

S. CHAMPIER

T. GALLOUET

**Convergence d'un schéma décentré amont sur  
un maillage triangulaire pour un problème  
hyperbolique linéaire**

*Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 26, n° 7  
(1992), p. 835-853

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1992\\_\\_26\\_7\\_835\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_7_835_0)

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



CONVERGENCE D'UN SCHÉMA DÉCENTRÉ AMONT  
SUR UN MAILLAGE TRIANGULAIRE  
POUR UN PROBLÈME HYPERBOLIQUE LINÉAIRE (\*)

par S. CHAMPIER <sup>(1)</sup> et T. GALLOUET <sup>(2)</sup>

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé — *Dans ce travail, on montre la convergence d'un schéma décentré amont pour des équations scalaires de type hyperbolique linéaire dans le cas d'un maillage non structuré formé de triangles en deux dimensions d'espace*

Abstract — *Convergence of an upwind uncentered scheme on a triangular mesh for a nonlinear hyperbolic equation. In this paper, we prove the convergence of some upwind scheme for linear hyperbolic equation on spatial mesh composed of triangles in two space dimension*

1. INTRODUCTION

On considère le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique linéaire en deux dimensions d'espace, c'est-à-dire le problème :

$$\begin{cases} u_t + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u = 0 & t \in [0, T], (x, y) \in R^2 \\ u(x, y, 0) = u^0(x, y) & (x, y) \in R^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

$u^0$  et  $\vec{v}$  sont donnés :

$u^0 \in L^\infty(R^2)$  et est à support compact.

$\vec{v}$  est une fonction vectorielle continue telle que  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{pmatrix}.$$

(\*) Reçu en mai 1991

<sup>(1)</sup> Université de Saint-Etienne, Département de mathématiques, 23, rue Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

<sup>(2)</sup> Université de Chambéry, Département de mathématiques, Boîte Postale 1104, 73011 Chambéry Cedex, France.

On approche la solution faible du problème (1.1) par un schéma décentré amont sur un maillage composé de triangles.

Pour démontrer la convergence de la solution approchée vers la solution faible du problème, on montre d'abord une estimation  $L^\infty(R^2 \times [0, T])$  sur la solution approchée. Cette estimation est insuffisante pour montrer la convergence du schéma (rappelons d'ailleurs que, vu comme un schéma différences finies, le schéma apparaît comme inconsistant). Nous montrons ensuite une estimation plus faible qu'une estimation sur la variation totale. D'autre part, un contre-exemple facile permet de voir que le schéma n'est pas à variation totale décroissante sur un maillage composé de triangles.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

Le premier paragraphe contient la description du schéma, le deuxième donne les hypothèses géométriques sur le maillage ainsi qu'une condition de C.F.L.. Dans le troisième paragraphe, il y a des rappels de propriétés sur les triangles. La monotonie et la stabilité dans  $L^\infty(R^2 \times [0, T])$  sont montrées dans le quatrième paragraphe. Dans le cinquième paragraphe, on établit l'estimation faible nécessaire pour démontrer la convergence du schéma dans le dernier paragraphe.

## 2. CONVERGENCE DU SCHÉMA

### 2.1. Présentation du schéma

Pour la discrétisation temporelle, nous allons utiliser le schéma d'Euler explicite ; pour la discrétisation spatiale, nous utilisons une technique de volumes finis sur des triangles (intégration de l'équation sur chaque triangle puis intégration par parties) avec un choix décentré amont des valeurs de l'inconnue aux interfaces.

Notations :

$\mathcal{T}$  = famille de triangles .

$\mathcal{A}$  = famille des arêtes .

On note  $S(K)$  la surface de la maille  $K$ .

$I_{K,i}$  côtés de  $K$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$\vec{n}_{K,i}$  normale à  $I_{K,i}$  extérieure à  $K$ .

On note  $\ell(I)$  la longueur du côté  $I$ .

$k$  = pas de temps .

$N$  le nombre de pas de temps,  $Nk = T$ .

A l'instant  $t_n = nk$ , la solution approchée sur la maille  $K$  est  $u_K^n \in R$  et la valeur approchée de la dérivée en temps est  $\frac{1}{k} (u_K^{n+1} - u_K^n)$  (schéma d'Euler).

Sur le côté  $I$ ,  $\vec{v}$  est approché par

$$\vec{v}_I = \left( \frac{1}{\ell(I)} \int_I \alpha(x, y), \frac{1}{\ell(I)} \int_I \beta(x, y) \right).$$

Soit  $I$  un côté du maillage, on note  $K_I^m$  (resp.  $K_I^v$ ) le triangle amont (resp. aval) de  $I$ , c'est-à-dire :

$$I = I_{K_I^m, i} \text{ avec } i \in \{1, 2, 3\} \text{ si } \vec{v}_I \cdot \vec{n}_{K_I^m, i} \geq 0$$

(resp.  $I = I_{K_I^v, i}$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$  si  $\vec{v}_I \cdot \vec{n}_{K_I^v, i} < 0$ ).

Sur le côté  $I$ , au temps  $t_n$ , on pose  $u_I^n = u_{K_I^m}^n$ .

A l'instant  $t_n$ , on intègre le problème (1.1) sur un triangle  $K$ .

$$\int_K u_t + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u = 0$$

soit

$$\int_K u_t + \int_{\partial K} u \vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

Avec le choix des discrétisations temporelles et spatiales, on obtient :

$$S(K) \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} u_{I_i}^n \vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K, i} = 0 \tag{2.1}$$

d'où le schéma décentré amont :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{k}{S(K)} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K, i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n \tag{2.2}$$

$\forall K \in \mathfrak{T} \quad \forall n \in \{0, \dots, N - 1\}$

et

$$u_K^0 = \frac{1}{S(K)} \int_K u^0(x, y) dx dy \quad \forall K \in \mathfrak{T}.$$

On définit la solution approchée sur le maillage  $(\mathfrak{T}, k)$  par

$$u_{\mathfrak{T}, k}(t, x, y) = u_K^n(x, y) \in K \quad t_n \leq t < t_{n+1}$$

et à l'instant  $t_n$ , on définit  $u^n$  par

$$u^n(x, y) = u_K^n(x, y) \in K.$$

## 2.2. Hypothèses sur le maillage

Hypothèse sur les triangles :

$\exists a, b > 0$  tels que

$$\begin{aligned} ah &\leq \ell(I) \leq bh & \forall I \in \mathcal{A} \\ ah^2 &\leq S(K) \leq bh^2 & \forall K \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

D'autre part, on suppose avoir la condition de C.F.L. suivante :

$$k < \inf_{K \in \mathcal{T}} S(K) \frac{1}{\sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^+ \ell(I_i)} \quad (2.4)$$

et  $\exists \eta > 0$  tel que :

$$k < \inf_{I \in \mathcal{A}} S(K_I^v) \frac{1 - \eta}{2 \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I|}. \quad (2.5)$$

*Remarque :* (2.4) et (2.5) sont vérifiées si  $\exists \eta > 0$  tel que :

$$k < \frac{ah}{2b \|\vec{v}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}} (1 - \eta).$$

## 2.3. Quelques résultats sur les triangles

Notations :

Soit  $K_R$  le triangle de sommets  $(x_1, y_1) = (0, 0)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$ ,  $(x_3, y_3) = (0, 1)$ , on note  $\vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  les trois normales aux côtés de  $K_R$ .

Soit  $K$  le triangle de sommets  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  (*cf. fig. (2.1)*), on appelle  $i$ ème côté de  $K$ , le côté de  $K$  ne contenant pas  $(x_i, y_i)$ .

On note  $\ell_i$  la longueur du côté  $i$  et  $\vec{n}_i$  la normale au côté  $i$  extérieure à  $K$ .

On pose :

$$\vec{f}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

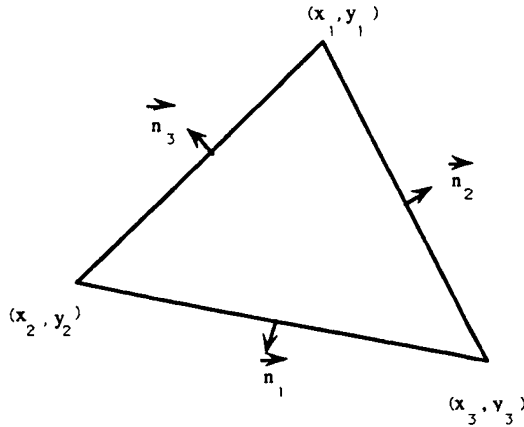


Figure 2.1.

$$\vec{f}_3 : R^2 \rightarrow R^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que, pour  $j = 1, 2, 3$ , on a sur l'arête  $j$  :

$$\vec{f}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Il existe  $g : R^2 \rightarrow R^2$  de la forme  $g(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \gamma \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{pmatrix}$

telle que

$$g(x_1, y_1) = (0, 1)$$

$$g(x_2, y_2) = (0, 0)$$

$$g(x_3, y_3) = (1, 0).$$

De plus  $g$  est bijective de  $K$  sur  $K_R$ .

On pose :

$$d = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2) \\ = 2 \times S(K)$$

et  $\vec{F}_i = \frac{\ell_i}{d} D(g^{-1})(\vec{f}_i \circ g)$  (où  $D(g^{-1})$  désigne la dérivée de  $g^{-1}$ ) c'est-à-

dire :

$$\vec{F}_1 = \frac{\ell_1}{d} \begin{pmatrix} x + d\beta' \gamma - \beta d(\gamma' - 1) \\ y - \alpha' d\gamma + \alpha d(\gamma' - 1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\ell_2}{d} \begin{pmatrix} x + d\beta'(\gamma - 1) - \beta d\gamma' \\ y - \alpha' d(\gamma - 1) + \alpha d\gamma' \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{\ell_3}{d} \begin{pmatrix} x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma' \\ y - \alpha' d\gamma + \alpha d\gamma' \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = \frac{y_1 - y_2}{d} \quad \beta = \frac{x_2 - x_1}{d} \quad \gamma = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{d}$$

$$\alpha' = \frac{y_2 - y_3}{d} \quad \beta' = \frac{x_3 - x_2}{d} \quad \gamma' = \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{d}$$

(d'où :  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = \frac{1}{d}$ ).

Soient  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  trois réels, on définit  $\vec{F} : R^2 \rightarrow R^2$  par

$$\vec{F} = \bar{\alpha}\vec{F}_1 + \bar{\beta}\vec{F}_2 + \bar{\gamma}\vec{F}_3$$

on a clairement :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{F} = \bar{\alpha} \quad \text{sur l'arête 1}$$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{F} = \bar{\beta} \quad \text{sur l'arête 2}$$

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{F} = \bar{\gamma} \quad \text{sur l'arête 3}$$

et  $\text{div } \vec{F}$  est constante sur  $R^2$ .

De plus, si  $K$  vérifie (2.3), il existe  $C(a, b)$  ne dépendant que de  $a, b$  telle que  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ , on a :

$$\|\vec{F}_i\|_{L^\infty(K)} \leq C(a, b).$$

(En particulier,  $C(a, b)$  ne dépend ni de  $K$  ni de  $h$ .)

LEMME 2.1 : Pour toute fonction  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : R^2 \rightarrow R^2$ , on a (avec les notations précédentes) :

$$\vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{n}_1 \vec{F}_1 + \vec{v} \cdot \vec{n}_2 \vec{F}_2 + \vec{v} \cdot \vec{n}_3 \vec{F}_3.$$

Démonstration :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{d\alpha'}{\ell_1} \\ -\frac{d\beta'}{\ell_1} \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{d\alpha}{\ell_2} \\ -\frac{d\beta}{\ell_2} \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} \frac{d(\alpha + \alpha')}{\ell_3} \\ \frac{d(\beta + \beta')}{\ell_3} \end{pmatrix} .$$

On pose

$$\vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{n}_1 \vec{F}_1 + \vec{v} \cdot \vec{n}_2 \vec{F}_2 + \vec{v} \cdot \vec{n}_3 \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

On obtient

$$\begin{aligned} a_1 = v_1 & \left[ -\frac{d\alpha'}{\ell_1} \frac{\ell_1}{d} (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma' + \beta d) \right. \\ & - \frac{d\alpha}{\ell_2} \frac{\ell_2}{d} (x + d\beta' \gamma - \beta' d - \beta d\gamma') \\ & + \frac{d\alpha}{\ell_3} \frac{\ell_3}{d} (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma') \\ & \left. + \frac{d\alpha'}{\ell_3} \frac{\ell_3}{d} (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma') \right] \\ & + v_2 [-\beta' (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma' + \beta d) \\ & - \beta (x + d\beta' \gamma - d\beta' - d\beta \gamma') \\ & + \beta (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma') \\ & + \beta' (x + d\beta' \gamma - \beta d\gamma')] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} a_1 = v_1 & [-\alpha' x - \alpha' d\beta' \gamma + \alpha' \beta d\gamma' - \alpha' \beta d \\ & - \alpha x - \alpha d\beta' \gamma + \alpha d\beta' + \alpha \beta d\gamma' \\ & + \alpha x + \alpha d\beta' \gamma - \alpha \beta d\gamma' \\ & + \alpha' x + \alpha' d\beta' \gamma - \alpha' \beta d\gamma'] \\ & + v_2 [-\beta' x - d\beta'^2 \gamma + \beta' \beta d\gamma' - \beta' \beta d \\ & - \beta x - d\beta \beta' \gamma + d\beta \beta' + \beta^2 d\gamma' \\ & + \beta x + d\beta \beta' \gamma - \beta^2 d\gamma' \\ & + \beta' x + d\beta'^2 \gamma - \beta \beta' d\gamma'] \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_1 = v_1 [\alpha d\beta' - \alpha' \beta d] + v_2 [0] = v_1$$

on vérifie de même que  $a_2 = v_2$  d'où  $\vec{a} = \vec{v}$  ■



## 2.4. Monotonie du schéma et estimation $L^\infty$

PROPOSITION 2.1 : Si la condition (2.4) est vérifiée alors :

(i) le schéma est monotone c'est-à-dire :

$$u_K^n \geq w_K^n \quad \forall K \in \mathfrak{T} \Rightarrow u_K^{n+1} \geq w_K^{n+1} \quad \forall K \in \mathfrak{T}$$

où  $w_K^{n+1}$  est calculé en remplaçant  $u$  par  $w$  dans le schéma.

(ii)

$$\|u^{n+1}\|_\infty = \sup_{K \in \mathfrak{T}} |u_K^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty .$$

*Démonstration :*

(i) Le schéma peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} u_K^{n+1} &= \left( 1 - \frac{k}{S(K)} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^+ \ell(I_i) \right) u_K^n \\ &\quad + \frac{k}{S(K)} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^- \ell(I_i) u_{I_i}^n \end{aligned}$$

d'où l'on déduit avec (2.4) :

$$u_K^{n+1} \geq w_K^{n+1}$$

c'est-à-dire la monotonie du schéma.

(ii) De la condition  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , on déduit

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) = 0$$

et donc

$$\inf_{K \in \mathfrak{T}} u_K^n \leq \inf_{K \in \mathfrak{T}} u_K^{n+1} \leq \sup_{K \in \mathfrak{T}} u_K^{n+1} \leq \sup_{K \in \mathfrak{T}} u_K^n$$

ceci donne

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty . \quad \blacksquare$$

On en déduit que sous l'hypothèse (2.4), on a :

$$\|u_{\mathfrak{T}, k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} .$$

**2.5. Estimation faible sur le schéma**

En général, le schéma (2.2) n'est pas à variation totale décroissante, quel que soit le choix de  $k, h$ . Considérons par exemple le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) . \end{cases}$$

On prend un maillage avec des triangles rectangles réguliers isocèles.

On choisit pour pas de temps  $k = h/2$ .

On fixe  $i, j$  et prend  $u_0 = 0$  sauf sur les triangles  $K_{i,j}$  et  $K_{i+1,j}$  où elle vaut 1.

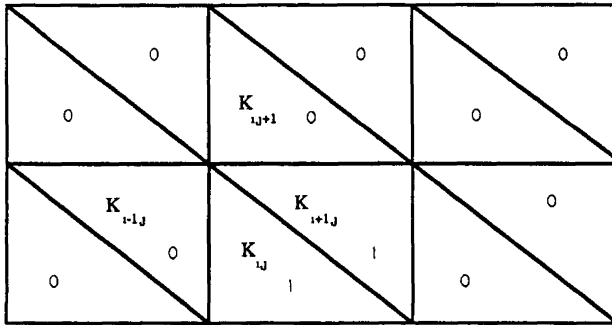


Figure 2.2. — Instant initial.

Le schéma s'écrit donc,

$$\frac{u_{\ell,m}^{n+1} - u_{\ell,m}^n}{k} - \frac{h}{S(K)} (u_{\ell-1,m}^n - u_{\ell,m}^n) = 0$$

soit

$$u_{\ell,m}^{n+1} = u_{\ell,m}^n + \frac{2k}{h} (u_{\ell-1,m}^n - u_{\ell,m}^n) .$$

On obtient :

$$u_{\ell,m}^1 = 0 \quad \text{si} \quad (\ell, m) \neq (i+1, j)$$

et

$$(\ell, m) \neq (i+2, j)$$

$$u_{i+1,j}^1 = 1$$

$$u_{i+2,j}^1 = 1 .$$

On remarque que pour  $u_k^n$ ,  $\ell$ , on n'a que deux valeurs non nulles, égales à 1. On obtient

$$TV(u^1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} TV(u^0)$$

puis

$$\begin{aligned} TV(u^{2^n}) &= TV(u^0) \\ TV(u^{2^{n+1}}) &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} TV(u^0) \end{aligned}$$

donc  $TV(u^n)$  n'est pas décroissante.

Par contre  $TV(u^n)$  est bornée par  $\frac{1 + \sqrt{2}}{2} TV(u^0)$

Dans le cas  $k \leq \frac{h}{2}$ , le schéma n'est pas non plus à variation totale décroissante

En effet, on pose  $\lambda = \frac{2k}{h}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} TV(u^0) &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ TV(u^1) &= 2(\lambda - 1) + \lambda \sqrt{2} + 1 + (1 - \lambda) + \lambda + \lambda \sqrt{2} \\ &= 4 - 2\lambda + 2\lambda \sqrt{2} = 4 \left( 1 + \frac{\lambda}{2} (\sqrt{2} - 1) \right) \end{aligned}$$

donc

$$TV(u^1) > TV(u^0).$$

Ainsi le schéma n'est pas à variation totale décroissante.

Afin de prouver la convergence du schéma, on montre à présent une estimation plus faible sur la variation totale.

LEMME 2.2 : On suppose satisfaite l'hypothèse (2.3)-(2.5).

Soit  $r \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $\mathcal{A}_r = \{I \in \mathcal{A}, I \subset B_r\}$  où  $B_r = \{X \in \mathbb{R}^2, |X| \leq r\}$ .

Il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\eta$ ,  $u^0$ ,  $r$  (et non de  $\mathfrak{T}$  et  $k$ ) telle que

$$h^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{I \in \mathcal{A}_r} k \ell(I) |u_{K_I^n}^n - u_{K_I^n}^n| |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| \leq C$$

où  $n_I = n_{K_I^n}$

Démonstration : On peut écrire le schéma (2.2) sous la forme

$$(u_K^{n+1} - u_K^n) S(K) + k \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n = 0. \tag{2.6}$$

On multiplie cette relation par  $u_K^n$  d'où

$$(u_K^{n+1} u_K^n - u_K^n u_K^n) S(K) + k \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n u_K^n = 0. \tag{2.7}$$

Comme

$$u_K^{n+1} u_K^n - u_K^n u_K^n = -\frac{1}{2} (u_K^n - u_K^{n+1})^2 - \frac{1}{2} (u_K^n)^2 + \frac{1}{2} (u_K^{n+1})^2.$$

On obtient en sommant la relation (2.7) sur les triangles et pour  $n = 0$  à  $N - 1$  :

$$\sum_{n,K} S(K) \left[ -\frac{1}{2} (u_K^n - u_K^{n+1})^2 - \frac{1}{2} (u_K^n)^2 + \frac{1}{2} (u_K^{n+1})^2 \right] + k \sum_{n,K} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n u_K^n = 0$$

d'où

$$-\frac{1}{2} \sum_{n,K} S(K) (u_K^n - u_K^{n+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_K (u_K^N)^2 S(K) - \frac{1}{2} \sum_K (u_K^0)^2 S(K) + k \sum_{n,K} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n u_K^n = 0. \tag{2.8}$$

On peut sommer le dernier terme sur les arêtes.

Ainsi

$$k \sum_{n,K} \sum_{i=1}^3 \vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i} \ell(I_i) u_{I_i}^n u_K^n = k \sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| [(u_{K_I^m}^n)^2 - u_{K_I^m}^n u_{K_I^v}^n].$$

Or

$$(u_{K_I^m}^n)^2 - u_{K_I^m}^n u_{K_I^v}^n = \frac{1}{2} (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 + \frac{1}{2} [(u_{K_I^m}^n)^2 - (u_{K_I^v}^n)^2].$$

De plus, on peut montrer que

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} l(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| [(u_{K_I^m}^n)^2 - (u_{K_I^v}^n)^2] = 0.$$

En effet,  $\forall K \in \mathcal{T}$ , on a :

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) = 0$$

donc

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) (u_K^n)^2 = 0$$

soit

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^+ \ell(I_i) (u_{K_i^m}^n)^2 \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^- \ell(I_i) (u_{K_i^v}^n)^2 = 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat énoncé.

Ainsi

$$\begin{aligned} & k \sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| [(u_{K_i^m}^n)^2 - u_{K_i^m}^n u_{K_i^v}^n] \\ & = \frac{1}{2} k \sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| [u_{K_i^m}^n - u_{K_i^v}^n]^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Regardons le premier terme de (2.8).

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n, K} S(K) (u_K^n - u_K^{n+1})^2 \\ &= \sum_{n, K} S(K) \left( \frac{k}{S(K)} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n \right)^2 \\ &= \sum_{n, K} k^2 \frac{1}{S(K)} \left( \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) u_{I_i}^n \right)^2 \\ &= \sum_{n, K} k^2 \frac{1}{S(K)} \left( \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) (u_{I_i}^n - u_K^n) \right)^2. \end{aligned}$$

Pour un triangle donné  $K$ ,  $\sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}) \ell(I_i) (u_{I_i}^n - u_K^n)$  admet au plus deux termes non nuls.

Comme  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , on déduit

$$A \leq 2 \sum_{n, K} k^2 \frac{1}{S(K)} \sum_{i=1}^3 (\vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i})^2 \ell(I_i)^2 (u_{I_i}^n - u_K^n)^2.$$

On somme alors sur les arêtes,

$$A \leq 2 \sum_n k^2 \sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{1}{S(K_I^v)} (\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I)^2 \ell(I)^2 (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2. \tag{2.10}$$

En reportant (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{2} \sum_n k^2 \sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{1}{S(K_I^v)} (\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I)^2 \ell(I)^2 (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \\
 & + \frac{2}{2} \sum_K S(K) (u_K^N)^2 - \frac{1}{2} \sum_K S(K) (u_K^0)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \sum_n \sum_{K \in \mathcal{A}} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 & \sum_K S(K) (u_K^N)^2 - \sum_K S(K) (u_K^0)^2 \\
 & + \sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} \left[ \frac{-2 k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I|}{S(K_I^v)} + 1 \right] k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.5),

$$\frac{-2 k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I|}{S(K_I^v)} + 1 \geq \eta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 & \sum_K S(K) (u_K^N)^2 - \sum_K S(K) (u_K^0)^2 \\
 & + \eta \sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

En conséquence, il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

- 1)  $\|u^N\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_1$
- 2)  $\sum_n \sum_{I \in \mathcal{A}} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \leq C_2.$

D'après l'inégalité d'Hölder,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n, I \in \mathcal{A}_r} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| |u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n| \\
 & \leq \left[ \sum_{n, I \in \mathcal{A}_r} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| (u_{K_I^m}^n - u_{K_I^v}^n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{n, I \in \mathcal{A}_r} |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| k \ell(I) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Rappel :  $C$  ne dépend que de  $\eta, u^0, r, a, b, \vec{v}$ . ■

## 2.6. Convergence dans $L_{\omega^*}^{\infty}$ de la solution approchée

Soit  $(\mathcal{C}_j, k_j)_{j \in N}$  une famille de discrétisation vérifiant (2.4) et (2.5) ( $a, b, \eta$  fixés), la suite  $(u_{\mathcal{C}_j, k_j})_{j \in N}$  est bornée dans  $L^{\infty}(R^2, R^+)$ . On peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans  $L^{\infty}(R^2, R^+)$  faible\*.

**THÉORÈME 2.1 :** *Soit  $a, b, \eta$  fixés,  $(\mathcal{C}, k)$  vérifiant (2.3)-(2.5), la solution approchée  $u_{\mathcal{C}, k}$  converge quand  $h$  tend vers 0 dans  $L_{\omega^*}^{\infty}$  vers  $u$  et  $u$  est la solution faible du problème (1.1).*

*Démonstration :* Comme la solution faible du problème (1.1) est unique, par un argument classique, il suffit de montrer que si  $u_{\mathcal{C}, k} \rightarrow u$  dans  $L^{\infty}(R^2, R^+)$  faible\* quand  $h, k$  tendent vers 0 (avec  $(\mathcal{C}, k)$  vérifiant (2.3)-(2.5)) alors  $u$  est solution faible du problème.

On suppose donc que  $u_{\mathcal{C}, k} \rightarrow u$  dans  $L^{\infty}(R^2, R^+)$  faible\*.

Soit  $\varphi$  une fonction  $C^{\infty}$  à support compact. On multiplie (2.1) par  $\varphi(x, y, t_n)$  et intègre sur  $K$ .

$$S(K) \int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} \varphi(x, y, t_n) dx dy + \int_K \varphi(x, y, t_n) \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} u_{I_i}^n \vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i} = 0.$$

D'après les rappels sur les triangles, il existe une fonction  $\vec{F}_K^n : R^2 \rightarrow R^2$  telle que :

$$\vec{F}_K^n \cdot \vec{n}_{K,i} = u_{I_i}^n \vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i} \quad \text{sur } I_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\int_K \operatorname{div} \vec{F}_K^n = \int_{\partial K} \vec{F}_K^n \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^3 \int_{I_i} u_{I_i}^n \vec{v}_{I_i} \cdot \vec{n}_{K,i}.$$

Comme  $\operatorname{div} \vec{F}_K^n$  est constante sur  $K$ , on obtient

$$S(K) \int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} \varphi(x, y, t_n) dx dy + S(K) \operatorname{div} \vec{F}_K^n \int_K \varphi(x, y, t_n) dx dy = 0$$

soit

$$\int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} \varphi(x, y, t_n) dx dy + \int_K \operatorname{div} \vec{F}_K^n \varphi(x, y, t_n) dx dy = 0. \quad (2.11)$$

On définit presque partout  $\vec{F}^n$  par  $\vec{F}^n|_K = \vec{F}_K^n$ .

$$\operatorname{div} \vec{F}^n|_K \text{ est dans } L^\infty.$$

$\vec{F}^n \cdot \vec{n}$  est continue sur chaque arête .

Ainsi  $\operatorname{div} \vec{F}^n \in L^\infty_{\text{loc}}(R^2)$ .

On a :

$$\sum_K \int_K \varphi(x, y, t_n) \operatorname{div} \vec{F}^n = - \int \vec{F}^n \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi(x, y, t_n).$$

On somme (2.11) sur tous les triangles.

On rappelle que  $u^n = u_K^n$  sur  $K$ .

$$\sum_K \int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} \varphi(x, y, t_n) dx dy - \sum_K \int_K \vec{F}^n \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy = 0$$

soit

$$\int_{R^2} \frac{u^{n+1} - u^n}{k} \varphi(x, y, t_n) dx dy - \int_{R^2} \vec{F}^n \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy = 0.$$

On multiplie par  $k$  et somme sur  $n$  dans  $\{1, \dots, N - 1\}$ .

$$\begin{aligned} & - \int_{R^2} u^0(x, y) \varphi(x, y, 0) dx dy \\ & + \sum_{n=1}^N k \int_{R^2} u^n \frac{\varphi(x, y, t_{n-1}) - \varphi(x, y, t_n)}{k} dx dy \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} k \int_{R^2} \vec{F}^n \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy = 0. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_n k \int_{R^2} u^n \frac{\varphi(x, y, t_{n-1}) - \varphi(x, y, t_n)}{k} dx dy \rightarrow - \int_{R^+} \int_{R^2} u \varphi_t$$

et

$$\int_{R^2} u^0(x, y) \varphi(x, y, 0) dx dy \rightarrow \int_{R^2} u_0(x, y) \varphi(x, y, 0) dx dy$$



LEMME 2.3 :

$$\sum_n k \int_{R^2} \vec{F}^n \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy \rightarrow \int_{R^+} \int_{R^2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t) u dx dy dt.$$

DÉMONSTRATION : On pose

$$\vec{F}_e^n = \vec{v} u^n.$$

On a

$$\sum_n k \int_{R^2} \vec{F}_e^n \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy \rightarrow \int_{R^+ \times R^2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t) u dx dy dt.$$

On s'intéresse donc à l'erreur commise en remplaçant  $\vec{F}^n$  par  $\vec{F}_e^n$ .

$$E = \sum_n k \int_{R^2} (\vec{F}^n - \vec{F}_e^n) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy.$$

Sur un triangle  $K$

$$\begin{aligned} \vec{F}^n &= \vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1} u_{I_1}^n \vec{F}_1^K + \vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2} u_{I_2}^n \vec{F}_2^K + \vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3} u_{I_3}^n \vec{F}_3^K \\ \vec{F}_e^n &= \vec{v} u^n = \vec{v} u_K^n \\ \vec{F}_e^n \cdot \vec{n}_{K,i} &= \vec{n}_{K,i} \cdot \vec{v} u_K^n. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1, on peut donc écrire  $\vec{F}_e^n$  sous la forme :

$$\vec{F}_e^n = \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,1} u_K^n \vec{F}_1^K + \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,2} u_K^n \vec{F}_2^K + \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,3} u_K^n \vec{F}_3^K.$$

D'où sur un triangle  $K$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}^n - \vec{F}_e^n &= \vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1} (u_{I_1}^n - u_K^n) \vec{F}_1^K + u_K^n (\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1} - \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,1}) \vec{F}_1^K \\ &+ \vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2} (u_{I_2}^n - u_K^n) \vec{F}_2^K + u_K^n (\vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2} - \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,2}) \vec{F}_2^K \\ &+ \vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3} (u_{I_3}^n - u_K^n) \vec{F}_3^K + u_K^n (\vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3} - \vec{v} \cdot \vec{n}_{K,3}) \vec{F}_3^K. \end{aligned}$$

On sait que pour  $i = 1, 2, 3$ , on a :

$$\|\vec{F}_i^K\|_{L^\infty(R^2)} \leq C$$

avec  $C$  indépendante de  $h$  et  $K$ .

$B$  est un compact contenant un voisinage du support de  $\varphi$  en espace, et donc contenant tous les triangles rencontrant le support de  $\varphi$  en espace, indépendamment de  $(\mathcal{C}, k)$ , pourvu que  $h$  soit assez petit, ce que l'on peut supposer.

$$|E| = \left| \sum_n k \int_{R^2} (\vec{F}^n - \vec{F}_e^n) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t_n) \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^M k C_1 \sum_{K \subset B} \int_K |\vec{F}^n - \vec{F}_e^n|$$

car  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  est borné sur le support de  $\varphi$ ,  $M$  est donné par  $(M + 1) k \leq T'$  où  $T'$  correspond au support de  $\varphi$  en temps.

On pose :

$$w_h = \sup_{\substack{X \in B \\ |y| \leq hb}} \|\vec{v}(X + y) - \vec{v}(X)\|$$

$$|E| = \left| \sum_n k C_1 \sum_{K \subset B} \int_K |\vec{F} - \vec{F}_e| \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^M k \sum_{K \subset B} C_2 S(K) (|\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1}| |u_{I_1}^n - u_K^n|$$

$$+ |\vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2}| |u_{I_2}^n - u_K^n| + |\vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3}| |u_{I_3}^n - u_K^n|)$$

$$+ \sum_{n=0}^M k \sum_{K \subset B} C_3 |u_K^n| S(K) w_h$$

car comme  $\vec{v}$  est continue,  $\alpha$  et  $\beta$  atteignent leur minimum sur chaque arête.

$$\inf_{I_i} \alpha(x, y) = \alpha(x_{i_m}, y_{i_m})$$

$$\inf_{I_i} \alpha(x, y) \leq \frac{1}{\ell_i} \int_{I_i} \alpha(x, y) \leq \sup_{I_i} \alpha(x, y)$$

$$\left| \inf_{I_i} \alpha(x, y) - \alpha(x, y) \right| \leq w_h.$$

De même, on a

$$\left| \sup_{I_i} \alpha(x, y) - \alpha(x, y) \right| \leq w_h$$

donc

$$\sup_{(x, y) \in K} \left| \frac{1}{\ell_i} \int_{I_i} \alpha(x, y) dx dy - \alpha(x, y) \right| \leq w_h$$

et

$$\sup_{(x, y) \in K} \left| \frac{1}{\ell_i} \int_{I_i} \beta(x, y) dx dy - \beta(x, y) \right| \leq w_h$$

d'où sur  $I$ ,  $|\vec{v}_I - \vec{v}| \leq w_h$  ainsi,

$$\sum_{n=0}^M k \sum_{K \in B} C_3 |u_K^n| S(K) w_h \leq C_4 w_h$$

et ce terme tend vers 0. Regardons l'autre terme :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^M k \sum_{K \in B} C_2 S(K) (|\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1}| |u_{I_1}^n - u_K^n| \\ &\quad + |\vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2}| |u_{I_2}^n - u_K^n| + |\vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3}| |u_{I_3}^n - u_K^n|) \\ A &\leq \sum_{n=0}^M k \sum_{K \in B} C_5 h^2 (|\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1}| |u_{I_1}^n - u_K^n| \\ &\quad + |\vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2}| |u_{I_2}^n - u_K^n| + |\vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3}| |u_{I_3}^n - u_K^n|) \\ &\leq \sum_{n=0}^M k \sum_{K \in B} C_6 h (\ell(I_1) |\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{n}_{K,1}| |u_{I_1}^n - u_K^n| \\ &\quad + \ell(I_2) |\vec{v}_{I_2} \cdot \vec{n}_{K,2}| |u_{I_2}^n - u_K^n| + \ell(I_3) |\vec{v}_{I_3} \cdot \vec{n}_{K,3}| |u_{I_3}^n - u_K^n|). \end{aligned}$$

On somme à présent sur les arêtes.

$$A \leq C_7 h \sum_{n=0}^M \sum_{K \in B} k \ell(I) |\vec{v}_I \cdot \vec{n}_I| |u_{K_I^n}^n - u_{K_I^n}^n| \leq C_8 h h^{-1/2} = C_8 h^{1/2}$$

avec  $C_8$  constante indépendante de  $(\mathfrak{T}, k)$  vérifiant les hypothèses (2.3)-(2.5). On fait tendre  $h$  vers 0,  $|E|$  tend alors vers 0.

Ainsi

$$\begin{aligned} - \sum_n k \int_{R^2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t_n) dx dy \\ \rightarrow - \int_{R^+ \times R^2} u \vec{v}(x, y) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(x, y, t) dx dy dt. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $u$  est solution faible du problème (1.1) et termine donc la démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CHALABI (1989), *Analyse de schémas décentrés pour des lois de conservation bidimensionnelles non homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série 1, p. 395-398.
- [2] S. CHAMPIER (1990), *Convergence de schémas décentrés amonts pour des maillages non structurés*, RT 60, LMC Imag, BP 53X F-38041 Grenoble Cedex.
- [3] F. COQUEL and P. LE FLOCH (1990), *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions : the corrected antidiffusion flux approach*, preprint École polytechnique, n° 210, January 1990.
- [4] F. COQUEL and P. LE FLOCH (1989), *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions : general theory*, preprint École polytechnique, n° 207, December 1989.
- [5] M. G. CRANDALL and A. MAJDA (1980), *Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Laws*, Math. Comp., vol. 34, n° 149, p. 1-21.
- [6] Richard SANDERS (1983), *On Convergence of Monotone Finite Difference Schemes With Variable Spatial Differencing*, Math. Comp., vol. 40, n° 161, p. 91-106.