre des inconnues, permet de traiter certains cas particuliers de manière très efficace, dans le cadre de la Géométrie Algorithmique.

2. MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DES MÉLANGES

Nous présentons les grandes lignes de cette théorie introduite par P. Valentin [7, 17, 18, 19].

2.1. Les mélanges additifs

Nous supposons disposer de produits de base, caractérisés par certaines propriétés. Par mélanges des produits de base précédents, nous allons fabriquer un ou plusieurs produits possédant de nouvelles propriétés. Une propriété sera *additive* si la propriété du mélange (le nombre qui la mesure) est la somme des propriétés des constituants de ce mélange (des nombres qui les mesurent). Ces propriétés peuvent être la masse, la teneur en une espèce donnée, la densité, ... La masse est évidemment une propriété additive. Pour une teneur en une certaine espèce, on se ramène à une quantité additive en

considérant la masse de cette espèce. Pour la densité, on se ramène au volume. Pour d'autres propriétés cela est moins direct, mais dans beaucoup de cas on sait mesurer cette propriété par une fonction qui possède la propriété d'additivité. L'origine de ce travail est un problème de mélanges de produits pétroliers, où les propriétés considérées sont en général choisies parmi la masse, la densité, la teneur en soufre, un point de trouble, etc... En ce qui concerne ces produits pétroliers, certaines fonctions permettant d'appliquer l'additivité ont été étudiées par N. Odeh [14].

2.2. La théorie vectorielle des mélanges additifs : faisabilité d'un mélange

Remarque : Dans cet article nous travaillons dans des espaces euclidiens usuels de dimension finie, mais pour la simplicité de l'exposé, nous utilisons indifféremment les terminologies des espaces affines ou vectoriels : point N et vecteur N (pour le vecteur $\overrightarrow{ON}$), O étant l'origine de l'espace.

Dans la modélisation géométrique des mélanges proposée par P. Valentin, un *produit homogène, base ou mélange,* sera entièrement caractérisé par un vecteur de $\mathbb{R}^n_+$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera appelé dans la suite *espace des espèces.* On suppose disposer de p produits de base, représentés par une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$:

$$\{N_1, N_2, \ldots, N_p\} .$$

Un *mélange* ou *produit,* ou simplement un *vecteur* M de $\mathbb{R}^n_+$, sera dit *faisable* à partir de la famille $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ s'il existe des nombres réels $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p$ tels que :

$$M = \sum_{j=1}^{p} \lambda^j N_j \quad \text{et} \quad \lambda^j \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \ldots, p .$$

On a donc réalisé le mélange M en mélangeant des fractions des produits $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Le vecteur $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p)$ appartient à $\mathbb{R}^p$ qui sera appelé *l'espace des réalisations.*

L'ensemble des vecteurs faisables à partir de la famille $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$, est défini par :

$$\left\{M \in \mathbb{R}^n : M = \sum_{j=1}^{p} \lambda^j N_j \quad \text{et} \quad \lambda^j \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \ldots, p\right\} .$$

C'est un convexe, appelé *convexe de mélanges* associé à la famille $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$, et noté $Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Cet ensemble peut s'écrire également comme la *somme de Minkowski* des segments $\{\lambda^j N_j, 0 \leq \lambda^j \leq 1\}$ notés $[0, N_j]$:

$$Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\} = \sum_{j=1}^{p} [0, N_j] .$$

Le convexe $Z\{N_1, N_2, ..., N_p\}$ est un polytope particulier appelé *zonotope*, étudié par de nombreux auteurs [2, 11, 12], et en particulier Mc Mullen et Shephard [13, 16].

Le problème la faisabilité d'un seul mélange ainsi que le problème de sa fabrication optimale ont déjà été étudiés [6, 7, 17]. Nous nous intéresserons ici au problème de plusieurs mélanges.

2.3. Fabrication simultanée de plusieurs mélanges et coexistence d'une famille de vecteurs

2.3.1. *Définition de la coexistence*

Étant données une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}_+^n$:

$$\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, ..., N_p\}\ , \quad N_j \in \mathbb{R}_+^n\ , \quad j = 1, 2, ..., p\ ,$$

et une famille de q vecteurs de $\mathbb{R}_+^n$:

$$\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, ..., M_q\}\ , \quad M_k \in \mathbb{R}_+^n\ , \quad k = 1, 2, ..., q\ ,$$

on dit que la famille $\mathscr{F}_M$ *coexiste* dans la famille $\mathscr{F}_N$, s'il existe q p-uplets

$$\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, ..., \lambda_k^p)\ , \quad k = 1, 2, ..., q\ ,$$

tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j\ , \quad k = 1, 2, ..., q\ , \tag{1}$$

$$0 \leqslant \lambda_k^j (\leqslant 1) \qquad j = 1, 2, ..., p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, ..., q\ , \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant 1 \qquad j = 1, 2, ..., p\ . \tag{3}$$

Cette formulation correspond à la fabrication simultanée de l'ensemble des mélanges $\{M_1, M_2, ..., M_q\}$ à partir du même ensemble de produits de base $\{N_1, N_2, ..., N_p\}$. Notons que les contraintes naturelles $\lambda_k^j \leqslant 1$ sont rendues inutiles par les conditions (3).

2.3.2. *Remarque et contre-exemple*

Pour le cas le plus simple de deux mélanges M_1 et M_2, une question naturelle est de savoir si la coexistence de $\{M_1, M_2\}$ est équivalente à la faisabilité de M_1, M_2 et $M_1 + M_2$. D. Girard [6, 7] a montré que cette propriété n'est vraie que si le nombre d'espèces est inférieur ou égal à deux.

Dans le cas contraire elle est en général fausse, comme le montre l'exemple suivant dû à D. Girard. On choisit :

$$N_1 = (1, 0, 0), \quad N_2 = (0, 1, 0), \quad N_3 = (0, 0, 1), \quad N_4 = (1, 1, 1),$$

et : $$M_1 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad M_2 = (0, 1, 1).$$

On remarque que :

$$M_1 = N_1 + N_3, \quad M_2 = N_2 + N_3 \quad \text{et} \quad M_1 + M_2 = N_3 + N_4,$$

mais les réalisations de M_1 et M_2 sont uniques et non simultanément compatibles.

3. LA PROGRAMMATION LINÉAIRE : UN OUTIL POUR LE PROBLÈME DE LA COEXISTENCE

Ce paragraphe ne contient pas de résultats mathématiques nouveaux. Il est destiné à montrer que la programmation linéaire est un outil efficace pour modéliser, puis résoudre numériquement le problème de la coexistence dans de nombreux cas réels. Nous présentons quelques-uns des problèmes que l'on peut traiter dans ce contexte. Toutes les situations exposées ici ont fait l'objet de tests nombreux sur des exemples réels de mélanges de produits pétroliers [9, 10].

3.1. La coexistence

3.1.1. *Contraintes linéaires et coexistence*

On voit que résoudre le problème exposé au paragraphe 2.3.1. revient à trouver un vecteur de $\mathbb{R}^{pq}$ satisfaisant les contraintes (1), (2) et (3). Il s'agit donc de la recherche d'*une solution admissible ou réalisable* vérifiant un ensemble de contraintes linéaires.

3.1.2. *Essais numériques*

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la phase de recherche d'une solution admissible d'un programme linéaire (Bibliothèque NAG). Il s'agit d'une méthode itérative de minimisation d'une suite de fonctions objectives construites à partir des coefficients des contraintes non satisfaites [5]. De nombreux essais ont été réalisés sur micro-Vax [10]. On peut en dégager les conclusions suivantes :

i) *Un grand nombre de variables et de contraintes :* Le principal point à noter dans la formulation précédente est le grand nombre de variables. Par exemple, pour 5 produits à fabriquer et 10 produits de base nous avons

50 variables, et si nous nous intéressons à 5 espèces nous avons 85 contraintes.

ii) *Nécessité d'une précision étendue :* La simple précision est souvent insuffisante.

iii) *Des temps de calculs raisonnables mais qui semblent doubler lorsque l'on rajoute un mélange :* En moins de 10 secondes nous avons traité des exemples comportant jusqu'à 10 produits de base, 5 espèces et 5 mélanges. Le problème de coexistence est donc tout à fait abordable et soluble numériquement. Le facteur essentiel que l'on remarque expérimentalement, est que ce temps d'exécution *semble doubler* lorsque l'on rajoute un produit à fabriquer. Par contre, les exemples traités montrent une croissance modérée lorsqu'on rajoute un produit de base. Le nombre d'espèces n'a pas d'influence très nette dans les cas traités.

3.1.3. *Une généralisation importante : la coexistence multi-périodes*

Il est intéressant de pouvoir modéliser des situations où des produits de bases sont ajoutés ou retirés entre deux fabrications de mélanges successifs. Par exemple, supposons que les q mélanges à fabriquer se répartissent en deux séries :

— première série de mélanges ou *fabrication 1 :* $M_1, \ldots, M_r$,
— seconde série de mélanges ou *fabrication 2 :* $M_{r+1}, \ldots, M_q$.

Les produits de base $N_1, \ldots, N_s$ sont utilisés pour les *fabrications 1 et 2* tandis que les produits de base $N_{s+1}, \ldots, N_p$ ne sont utilisés que pour la *fabrication 2*. Le problème est donc de trouver des coefficients λ_k^j vérifiant :

$$M_k = \sum_{j=1}^{s} \lambda_k^j N_j , \qquad k = 1, 2, \ldots, r ,$$

$$M_k = \sum_{j=1}^{s} \lambda_k^j N_j + \sum_{j=s+1}^{p} \lambda_k^j N_j , \quad k = r+1, \ldots, q ,$$

$$0 \leq \lambda_k^j (\leq 1) , \qquad j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

ce qui correspond à la fabrication indépendante des q mélanges. Les contraintes exprimant la coexistence pour les produits de base communs aux deux séries de fabrication, sont :

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leq 1 , \quad j = 1, 2, \ldots, s ,$$

et pour les produits de base ajoutés pour la seconde série :

$$\sum_{k=r+1}^{q} \lambda_k^j \leq 1 , \quad j = s+1, s+2, \ldots, p .$$

Ce sont évidemment des contraintes linéaires en les variables λ_k^j.

3.2. L'optimisation de la fabrication de plusieurs mélanges

3.2.1. *Introduction*

Aussi bien dans le cas de la fabrication d'un seul mélange que dans le cas de la coexistence il n'y a pas, en général, unicité de la solution (c'est-à-dire des valeurs λ_k^j) lorsqu'elle existe. Il est donc naturel de chercher un critère attaché à la notion de *bon mélange* et d'optimiser par rapport à ce critère. Dans les applications réelles, ces critères ne sont pas toujours aussi faciles à choisir. On pourrait opter pour des critères de coût linéaires en les produits de base utilisés si les coûts de ces produits de base étaient pertinents. Le problème d'optimisation serait alors un programme linéaire. Nous étudierons au paragraphe 3.2.4. d'autres critères linéaires plus orientés vers la capacité à réaliser une production future. D. Girard a proposé un autre critère mesurant de manière pertinente la capacité à satisfaire une demande ultérieure aléatoire [7]. Dans le paragraphe 3.2.2. nous rappelons brièvement ce critère ainsi que ses particularités dans le cas du problème du multi-mélange.

3.2.2. *Optimisation du volume du convexe résidu*

La fabrication optimale d'un mélange M proposée par D. Girard, consiste à maximiser la probabilité de pouvoir fabriquer après M, un mélange aléatoire [7]. Ce critère revient à maximiser le volume du *convexe de mélanges résidu* construit à partir de la famille résiduelle après la fabrication de M. La généralisation à plusieurs mélanges est directe. Considérons le convexe de mélanges initial :

$$Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}\ , \quad N_j \in \mathbb{R}_+^n\ , \quad j = 1, 2, \ldots, p\ ,$$

et les mélanges :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j\ , \quad k = 1, 2, \ldots, q\ ,$$

avec les contraintes de faisabilité simultanée :

$$0 \leqslant \lambda_k^j \qquad j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, p\ .$$

On appelle *convexe de mélanges résidu* le zonotope :

$$Z\left\{\left(1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^1\right) N_1, \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^2\right) N_2, \ldots, \left(1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^p\right) N_p\right\}.$$

Ce convexe représente l'ensemble des mélanges faisables après la fabrication des mélanges M_k, et l'application du critère conduit à maximiser son volume. D. Girard a montré, comme application non triviale du Théorème de Brunn-Minkowski [1], que si M est un vecteur donné, et $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$ vérifie :

$$x^1, x^2, \ldots, x^p \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{p} x^j N_j = M ,$$

la fonction :

$$\psi(x^1, x^2, \ldots, x^p) =$$

$$(\text{Volume } Z\{(1-x^1)N_1, (1-x^2)N_2, \ldots, (1-x^p)N_p\})^{\frac{1}{n}}$$

est alors strictement concave. Mais si la fonction des pq variables λ_k^j :

$$\Psi(\lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^p, \lambda_2^1, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_q^1, \lambda_q^2, \ldots, \lambda_q^p) =$$

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^1, \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^2, \ldots, \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^p\right),$$

est bien concave, elle n'est pas strictement concave : en particulier elle est constante si $\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j$ est constant. On peut montrer que Ψ admet un maximum et on a la propriété suivante :

3.2.3. *Propriété*

M_Ψ désignant le maximum de la fonction Ψ (sous les contraintes énoncées plus haut) et ε un réel positif ou nul, l'ensemble des λ vérifiant $\Psi(\lambda) \geqslant M_\Psi - \varepsilon$, est convexe.

Démonstration : Soient ρ et ν vérifiant :

$$\Psi(\rho) \geqslant M_\Psi - \varepsilon \quad \text{et} \quad \Psi(\nu) \geqslant M_\Psi - \varepsilon .$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a d'après la concavité de Ψ :

$$\Psi(t\rho + (1-t)\nu) \geqslant t\Psi(\rho) + (1-t)\Psi(\nu),$$

et donc :

$$\Psi(t\rho + (1-t)\nu) \geqslant M_\Psi - \varepsilon . \qquad \square$$

Remarque : Même pour $\varepsilon = 0$, cette propriété est mise en évidence pour les mélanges binaires définis par deux espèces où, en général, il existe un

ensemble de mélanges « convexe » menant au même optimum, concernant l'ensemble de la fabrication [8].

3.2.4. *Optimisation de critères linéaires*

La fabrication optimale de plusieurs mélanges avec optimisation d'un critère linéaire se formule aisément. On peut prendre et généraliser tous les critères d'optimisation proposés par D. Girard [7] : optimisation par rapport à *un seul produit de référence* donné précisément ou dans un cône d'acceptabilité (un produit de référence donné par une borne supérieure et une borne inférieure), où sa généralisation à l'optimisation par rapport à *plusieurs produits de référence*. Considérons par exemple, l'exemple type d'une fabrication optimale par rapport à « plusieurs produits de référence » dans le cas où les espèces interviennent en terme de concentration. Il existe en général une espèce privilégiée que l'on supposera dans notre notation mathématique, être la dernière (n-ième composante des vecteurs de $\mathbb{R}_+^n$). Ce sera dans la pratique la masse ou le volume appelés de façon générale *quantité du produit*. Dans le cas qui nous intéresse les autres espèces seront données en concentration par rapport à cette espèce privilégiée.

Mélanges à réaliser : Les mélanges $M_1, M_2, \ldots, M_q$ seront définis par leurs quantités :

$$M_1(n), M_2(n), \ldots, M_q(n),$$

et des *fourchettes* sur les valeurs $M_k(i)$:

$$\alpha_k(i) M_k(n) \leqslant M_k(i) \leqslant \beta_k(i) M_k(n),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

où les $\alpha_k(i)$ et $\beta_k(i)$ seront donnés et égaux au minimum et maximum de concentration de l'espèce i dans le mélange k.

Produits de référence : Les produits de référence $R_1, R_2, \ldots, R_r$ seront connus par des fourchettes sur les concentrations correspondant aux espèces :

$$\gamma_k(i) R_k(n) \leqslant R_k(i) \leqslant \delta_k(i) R_k(n), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ et } k = 1, 2, \ldots, r.$$

Équilibre entre les quantités de produits de référence : Nous introduisons une variable fictive μ, appelée *variable d'équilibrage*, et des *facteurs d'équilibrages* (ρ_k, σ_k), $k = 1, 2, \ldots, r$, qui permettent de contrôler les proportions relatives entre les produits de référence dont on cherche à maximiser les quantités. Plus précisément on impose :

$$\rho_k \mu \leqslant R_k(n) \leqslant \sigma_k \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

La quantité que l'on cherchera à maximiser sera : $\sum_{k=1}^{r} R_k(n)$.

Nous donnons le programme linéaire correspondant au problème énoncé, en les variables

$$(\lambda_k^j)(j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$(\mu_k^j)(j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, r) \quad \text{et} \quad \mu .$$

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \mu_k^j N_j(n)$$

contraintes sur les mélanges à réaliser :

$$M_k(n) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j(n), \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

$$\alpha_k(i) M_k(n) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j(i) \leqslant \beta_k(i) M_k(n),$$

$$k = 1, 2, \ldots, p, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$0 \leqslant \lambda_k^j, \quad k = 1, 2, \ldots, q, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

contraintes sur les produits de référence choisis pour l'optimisation :

$$\gamma_k(i) \sum_{j=1}^{p} \mu_k^j N_j(n) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \mu_k^j N_j(i) \leqslant \delta_k(i) \sum_{j=1}^{p} \mu_k^j N_j(n),$$

$$k = 1, 2, \ldots, r, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\rho_k \mu \leqslant \sum_{j=1}^{p} \mu_k^j N_j(n) \leqslant \sigma_k \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

contraintes de coexistence sur les bacs :

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Remarque : On peut évidemment mettre ce problème dans le cadre de la fabrication multi-périodes.

Résultats numériques : Ces critères ont été utilisés avec succès, pour l'optimisation de la fabrication de mélanges de produits pétroliers, y compris dans le cas de la coexistence multi-période [9, 10]. Les temps de calcul (utilisation de la bibliothèque NAG, sur un micro-Vax) sont du même ordre de grandeur que ceux nécessités pour la faisabilité : une dizaine de secondes pour 10 produits de bases, cinq espèces et cinq mélanges.

4. COEXISTENCE DANS L'ESPACE DES ESPÈCES

Nous avons vu au paragraphe 2.2. comment la faisabilité d'un mélange s'interprète comme l'appartenance à un convexe particulier, le convexe de mélanges. Nous allons montrer que cette propriété peut se généraliser à la faisabilité de plusieurs mélanges
$\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ et $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ désignent deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$.

4.1. Coexistence et inclusion des zonotopes

PROPRIÉTÉ : *Si la famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$, alors le zonotope $Z\{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ est inclus dans le zonotope $Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$.*

Démonstration : Supposons qu'il existe λ_k^j, ($j = 1, 2, \ldots, p$ et $k = 1, 2, \ldots, q$) tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j\,, \quad k = 1, 2, \ldots, q\,,$$

$$0 \leqslant \lambda_k^j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q\,,$$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant 1\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, p\,.$$

Un élément de $Z\{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ s'écrit :

$$M = \sum_{k=1}^{q} \mu^k M_k\,,$$

avec :

$$0 \leqslant \mu^k \leqslant 1\,, \quad k = 1, 2, \ldots, q\,.$$

On a donc :

$$M = \sum_{k=1}^{q} \mu^k \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} \mu^k \lambda_k^j \right) N_j\,,$$

avec :

$$0 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{q} \mu^k \lambda_k^j \right) \leqslant \left(\operatorname*{Max}_k \mu^k \right) \left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \right) \leqslant \operatorname*{Max}_k \mu^k \leqslant 1\,, \; j = 1, 2, \ldots, p\,.$$

d'où le résultat. □

Remarque : On peut se rendre compte facilement à l'aide du contre-exemple du paragraphe 2.3.2. que la réciproque de cette propriété est fausse dans le cas général.

4.2. Relation d'ordre de coexistence

PROPRIÉTÉ : *Si les deux familles $\mathscr{F}_N$ et $\mathscr{F}_M$ sont constituées de vecteurs non colinéaires entre eux, la relation : la famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$, est une relation d'ordre.*

Démonstration : La réflexivité de la relation est tout à fait triviale. La transitivité est aisée à montrer en appliquant les définitions de la coexistence. L'antisymétrie se montre en utilisant le résultat du paragraphe 4.1. En effet, si la famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$ et réciproquement on a :

$$Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\} = Z\{M_1, M_2, \ldots, M_q\} .$$

Avec les hypothèses faites sur les vecteurs, on montre sans difficultés que les familles $\mathscr{F}_N$ et $\mathscr{F}_M$ sont identiques. En effet toutes les faces des deux zonotopes sont identiques, en particulier les 1-faces qui sont des translatées des vecteurs des familles $\mathscr{F}_M$ et $\mathscr{F}_N$.

4.3. Coexistence et convexe de q-mélanges

4.3.1. *Définition du convexe de q-mélanges*

Soit une famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$. On décomposera un vecteur X appartenant à $\prod_{k=1}^{q} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{qn}$, sous la forme $X = (X_1, X_2, \ldots, X_q)$, avec :

$$X_i \in \mathbb{R}^n , \quad i = 1, 2, \ldots, q .$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, et tout $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ on pose :

$$\tilde{N}_j^k = (X_1, X_2, \ldots, X_q) \quad \text{avec} \quad X_k = N_j \quad \text{et} \quad X_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k .$$

En fait, on a :

$$\tilde{N}_j^1 = (N_j, 0, \ldots, 0) , \quad \tilde{N}_j^2 = (0, N_j, \ldots, 0), \ldots, \quad \tilde{N}_j^q = (0, 0, \ldots, N_j) .$$

Pour tout $j = 1, 2, \ldots, p$, on définit dans $\mathbb{R}^{qn}$, le convexe K_j par :

$$K_j = \left\{ X = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \tilde{N}_j^k \in \mathbb{R}^{qn} : \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \leqslant 1 \text{ et } \lambda_k \geqslant 0, \ k = 1, 2, \ldots, q \right\} .$$

On appelle *convexe de q-mélanges associé à la famille* $\mathscr{F}_N$, la somme de Minkowski :

$$K = \sum_{j=1}^{p} K_j .$$

Remarque : Les ensembles K_j sont des q-simplexes de $\mathbb{R}^{qn}$ et la définition généralise celle du convexe de mélanges : le convexe de 1-mélanges est le zonotope $Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$.

4.3.2. *Coexistence et appartenance au convexe de q-mélange*

On peut énoncer le théorème :

THÉORÈME : *Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille* $\mathscr{F}_M$ *coexiste dans la famille* $\mathscr{F}_N$, *est que* $(M_1, M_2, \ldots, M_q)$ *appartienne au convexe de q-mélanges associé à la famille* $\mathscr{F}_N$.

Démonstration : C'est une simple lecture de la somme de Minkowski définissant K. Le vecteur $(M_1, M_2, \ldots, M_q)$ appartient à K si et seulement s'il existe des coefficients :

$$\lambda_k^j, \quad k = 1, 2, \ldots, q \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

tels que :
$$(M_1, M_2, \ldots, M_q) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \tilde{N}_j^k ,$$

et :
$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leq 1 , \quad (j = 1, 2, \ldots, p) ,$$

et
$$\lambda_k^j \geq 0 , \quad (j = 1, 2, \ldots, p, \text{ et } k = 1, 2, \ldots, q) .$$

Ce qui se traduit de façon immédiate par :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j , \qquad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leq 1 , \quad (j = 1, 2, \ldots, p) ,$$

et
$$\lambda_k^j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, p, \text{ et } k = 1, 2, \ldots, q) .$$

Ceci est la définition de la coexistence. □

4.3.3. *Corollaire*

Si les familles $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ et $\mathscr{F}_S = (S_1, S_2, \ldots, S_q)$ coexistent dans la famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ alors toute famille :

$$\{\lambda M_1 + (1 - \lambda) S_1, \lambda M_2 + (1 - \lambda) S_2, \ldots, \lambda M_q + (1 - \lambda) S_q\} ,$$
$$\lambda \in [0, 1] ,$$

coexiste dans $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$.

Démonstration : C'est une conséquence directe du théorème 4.3.2. On peut généraliser le résultat, à des familles ne comportant pas le même nombre de vecteurs. □

4.3.4. *Application : coexistence de deux vecteurs de somme donnée*

Il s'agit d'un exemple intéressant pour la compréhension du phénomène de coexistence. On peut énoncer la propriété :

PROPRIÉTÉ : *Pour tout M appartenant à $C = Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$, l'ensemble K_M des vecteurs X tels que $\{X, M - X\}$ coexistent dans $\mathscr{F}_N$, est un convexe à symétrie centrale.*

Démonstration : D'après le théorème 4.3.2, l'ensemble des vecteurs (M_1, M_2) qui coexistent dans la famille $\mathscr{F}_N$ est un convexe K de $\mathbb{R}^{2p}$. L'ensemble $\{(M_1, M_2) \in K : M_1 + M_2 = M\}$ est donc un convexe (non vide). L'ensemble K_M est une projection de cet ensemble, il est donc convexe. On vérifie aisément que K_M est à symétrie centrale par rapport au point $I = \dfrac{M}{2}$. □

PROPRIÉTÉS

i) Si $M = N_1 + N_2 + \cdots + N_p$ $(= N_0)$ *alors* $K_M = Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$.

ii) *Pour les mélanges binaires* $(n = 2)$, *on a :*

$$K_M = C \cap (C - (N_0 - M)).$$

Démonstration : La propriété i) est facile à établir. En ce qui concerne ii), l'étude des mélanges binaires [8] nous permet d'affirmer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X et $M - X$ coexistent dans C est que X appartienne à C et $M - X$ au plus grand convexe résidu (pour l'inclusion) après fabrication de X, qui est dans le cas des mélanges binaires : $C \cap (C - X)$ [8]. Ceci nous donne donc que $M - X$ doit appartenir à C et $M - X$ à $C - X$. En utilisant le fait que C est à symétrie centrale par rapport à $N_0/2$, un calcul rapide montre que $M - X \in C$ est équivalent à dire que $X \in C - (N_0 - M)$.

Exemple : Illustrons la propriété sur l'exemple du paragraphe 2.3.2 et considérons la famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ définie par :

$$N_1 = (1, 0, 0)\,,\ N_2 = (0, 1, 0)\,,\ N_3 = (0, 0, 1)\,,\ N_4 = (1, 1, 1)\,.$$

Avec $M = (1, 1, 2)$, cherchons le convexe K_M. Si $\{M_1, M_2\}$ coexistent dans $\mathscr{F}_N$, on a :

$$\begin{aligned} M_1 &= \lambda_1^1 N_1 + \lambda_1^2 N_2 + \lambda_1^3 N_3 + \lambda_1^4 N_4 \\ &= (\lambda_1^1 + \lambda_1^4, \lambda_1^2 + \lambda_1^4, \lambda_1^3 + \lambda_1^4)\,, \end{aligned}$$

et :
$$M_2 = \lambda_2^1 N_1 + \lambda_2^2 N_2 + \lambda_2^3 N_3 + \lambda_2^4 N_4$$
$$= (\lambda_2^1 + \lambda_2^4,\ \lambda_2^2 + \lambda_2^4,\ \lambda_2^3 + \lambda_2^4)\,.$$

Les conditions :

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^4 + \lambda_2^1 + \lambda_2^4 = 1\,, \tag{1}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_1^4 + \lambda_2^2 + \lambda_2^4 = 1\,, \tag{2}$$
$$\lambda_1^3 + \lambda_1^4 + \lambda_2^3 + \lambda_2^4 = 2\,, \tag{3}$$

traduisent le fait que $M_1 + M_2 = M$, et les inégalités :

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^1 \leqslant 1\,, \tag{4}$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \leqslant 1\,, \tag{5}$$
$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 \leqslant 1\,, \tag{6}$$
$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 \leqslant 1\,, \tag{7}$$

expriment les contraintes de coexistence. On a évidemment :

$$0 \leqslant \lambda_k^j\,, \qquad j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{et} \quad k = 1, 2\,. \tag{8}$$

On déduit de (3), (6) et (7) que :

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 = 1\,,$$

puis en utilisant (1), (2) et (8) :

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0\,,$$

et finalement :

$$M_1 = \lambda_1^3(0, 0, 1) + \lambda_1^4(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad M_2 = \lambda_2^3(0, 0, 1) + \lambda_2^4(1, 1, 1)\,,$$

avec :

$$0 \leqslant \lambda_1^3\,,\ 0 \leqslant \lambda_2^3\,,\ 0 \leqslant \lambda_1^4\,,\ 0 \leqslant \lambda_2^4 \text{ et } \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 = 1\,.$$

Le convexe K_M est donc le parallélogramme construit à partir des vecteurs $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$. $M_1 = (1, 0, 1)$ et $M_2 = (0, 1, 1)$ ne sont pas dans ce parallélogramme ce qui illustre la non-coexistence de M_1 et M_2.

4.4. Cas particulier de deux espèces

Nous nous intéressons ici, au cas des mélanges binaires où le nombre d'espèces est égal à deux. Nous allons montrer que la structure particulière du convexe de 2-mélanges, permet d'énoncer des propriétés qui ont été

démontrées par ailleurs avec des méthodes complètement différentes [8]. Avec des difficultés techniques, la démonstration pourrait sans doute se généraliser au convexe de q-mélanges, permettant alors de retrouver le résultat concernant q mélanges figurant dans [8].

4.4.1. *Notations*

On considère une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}_+^2$:

$$\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\} ,$$

les vecteurs N_j n'étant pas deux à deux colinéaires. Avec les notations du paragraphe 4.3.1, on peut écrire :

$$K_j = \left\{\lambda_1^j(N_j, 0) + \lambda_2^j(0, N_j),\ 0 \leq \lambda_1^j,\ 0 \leq \lambda_2^j \text{ et } \lambda_1^j + \lambda_2^j \leq 1\right\} ,$$

$$j = 1, 2, \ldots, p .$$

Nous allons chercher les 3-faces (désignées souvent en abrégé dans la suite : faces) du convexe de 2-mélanges de $\mathbb{R}^4$:

$$K = \sum_{j=1}^{p} K_j .$$

Notons par $X = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$, un vecteur normal à une 3-face de ce convexe. L'ensemble des solutions du problème :

$$\operatorname*{Max}_{Y \in K} \langle X, Y\rangle ,$$

doit être de dimension 3. Nous pouvons écrire :

$$\operatorname*{Max}_{Y \in K} \langle X, Y\rangle = \sum_{j=1}^{p} \left(\operatorname*{Max}_{\substack{0 \leq \lambda_1^j,\ 0 \leq \lambda_2^j \\ \lambda_1^j + \lambda_2^j \leq 1}} (\lambda_1^j \langle u, N_j\rangle + \lambda_2^j \langle v, N_j\rangle) \right) \quad (\mathscr{P}_1) .$$

Nous allons chercher les conditions sur $\langle u, N_j\rangle$ et (v, N_j) pour que le problème ci-dessus admette des solutions dégénérées. Discutons suivant les valeurs de α et β, les solutions du programme linéaire :

$$\operatorname*{Max}_{\substack{0 \leq \lambda_1,\ 0 \leq \lambda_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1}} (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) .$$

Quatre cas peuvent donner lieu à des ensembles de solutions en (λ_1, λ_2) de dimension supérieure à un :

$C1$: $\alpha = 0$ et $\beta = 0$: l'ensemble des solutions est de dimension 2 .
$C2$: $\alpha = 0$ et $\beta < 0$: l'ensemble des solutions est de dimension 1 .
$C3$: $\alpha < 0$ et $\beta = 0$: l'ensemble des solutions est de dimension 1 .
$C4$: $\alpha = \beta > 0$: l'ensemble des solutions est de dimension 1 .

Essayons maintenant de combiner ces différents cas pour obtenir un ensemble de solutions de dimension 3 pour le problème $(\mathscr{P}_1)$. Nous signifierons par $C1_j$ lorsque le cas $C1$ se produit pour le problème de maximisation numéro j, dans la sommation du problème $(\mathscr{P}_1)$.

4.4.2. *Théorème*

Soit :

$$\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\} ,$$

une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^2_+$ non deux à deux colinéaires, une condition nécessaire pour qu'un vecteur non nul $X = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$ soit normal à une 3-face du convexe de 2-mélanges associé à $\mathscr{F}_N$, est qu'il existe $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ et $N_j^\perp$ un vecteur non nul orthogonal à N_j, tel que l'on ait une des trois conditions suivantes :

$$(u, v) = (N_j^\perp, 0) , \tag{1}$$

$$(u, v) = (O, N_j^\perp) , \tag{2}$$

$$(u, v) = (N_j^\perp, N_j^\perp) . \tag{3}$$

Démonstration : Nous décomposons notre étude en plusieurs cas.

i) *Cas où le vecteur* (u, v) *vérifie un cas* $C1_j$: Nous avons donc $\langle u, N_j\rangle = \langle v, N_j\rangle = 0$, et il faut une condition supplémentaire pour avoir la dimension désirée. Le vecteur (u, v) ne peut évidemment pas vérifier une condition $C1_k$ avec $k \neq j$, car ceci entraînerait la nullité de u et v. Il nous faut donc réaliser une autre condition $C2$, $C3$ ou $C4$. Les cas $C2_j$, $C3_j$ et $C4_j$ ne peuvent pas se produire et nous avons donc un des cas suivants :

— si (u, v) vérifie une condition $C2_k$ avec $k \neq j$, nous avons donc :

$$\langle u, N_j\rangle = \langle v, N_j\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle u, N_k\rangle = 0 , \quad \langle v, N_k\rangle < 0 .$$

Nous avons donc :

$$\langle u, N_j\rangle = \langle u, N_k\rangle = 0 ,$$

et :

$$v = N_j^\perp .$$

Le vecteur X est donc de la forme :

$$X = (u, v) = (O, N_j^{\perp}).$$

— si (u, v) vérifie une condition $C3_k$ avec $k \neq j$, nous avons un résultat analogue :

$$X = (u, v) = (N_j^{\perp}, O),$$

— si (u, v) vérifie une condition $C4_k$ avec $k \neq j$, nous avons donc :

$$\langle u, N_j \rangle = \langle v, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle u, N_k \rangle = \langle v, N_k \rangle > 0$$

ceci entraîne que :

$$\langle u - v, N_j \rangle = \langle u - v, N_k \rangle = 0,$$

et donc :

$$u = v.$$

Avec l'autre condition ceci nous donne donc :

$$X = (u, v) = (N_j^{\perp}, N_j^{\perp}).$$

ii) *Cas où le vecteur* (u, v) *ne vérifie pas de cas* $C1_j$:

— si le vecteur (u, v) satisfait les cas $C2_j$, $C3_k$ et $C4_l$ avec $j \neq k$, $j \neq l$ et $k \neq l$, nous avons :

$$\langle u, N_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_j \rangle < 0,$$

$$\langle u, N_k \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle v, N_k \rangle = 0,$$

et :

$$\langle u, N_l \rangle = \langle v, N_l \rangle > 0.$$

Figure 1.

Supposons, conformément à la figure 1, que le vecteur N_j fait avec l'axe des abscisses un angle plus petit que celui correspondant au vecteur N_k. Les

vecteurs u et v sont portés par les demi-droites $O\alpha$ et $O\beta$. Il est alors clair qu'un vecteur N vérifiant :

$$\langle u, N\rangle = \langle v, N\rangle > 0 ,$$

appartient au cône $\mathscr{C}$ d'ouverture $< \pi$, délimité par $O\beta$ et $O\alpha$, et ne peut appartenir à l'octant positif. N ne peut donc pas être un vecteur N_l.

— Si le vecteur (u, v) satisfait deux cas $C2_j$, $C2_k$ avec $j \neq k$, nous avons alors :

$$\langle u, N_j\rangle = 0 \text{ et } \langle v, N_j\rangle < 0 \text{ et } \langle u, N_k\rangle = 0 \text{ et } \langle v, N_k\rangle < 0 .$$

Le vecteur u et alors nul et aucune condition $C3$ ou $C4$ ne peut alors être vérifiée. D'autres conditions de type $C2$ peuvent alors être vérifiées mais ceci ne permet pas d'avoir la dimension souhaitée pour l'ensemble des solutions du problème $(\mathscr{P}_1)$,

— nous avons une même conclusion si (u, v) satisfait deux cas $C3_j$, $C3_k$ avec $j \neq k$,

— si le vecteur (u, v) satisfait deux cas $C4_j$, $C4_k$ avec $j \neq k$, nous avons alors :

$$\langle u, N_j\rangle = \langle v, N_j\rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle u, N_k\rangle = \langle v, N_k\rangle > 0 .$$

Ceci entraîne donc que :

$$\langle u - v, N_j\rangle = \langle u - v, N_k\rangle = 0 ,$$

et donc :

$$u = v .$$

Ajouter une condition de type $C4$ ne permet pas d'avoir la dimension souhaitée ; il nous faut donc une condition $C2_l$ ou $C3_l$ qui nous fournit alors un vecteur (u, v) de la forme incompatible :

$$(u, v) = (N_l^\perp, N_l^\perp) .$$

L'énumération des cas termine la démonstration. □

4.4.3 *Corollaire*

Étant donnée la famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, ..., N_p\}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}_+^2$, la famille $\{M_1, M_2\}$ **coexiste** dans la famille $\mathscr{F}_N$ si et seulement si les vecteurs M_1, M_2 et $M_1 + M_2$ sont faisables dans la famille $\mathscr{F}_N$.

Démonstration : C'est une application directe du théorème 4.4.2. Les hyperplans de normales $(N_j^\perp, 0)$ correspondent aux conditions de faisabilité de M_1, les hyperplans de normales $(O, N_j^\perp)$ correspondent aux conditions de faisabilité de M_2 et les hyperplans de normales $(N_l^\perp, N_l^\perp)$ correspondent aux

conditions de faisabilité de $M_1 + M_2$. La démonstration est simple. Examinons par exemple le cas où $(u, v) = (N_1^\perp, N_1^\perp)$. Nous devons avoir :

$$\langle (u, v), (M_1, M_2) \rangle = \langle N_1^\perp, (M_1 + M_2) \rangle \leq \operatorname*{Max}_{Y \in K} \langle (u, v), Y \rangle ,$$

qui s'exprime par :

$$\langle N_1^\perp, (M_1 + M_2) \rangle \leq \sum_{j=1}^{p} \left(\operatorname*{Max}_{\substack{0 \leq \lambda_1^j, 0 \leq \lambda_2^j \\ \lambda_1^j + \lambda_2^j \leq 1}} (\lambda_1^j \langle N_1^\perp, N_j \rangle + \lambda_2^j \langle N_1^\perp, N_j \rangle) \right) ,$$

ou : $$\langle N_1^\perp, (M_1 + M_2) \rangle \leq \sum_{j=1}^{p} \left(\operatorname*{Max}_{0 \leq \mu_1^j \leq 1} (\mu_1^j \langle N_1^\perp, N_j \rangle) \right) ,$$

et finalement :

$$\langle N_1^\perp, (M_1 + M_2) \rangle \leq \operatorname*{Max}_{0 \leq \mu^j \leq 1} \left(\left\langle N_1^\perp, \sum_{j=1}^{p} \mu^j N_j \right\rangle \right) = \operatorname*{Max}_{M \in C} (\langle N_1^\perp, M \rangle) ,$$

C étant le zonotope $Z\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. On retrouve donc une des conditions de faisabilité de $M_1 + M_2$, et on voit aisément comment obtenir les autres.

A noter que l'hypothèse de non-colinéarité des vecteurs N_j pourrait être supprimée. □

5. COEXISTENCE DANS L'ESPACE DES RÉALISATIONS

La définition de la coexistence d'une famille de q vecteurs dans une famille de p vecteurs, exprimée dans le paragraphe 2.3.1, consistait à dupliquer q fois l'espace des réalisations $\mathbb{R}^p$. Nous allons voir comment aborder le problème en restant dans l'espace $\mathbb{R}^p$, une somme de Minkowski jouant le rôle de la duplication de l'espace. Cette approche permettra, en outre, d'élaborer des solutions géométriques dans l'espace des réalisations, particulièrement dans le cas où la dimension de cet espace peut être réduite à une valeur faible.

5.1. Formulation dans l'espace des réalisations

5.1.1. *Notations*

On rappelle que la famille de vecteurs $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ de $\mathbb{R}_+^n$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ de $\mathbb{R}_+^n$, s'il existe q p-uplets :

$$\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^p) , \qquad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j , \qquad k = 1, 2, \ldots, q , \tag{1}$$

$$0 \leqslant \lambda_k^j (\leqslant 1) , \qquad j = 1, 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad k = 1, 2, \ldots, q , \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant 1 , \qquad j = 1, 2, \ldots, p . \tag{3}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, on définit le polyèdre P_k de $\mathbb{R}^p$ par :

$$P_k = \left\{ \lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p) \in \mathbb{R}^p : \sum_{j=1}^{p} \lambda^j N_j = M_k, 0 \leqslant \lambda^j \leqslant 1, j = 1, 2, \ldots, p \right\} ,$$

et on désigne l'hypercube de $\mathbb{R}^p$ par :

$$\text{Cube}_p = \{ \lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p) \in \mathbb{R}^p : 0 \leqslant \lambda^j \leqslant 1, j = 1, 2, \ldots, p \} .$$

5.1.2. *Propriété*

La famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$ si et seulement si :

$$(P_1 + P_2 + \cdots + P_q) \cap \text{Cube}_p \neq \varnothing .$$

La démonstration résulte directement de la définition de la coexistence. □

5.2. Schéma général pour une solution géométrique du problème de coexistence

5.2.1. *Introduction et hypothèses de travail*

A partir de la propriété 5.1.2, il serait possible de formuler le problème de la coexistence comme celui de la minimisation de la distance entre le convexe Cube_p et le convexe $P_1 + P_2 + \cdots + P_q$:

$$\operatorname*{Min}_{\substack{\lambda \in P_1 + P_2 + \quad + P_q \\ \Lambda \in \text{Cube}_p}} d(\lambda, \Lambda) ,$$

et en choisissant une distance issue d'une norme :

$$d(\lambda, \Lambda) = \| \lambda - \Lambda \| ,$$

le problème devient :

$$\operatorname*{Min}_{z \in P_1 + P_2 + \quad + P_q - \text{Cube}_p} \| z \| .$$

Si la norme choisie est strictement convexe, il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonction strictement convexe sur un convexe qui admet un minimum local unique qui est minimum global [3]. On pourrait donc traiter ce problème comme un problème d'optimisation, adapté à des polyèdres définis par des sommes de Minkowski. De telles méthodes, ne donnent pas, a priori, une description de l'ensemble des solutions. Le point de vue adopté par la suite est purement géométrique et suppose une description effective des polyèdres. Cette méthode ne présente pas du point de vue algorithmique un caractère encore très général, mais elle aide à la compréhension des problèmes, d'une part, et donne des algorithmes très performants dans des cas particuliers, d'autre part. On remarquera également, que cette méthode donne une certaine description de l'ensemble des solutions.

Hypothèses de travail : Nous supposerons donc posséder un mode de représentation des polyèdres et savoir effectuer par rapport à ce mode de représentation, les opérations de symétrie par rapport à l'origine, de somme de Minkowski, de translation et d'intersection. Dans les paragraphes 5.4.4 et 5.4.5, seront développés des algorithmes dans les cas où ces polyèdres sont non vides et de dimension 1 ou 2 (segments, polygones convexes).

5.2.2 *Détermination de la coexistence*

Un schéma d'algorithme, directement issu de la propriété 5.1.2, est de calculer la somme $P_1 + P_2 + \cdots + P_q$, puis son intersection avec Cube_p. On peut calculer cette somme par récurrence de la façon suivante :

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = (P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1}) + P_k, \quad k = 2, \ldots, p$$

mais il peut être plus efficace de calculer cette somme de façon équilibrée, en effectuant la somme :

$$(P_1 + P_2 + \cdots + P_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}) + (P_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1} + P_{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 2} + \cdots + P_q),$$

et en appliquant récursivement le procédé. Le nombre d'étape est alors de l'ordre de $\log_2 q$, mais a priori la complexité d'une étape est plus grande.

5.2.3 *Détermination d'une décomposition*

Si on connaît un point A de :

$$(P_1 + P_2 + \cdots + P_q) \cap \mathrm{Cube}_p,$$

le problème est alors de l'écrire sous la forme :

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_q ,$$
$$\lambda_k \in P_k , \quad k = 1, 2, \ldots, q .$$

Pour résoudre ce problème nous appliquons aux constructions récurrente ou récursive du paragraphe 5.2.2, la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ : *Soient C_1 et C_2 deux polyèdres convexes de $\mathbb{R}^p$. Λ appartenant à $C_1 + C_2$, s'écrit $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ avec $\lambda_1 \in C_1$ et $\lambda_2 \in C_2$ si et seulement si $\lambda_2 \in (\{\Lambda\} - C_1) \cap C_2$.*

La démonstration est directe. Cette propriété ramène le calcul de λ_1 et λ_2 à celui de la détermination du symétrique et du translaté d'un polyèdre convexe, puis d'un point de l'intersection de deux polyèdres convexes de $\mathbb{R}^p$. □

5.3. Réduction de la dimension de l'espace des réalisations

L'idée de la réduction de la dimension de l'espace des quantités est empruntée à la notion de *zonotope associé* [13, 16], mais nous ne faisons cependant pas appel aux propriétés spécifiques des zonotopes associés. Pour la simplicité des notations, nous commençons par exposer le cas de deux vecteurs, la généralisation étant immédiate.

5.3.1. *Notations et hypothèses supplémentaires*

Avec les notations du paragraphe 5.1.1, on considère le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^p$:

$$H = \left\{\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^p) \in \mathbb{R}^p : \alpha^1 N_1 + \alpha^2 N_2 + \cdots + \alpha^p N_p = 0\right\} .$$

On supposera, en général, que $p > n$ et que le rang du système de vecteurs $\{N_i\}_{i = 1, 2, \ldots, p}$ est égal à n. Le sous-espace H est alors de dimension $p - n$.

A tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, on associe le polyèdre P_λ de H :

$$P_\lambda = \{\alpha \in H : -\lambda^j \leqslant \alpha^j \leqslant 1 - \lambda^j, j = 1, 2, \ldots, p\} .$$

5.3.2. *Propriété*

Si M_1 et M_2 sont écrits sous la forme :

$$M_1 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_1^j N_j \quad \text{et} \quad M_2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_2^j N_j ,$$

avec :

$$\lambda_1 = (\lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^p) \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (\lambda_2^1, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_2^p) \in \mathbb{R}^p ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2\}$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ est que :

$$(P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}) \cap P_{\lambda_1 + \lambda_2} \neq \varnothing .$$

Note : Réalisations étendues. Il n'est pas nécessaire que l'on ait au départ :

$$0 \leqslant \lambda_1^j \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda_2^j \leqslant 1 , \quad j = 1, 2, \ldots, p ,$$

et on parlera de *réalisations étendues* des mélanges.

Démonstration : La coexistence de la famille $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2\}$ demande d'abord que M_1 et M_2 soient faisables séparément. Supposons donc que l'on ait écrit :

$$M_1 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_1^j N_j \quad \text{et} \quad M_2 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_2^j N_j .$$

Les différentes façons de réaliser M_1 peuvent s'écrire alors :

$$M_1 = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_1^j + \alpha_1^j) N_j ,$$

avec : $\alpha_1 = (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^p) \in H$,

et : $0 \leqslant \lambda_1^j + \alpha_1^j \leqslant 1 , \quad j = 1, 2, \ldots, p .$

Ceci s'exprime par : $\alpha_1 \in P_{\lambda_1}$.

De même, les différentes façons de réaliser M_2 peuvent s'écrire :

$$M_2 = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_2^j + \alpha_2^j) N_j ,$$

avec : $\alpha_2 = (\alpha_2^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_2^p) \in H$,

et : $0 \leqslant \lambda_2^j + \alpha_2^j \leqslant 1 , \quad j = 1, 2, \ldots, p$

ce qui est équivalent à : $\alpha_2 \in P_{\lambda_2}$.

La contrainte de coexistence de $\{M_1, M_2\}$ s'exprime par :

$$0 \leqslant \lambda_1^j + \alpha_1^j + \lambda_2^j + \alpha_2^j \leqslant 1 , \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

ou : $$-\lambda_1^j - \lambda_2^j \leqslant \alpha_1^j + \alpha_2^j \leqslant 1 - \lambda_1^j - \lambda_2^j , \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

ce qui s'exprime par : $\alpha_1 + \alpha_2 \in P_{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Le problème de la coexistence de $\{M_1, M_2\}$ revient alors à chercher s'il existe un point d'intersection entre $P_{\lambda_1 + \lambda_2}$ et la somme de Minkowski $P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$, ce qui démontre la propriété. □

5.3.3. *Généralisation à la coexistence de q vecteurs*

Considérons une famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, ..., N_p\}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$ et une famille $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, ..., M_q\}$ de q vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$, tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j , \quad k = 1, 2, ..., q ,$$

et posons : $\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, ..., \lambda_k^p) \in \mathbb{R}^p , \quad k = 1, 2, ..., q$.

On peut énoncer la propriété :

PROPRIÉTÉ : *Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$ est que :*

$$(P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \cdots + P_{\lambda_q}) \cap P_{\lambda_1 + \lambda_2 + \quad + \lambda_q} \neq \varnothing .$$

La démonstration est identique à celle élaborée pour deux vecteurs.

5.4. Formulation réduite du problème de coexistence de q vecteurs

5.4.1. *Notations*

Soit r la dimension de H et une base $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ de H. On peut écrire un vecteur α de H sous la forme :

$$\alpha = \tilde{\alpha}^1 a_1 + \tilde{\alpha}^2 a_2 + \cdots + \tilde{\alpha}^r a_r .$$

Si les vecteurs a_i, $i = 1, 2, ..., r$, ont pour composantes :

$$a_i = (a_i^j)_{j = 1, 2, \quad , p} ,$$

une contrainte de la forme $\nu^j \leqslant \alpha^j \leqslant \rho^j$, se met alors sous la forme :

$$\nu^j \leqslant \tilde{\alpha}^1 a_1^j + \tilde{\alpha}^2 a_2^j + \cdots + \tilde{\alpha}^r a_r^j \leqslant \rho^j .$$

En posant :

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}^1, \tilde{\alpha}^2, ..., \tilde{\alpha}^r) ,$$
$$u_j = (a_1^j, a_2^j, ..., a_r^j) , \qquad j = 1, 2, ..., p ,$$

et $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire usuel, on peut donc écrire cette contrainte comme :

$$\nu^j \leqslant \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leqslant \rho^j .$$

Pour $\lambda = (\lambda^j)_{j=1,2,\ldots,p}$ appartenant à $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$Q_\lambda = \{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^r : -\lambda^j \leqslant \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leqslant 1 - \lambda^j , \quad j = 1, 2, \ldots, p\} .$$

On considère toujours une famille $\mathscr{F}_N = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$ et une famille $\mathscr{F}_M = \{M_1, M_2, \ldots, M_q\}$ de q vecteurs de $\mathbb{R}^n_+$, tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda^j_k N_j , \quad k = 1, 2, \ldots, q .$$

On peut alors énoncer la propriété :

5.4.2. *Propriété*

Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathscr{F}_M$ coexiste dans la famille $\mathscr{F}_N$ est que :

$$(Q_{\lambda_1} + Q_{\lambda_2} + \cdots + Q_{\lambda_p}) \cap Q_{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p)} \neq \varnothing .$$

La démonstration en est immédiate. □

5.4.3. *Exemple*

Reprenons l'exemple :

$$N_1 = (1, 0, 0), \quad N_2 = (0, 1, 0), \quad N_3 = (0, 0, 1), \quad N_4 = (1, 1, 1),$$
$$M_1 = (1, 0, 1) \quad \text{et} \quad M_2 = (0, 1, 1).$$

L'exemple correspond au cas $r = p - n = 1$, l'équation du sous-espace H étant :

$$\begin{aligned} a^1 + a^4 &= 0 \\ a^2 + a^4 &= 0 \\ a^3 + a^4 &= 0 . \end{aligned}$$

H, engendré par le vecteur $(-1, -1, -1, 1)$, sera identifié à $\mathbb{R}$ dans la suite.

De l'égalité :

$$M_1 = N_1 + N_3$$

on tire :

$$Q_{\lambda_1} = \{\tilde{\alpha} : -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0,\ 0 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 1,\ -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant \tilde{\alpha} \leqslant 1\} ,$$

et donc :

$$Q_{\lambda_1} = \{0\} .$$

De même, à partir de l'égalité :

$$M_2 = N_2 + N_3 ,$$

on tire :

$$Q_{\lambda_2} = \{\tilde{\alpha} : 0 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 1,\ -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0,\ -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant \tilde{\alpha} \leqslant 1\} ,$$

et on déduit :

$$Q_{\lambda_2} = \{0\} .$$

Or, $Q_{\lambda_1+\lambda_2}$ est défini par :

$$Q_{\lambda_1+\lambda_2} =$$

$$\{\tilde{\alpha} : -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0,\ -1 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant 0,\ -2 \leqslant -\tilde{\alpha} \leqslant -1 \text{ et } 0 \leqslant \tilde{\alpha} \leqslant 1\} ,$$

ce qui donne :

$$Q_{\lambda_1+\lambda_2} = \{1\}$$

et il est alors clair que :

$$(Q_{\lambda_1} + Q_{\lambda_2}) \cap Q_{\lambda_1+\lambda_2} = \varnothing .$$

5.4.4. *Étude du cas* $r = p - n = 1$

Principe : C'est le cas illustré par l'exemple précédent. $\tilde{\alpha}$ est réduit à un scalaire non nul noté $\tilde{\alpha}$. L'ensemble Q_λ supposé non vide est :

$$Q_\lambda = \left\{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} : -\lambda^j \leqslant \tilde{\alpha} u_j \leqslant 1 - \lambda^j ,\quad j = 1, 2, \ldots, p\right\} ,$$

les u_j ne pouvant être tous simultanément nuls. Les notations étant celles du paragraphe 5.4.1, on a :

$$Q_{\lambda_k} = \left\{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} : -\lambda_k^j \leqslant \tilde{\alpha} u_j \leqslant 1 - \lambda_k^j ,\ j = 1, 2, \ldots, p\right\} ,\quad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

et :

$$Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} = \left\{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R} : -\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant \tilde{\alpha} u_j \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j ,\quad j = 1, 2, \ldots, p\right\} .$$

Si on pose :

$$Q_{\lambda_k} = [m_k, M_k] ,\qquad k = 1, 2, \ldots, q ,$$

on a :
$$\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k} = \left[\sum_{k=1}^{q} m_k, \sum_{k=1}^{q} M_k\right].$$

Si :
$$Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} = [m, M],$$

la condition nécessaire et suffisante de coexistence devient :

$$m \leqslant \sum_{k=1}^{q} M_k \quad \text{et} \quad M \geqslant \sum_{k=1}^{q} m_k .$$

Principe de l'algorithme et coût des calculs : On suppose, par exemple, les vecteurs $N_1, N_2, \ldots, N_{p-1}$, indépendants (et N_p non nul).

Calcul d'un vecteur de H : Cela demande la résolution d'un système linéaire à $p-1$ variables, la matrice du système :

$$[N_1, N_2, \ldots, N_{p-1}],$$

appartenant à $\mathscr{M}_{p-1,p-1}(\mathbb{R})$. Le coût T_H de ce calcul vérifie donc :

$$T_H \sim k_H p^3 .$$

Calcul d'un ensemble de réalisations « étendues » des mélanges M_k (voir note dans 5.3.2) : On peut procéder en calculant des vecteurs λ_k notés $(\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^p)$, $k = 1, 2, \ldots, q$ tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j N_j, \ \lambda_k^p = 0 .$$

Ce calcul demande la résolution de q systèmes linéaires dont la matrice est la même que celle ayant servi au calcul d'un vecteur de H. Si cette matrice a été factorisée, le coût est alors réduit à :

$$T_M \sim k_M qp^2 .$$

Calcul des $\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k}$: Chaque expression de Q_{λ_k} sous forme d'un intervalle, demande les calculs d'un maximum et d'un minimum de p nombres. Puis le calcul de la somme des intervalles demande de l'ordre de q opérations. Donc :

$$T_Q \sim k_Q qp .$$

De plus, nous verrons un peu plus loin, qu'il est nécessaire pour calculer une réalisation des mélanges, de déterminer les ensembles :

$$\sum_{k=1}^{i} Q_{\lambda_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, q .$$

En fait, le coût de ce calcul ne modifie pas l'évaluation de T_Q donnée plus haut.

Calcul de $Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k}$: Une fois réalisé le calcul des mélanges M_k, le coût de cette détermination est :

$$T_{Q'} \sim k_{Q'} pq .$$

Coût global de détermination de la coexistence : La comparaison des intervalles étant directe, le coût total est donc de l'ordre de :

$$T \sim k_H p^3 + k_M qp^2 + k_Q qp + k_{Q'} pq .$$

Coût du calcul de la décomposition d'un ensemble de mélanges qui coexistent : Plaçons-nous dans le cas où :

$$\left(\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k} \right) \cap Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} \neq \varnothing ,$$

et désignons par $\tilde{\alpha}$ un point de cette intersection. On applique maintenant le principe de récurrence énoncé au paragraphe 5.2.2 et la propriété 5.2.3. Il s'agit donc, connaissant $\tilde{\alpha}$ appartenant à $\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k}$, de déterminer $\tilde{\alpha}_k \in Q_{\lambda_k}$, $(k = 1, 2, \ldots, q)$, tels que :

$$\tilde{\alpha} = \sum_{k=1}^{q} \tilde{\alpha}_k .$$

On initialise, par exemple, le procédé en écrivant :

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}_q = \tilde{\beta}_{q-1} + \tilde{\alpha}_q ,$$

avec :

$$\tilde{\beta}_{q-1} \in \sum_{k=1}^{q-1} Q_{\lambda_k} ,$$

et :

$$\tilde{\alpha}_q \in Q_{\lambda_q} .$$

En utilisant la propriété 5.2.3, cette détermination se fait immédiatement si

on connaît les deux intervalles $\sum_{k=1}^{q-1} Q_{\lambda_k}$ et Q_{λ_q}. On itère ensuite le procédé, avec un coût proportionnel à q. Le calcul explicite de la décomposition d'un mélange étant proportionnel à p, on peut donc affirmer que le coût du calcul effectif d'une solution demande, en plus du coût T de détermination de la coexistence :

$$T_{\text{sol}} \sim k_{\text{sol}}\, pq\,.$$

Remarque : A p fixé, il est à remarquer que T et T_{sol} croissent comme q le nombre de mélanges, ce qui n'est pas du tout le cas des expérimentations faites sur le cas général où l'on avait constaté une croissance exponentielle du temps d'exécution (paragraphe 3.1.2, remarque iii).

5.4.5. *Étude du cas* $r = p - n = 2$

L'étude du cas $r = p - n = 1$, s'étend de la façon suivante au cas $p - n = 2$.

Principe : La condition de coexistence, donnée par la propriété 5.4.2, est la suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k}\right) \cap Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} \neq \varnothing\,.$$

et tous les ensembles étant supposés non vides on a :

$$Q_{\lambda_k} = \left\{\tilde{\alpha} : -\lambda_k^j \leqslant \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leqslant 1 - \lambda_k^j,\ j = 1, 2, \ldots, p\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, q\,,$$

et :

$$Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} = \left\{\tilde{\alpha} : -\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leqslant \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j,\quad j = 1, 2, \ldots, p\right\}.$$

On notera les points importants suivants :

i) tous les polyèdres qui interviennent sont des polygones convexes de $\mathbb{R}^2$ qui ont des côtés définis par les normales u_j ;

ii) dans $\mathbb{R}^2$, le polygone convexe somme de Minkowski de deux polygones du type précédent, ne possède aucune autre direction de face que celles de normales u_j ;

iii) les calculs nécessiteront parfois de mettre un polygone donné par intersection de p demi-plans, sous forme de la suite ordonnée de ses sommets, dans le sens trigonométrique par exemple. En utilisant des méthodes empruntées à la *Géométrie algorithmique* [4, 15], cette opération est d'un coût linéaire en p, si les vecteurs u_j sont préalablement triés suivant

leurs angles polaires par rapport à une direction donnée (l'axe des abscisses par exemple). Cette phase de tri sera appelée dans la suite « préconditionnement ».

Remarque : C'est le point ii) qui ne se généralise pas au cas $p - n > 2$ et qui est l'origine principale des difficultés pour traiter ces cas plus complexes.

Afin de calculer leur somme, on réécrit chaque polygone convexe :

$$Q_{\lambda_k} = \{\tilde{\alpha} : -\lambda_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq 1 - \lambda_k^j, \quad j = 1, 2, \ldots, p\},$$

sous la forme :

$$\{\tilde{\alpha} : m_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq M_k^j, \quad j = 1, 2, \ldots, p\},$$

où toutes les contraintes sont *actives*. Si la phase de préconditionnement des vecteurs u_j a été effectuée, cette écriture peut se réaliser en temps linéaire en p [4, 15]. Aucune direction nouvelle de face n'étant créée par la somme de Minkowski, la somme de tous les polygones précédents peut alors s'écrire :

$$\left\{\tilde{\alpha} : \sum_{k=1}^{q} m_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq \sum_{k=1}^{q} M_k^j, \quad j = 1, 2, \ldots, p\right\}.$$

Il reste alors à déterminer l'intersection de ce polygone avec le polygone :

$$\left\{\tilde{\alpha} : -\sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq 1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j, \quad j = 1, 2, \ldots, p\right\}.$$

Coût des calculs : Supposons que les vecteurs $N_1, N_2, \ldots, N_{p-2}$, sont indépendants et les vecteurs N_{p-1} et N_{p-2} non colinéaires.

Calcul de deux vecteurs de H : Cela demande la résolution de deux systèmes linéaires à $p - 2$ variables, la matrice du système :

$$[N_1, N_2, \ldots, N_{p-2}],$$

appartenant à $\mathcal{M}_{p-2,\,p-2}(\mathbb{R})$. Le temps T_H nécessaire vérifie donc :

$$T_H \sim k_H p^3.$$

Préconditionnement : Le calcul précédent nous permet d'obtenir les vecteurs u_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, qu'il faut ordonner par angles polaires. Ceci est donc d'un coût de :

$$T_{\text{prec}} \sim k_{\text{prec}}\, p \log p.$$

Calcul d'un ensemble de réalisations « étendues » des mélanges M_k : On peut procéder en calculant des vecteurs $\lambda_k = (\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^p)$, $k = 1, 2, \ldots, q$ tels que :

$$M_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j, N_j, \ \lambda_k^p = \lambda_k^{p-1} = 0 .$$

Ce calcul demande la résolution de q systèmes linéaires dont la matrice est identique à celle utilisée pour le calcul d'une base de H. En supposant cette matrice factorisée, on a :

$$T_M \sim k_M \, qp^2 .$$

Calcul des $\sum_{k=1}^{q} Q_{\lambda_k}$: Mettre chacun des polygones Q_{λ_k}, sous la forme :

$$Q_{\lambda_k} = \left\{ \tilde{\alpha} : m_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq M_k^j , \quad j = 1, 2, \ldots, p \right\} ,$$

où toutes les contraintes sont *actives,* peut se réaliser après avoir mis chaque polygone sous forme d'une suite ordonnée de sommets, puis à l'aide d'une simple exploration séquentielle des contraintes. On calcule ensuite par récurrence, les polygones :

$$\sum_{k=1}^{i} Q_{\lambda_k} = \left\{ \tilde{\alpha} : \sum_{k=1}^{i} m_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq \sum_{k=1}^{i} M_k^j , \quad j = 1, 2, \ldots, p \right\} ,$$

$$i = 2, 3, \ldots, q ,$$

que l'on met sous forme d'une liste ordonnée de sommets. Ce sont des méthodes usuelles en *Géométrie algorithmique* [4, 15] et le coût de cette phase est de l'ordre de :

$$T_Q \sim k_Q \, qp .$$

Calcul de $Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k}$: Une fois fait le calcul des mélanges M_k, la détermination de :

$$Q_{\sum_{k=1}^{q} \lambda_k} = \left\{ \tilde{\alpha} : - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j \leq \langle \tilde{\alpha}, u_j \rangle \leq 1 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k^j , \quad j = 1, 2, \ldots, p \right\} ,$$

sous forme d'une liste ordonnée de sommets, demande :

$$T_{Q'} \sim k_{Q'} \, pq .$$

Coût global de détermination de la coexistence : Il suffit alors de déterminer si deux polygones donnés par la suite ordonnée d'au plus p sommets, s'intersectent ou non [15]. Ceci est d'un coût linéaire en p :

$$T_{\text{int}'} \sim k^1_{\text{int}}\, p\ .$$

Le coût total est donc de l'ordre de :

$$T \sim k_H\, p^3 + k_{\text{prec}}\, p \log p + k_M\, qp^2 + k_Q\, qp + k_{Q'}\, pq + k^1_{\text{int}}\, p\ .$$

Coût du calcul de la décomposition d'un ensemble de mélanges qui coexistent : On reprend le schéma élaboré pour le cas $p - n = 1$. L'algorithme possède donc q étapes de coût global proportionnel à pq dû au calcul d'intersection de polygones convexes à p côtés qui se réalise en temps proportionnel à p [15]. Le calcul explicite de la décomposition d'un mélange est proportionnel à p et on peut donc affirmer que le coût du calcul effectif d'une solution demande en plus de T :

$$T_{\text{sol}} \sim k_{\text{sol}}\, pq\ .$$

Remarque : A p fixé, il est à remarquer que T et T_{sol} croissent comme q le nombre de mélanges, ce qui n'est pas du tout le cas des expérimentations faites sur le cas général en utilisant la programmation linéaire.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté quelques aspects de la fabrication de plusieurs mélanges, dans le formalisme géométrique des mélanges additifs. Si le problème semble trouver des solutions numériques satisfaisantes par des outils de programmation linéaire, la nature même du phénomène de coexistence d'une famille de vecteurs dans une autre est loin d'être bien comprise. La généralisation du convexe de mélanges au convexe de q-mélanges donne un éclairage nouveau sur quelques propriétés des familles de vecteurs qui coexistent. Elle semble pouvoir donner dans l'avenir des méthodes plus directes pour décider de la coexistence. D'autre part, une formulation dans l'espace des réalisations, par des sommes de Minkowski, permet d'éviter la multiplication de la dimension de l'espace de travail. Implémenter directement des algorithmes d'optimisation avec cette formulation semblerait intéressant. Dans ce cadre, une méthode géométrique se révèle très efficace dans le cas particulier où la différence entre le nombre d'espèces et le nombre de produits de base est inférieur ou égal à deux. Ces cas bénéficient de nombreuses particularités, comme celui des mélanges à deux espèces. Ces particularités sont dues au fait que l'addition de polygones

convexes ne crée par des faces de directions autres que celles des polygones initiaux. Ceci disparaît en dimension trois, et la complexité des faces créées croît de façon liée à la dimension de l'espace. Une étude est en cours. Cette approche est totalement géométrique et semble pouvoir donner des méthodes beaucoup plus efficaces qu'une modélisation « aveugle » débouchant sur l'utilisation de méthodes d'optimisation. La compréhension du phénomène de coexistence doit également pouvoir se développer énormément par utilisation d'interprétations géométriques.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé en collaboration, par le Laboratoire de modélisation et Calcul (LMC), l'Université Joseph Fourier de Grenoble, le CNRS et le Centre de Recherche Elf de Solaize. Les auteurs remercient la Société Nationale Elf-Aquitaine d'avoir autorisé sa publication.

RÉFÉRENCES

[1] M. BERGER, *Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes, Géométrie, Vol. 3,* Cedic/Fernand Nathan, 1978.

[2] E. D. BOLKER, A class of convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.,* Vol. 145, Nov. 1969.

[3] P. G. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, *Masson,* 1982.

[4] H. EDELSBRUNNER, Algorithms in Combinatorial Geometry, *EATCS Monogr. Theoret. Comput. Sci.,* Vol. 10, Springer Verlag, 1987.

[5] P. E. GILL and W. MURRAY, Numerical Methods for constrained optimization, *Academic Press,* 1974.

[6] D. GIRARD, Convexe résidu et gestion de mélanges sur une plateforme, *Note technique SNEA-DRD,* n° 6/577, Juin 1986.

[7] D. GIRARD et P. VALENTIN, Zonotopes and Mixtures management, *New Methods in optimization and their industrial uses, International Series of Numerical mathematics,* Birkhäuser Verlag, 1989.

[8] B. LACOLLE et P. VALENTIN, Les mélanges binaires : modélisation géométrique et algorithmes, *Rapport de Recherche IMAG, RR. 841-M.,* Février 1991.

[9] B. LACOLLE et P. VALENTIN, Etude de la faisabilité de plusieurs mélanges, *Rapport de Recherche IMAG,* n° 776-M, Mai 1989.

[10] B. LACOLLE, Gestion géométrique de la fabrication simultanée de plusieurs mélanges sur une plateforme, *Rapport Technique Elf-Aquitaine,* n° RCH 762, Septembre 1988.

[11] N. F. LINDQUIST, Approximation of convex bodies by sums of line segments, *Portugaliae Mathematica,* Vol. 34, Fasc. 4, 1975.

[12] N. F. LINDQUIST, Support functions of central convex bodies, *Portugaliae Mathematica,* Vol. 34, Fasc. 4, 1975.

[13] P. MC MULLEN, On zonotopes, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 159 (1971), pp. 91-109.

[14] N. ODEH, *Modélisation mathématique des propriétés de mélanges : B-splines et optimisation avec condition de forme,* Thèse de l'Université Joseph Fourier, 19 mars 1990.

[15] F. P. PREPARATA et M. I. SHAMOS, *Computational Geometry : an Introduction,* Springer Verlag, New York, 1985.

[16] G. C. SHEPHARD, Combinatorial properties of associated zonotopes, *Can. J. Math.,* Vol. XXVI, n° 2, 1974, pp. 302-321.

[17] K. SLAQUI, Applications de techniques mathématiques à la gestion des mélanges : histosplines et optimisation, *Thèse de Docteur Ingénieur en Mathématiques Appliquées,* INPG, Juin 1986.

[18] P. VALENTIN, Zonotopes and Chromatography : a geometric approach of separation production, *2nd Congress in Preparative Chromatography HPLC,* Washington 12-13 mai 1986, ed. G. Guiochon.

[19] P. VALENTIN, Geometrical Foundations of Separation Engineering, *First International Conference on Industrial and Applied Mathematics,* Paris, June 29-July 3, 1987.