

M. ROMANO

**Étude numérique des solutions périodiques  
d'une équation du second ordre**

*Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 26, n° 4  
(1992), p. 493-506

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1992\\_\\_26\\_4\\_493\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_4_493_0)

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## ÉTUDE NUMÉRIQUE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'UNE ÉQUATION DU SECOND ORDRE (\*)

M. ROMANO (1)

Communiqué par P.-L. LIONS

Résumé. — *Le but de cet article est de présenter l'utilisation d'une méthode numérique pour trouver les solutions périodiques d'un système Hamiltonien sous-quadratique en utilisant le principe d'action duale. Cette méthode est utilisée pour étudier les sous-harmoniques et l'index des solutions ainsi trouvées.*

Abstract. Numerical study of the periodic solutions of a second order equation. — *In this article we present a numerical method to compute many solutions of a subquadratic Hamiltonian system using the dual action principle. We use this method to study the subharmonics and the solutions index.*

### 1. INTRODUCTION

Cet article étudie les solutions périodiques de l'équation :

$$\ddot{X} + V'(X) = \cos t \quad (1)$$

dans le cas particulier où  $V(X) = \frac{1}{\alpha} |X|^\alpha$ . Le problème a la période naturelle  $T = 2\pi$ . Les solutions  $2k\pi$  périodiques avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  seront appelées sous-harmoniques. Ce problème est représentatif d'une vaste classe de problèmes, celle des problèmes convexes superlinéaire et sous-quadratique :  $V$  convexe et  $\exists 1 > \alpha < 2 \forall X \in \mathbb{R} \forall \lambda \lambda \geq 1 V(\lambda X) \geq \lambda^\alpha V(X)$ . On a montré l'existence d'une infinité de sous-harmoniques. En ce qui concerne la résolution numérique, 2 articles ont été publiés qui construisent une solution  $T$  périodique dans le cas d'un problème hamiltonien du premier ordre. Nous nous proposons, dans le cas particulier de ce problème du second ordre, de montrer qu'une méthode de Newton permet de construire un grand nombre de sous-harmoniques et nous étudierons leur index. Nous utiliserons pour ce faire la méthode d'action duale due à Clarke

(\*) Reçu en août 1990.

(1) École Normale Supérieure, CEREMADE, Université Paris-9 Dauphine, 75775 Paris.

et Ekeland qui a récemment fait l'objet de 2 ouvrages ([2] et [4]). Nous renvoyons à ceux-ci pour les renseignements théoriques, nous contentant de rappeler ici ce qui est indispensable.

## 2. RÉOLUTION DE L'ÉQUATION

### 2.1. Le principe d'action duale

Posons  $p = \dot{X}$  et  $H(X, p) = V(X) + \frac{1}{2} |p|^2$ . Le problème (1) se réécrit alors avec la notation classique des systèmes Hamiltoniens :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= + H'_p(X, p) \\ \dot{p} &= - H'_X(X, p) - f(t)\end{aligned}$$

avec  $f(t) = \cos t$  et  $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  strictement convexe sur la seconde variable et  $T$  périodique sur la première. Introduisons  $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la transformée de Legendre de  $H$  définie par :

$$G(Y, q) = \text{Sup} \{ \langle (X, p), (Y, q) \rangle - H(X, p) \mid (X, p) \in \mathbb{R}^2 \}$$

les hypothèses de convexité et de périodicité de  $H$  assurent l'existence de  $G$ . De plus  $G \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  et  $G$  est  $T$  périodique en  $t$ , strictement convexe en  $Y$ . Alors Clarke et Ekeland démontrent dans [1] que la recherche des solutions  $T$ -périodiques de l'équation (1) revient à trouver les points critiques de :

$$\phi(X, p) = \int_0^T (-\dot{X} \cdot p + G(-\dot{p} + f(t), \dot{X})) dt$$

sur l'espace fonctionnel  $X(0) = X(T)$ ,  $p(0) = p(T)$ .

### 2.2. Transformation du problème

Ici nous avons le cas simplifié où  $p = \dot{X}$ , on est donc ramené à résoudre  $\phi'(X) = 0$  avec :

$$\phi(X) = \int_0^T (-|\dot{X}|^2 + G(-\dot{X} + \cos t, \dot{X})) dt$$

où  $G$  est la transformée de Legendre, définie par :

$$\begin{aligned}G(Y, q) &= \text{Sup}_{X, p} \left( YX + qp - \frac{1}{2} |p|^2 - V(X) \right) \\ &= \text{Sup}_X (YX - V(X)) + \text{Sup}_p \left( qp - \frac{1}{2} |p|^2 \right).\end{aligned}$$

Soit avec  $V(X) = \frac{1}{\alpha} |X|^\alpha$  :

$$\begin{aligned} G(Y, q) &= \text{Sup}_X \left( YX - \frac{1}{\alpha} |X|^\alpha \right) + \frac{|q|^2}{2} \\ &= \frac{1}{\beta} |Y|^\beta + \frac{|q|^2}{2} \end{aligned}$$

avec  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . On a donc

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \int_0^T \left( -|\dot{X}|^2 + \frac{1}{\beta} |\ddot{X} - \cos t|^\beta + \frac{|\dot{X}|^2}{2} \right) dt \\ &= \int_0^T \left( -\frac{|\dot{X}|^2}{2} + \frac{1}{\beta} |\ddot{X} - \cos t|^\beta \right) dt. \end{aligned}$$

En faisant le changement de fonction  $q = \ddot{X}$  on se ramène à résoudre  $\Psi'(q) = 0$  où  $\Psi$  est définie par :

$$\Psi(q) = \int_0^T \left( -\frac{1}{2} \left| \int q \right|^2 + \frac{1}{\beta} |q - \cos t|^\beta \right) dt. \quad (2.1)$$

Il ne faut pas oublier l'hypothèse sur  $q$  liée à la périodicité de  $X$  :  $\int_0^T q = 0$ . On a donc transformé le problème (1) en le problème (2) :

$$\Psi'(q) = 0 \quad \text{avec} \quad \int_0^T q = 0. \quad (2)$$

### 2.3. Modélisation numérique

On ramène le problème (2) à la recherche des points critiques d'une fonction à  $n$  variables sous une contrainte par une discrétisation à pas fixe. Pour ce faire on pose :  $h = \frac{2\pi}{n}$  et  $t_i = h \times i$ . On approche  $q$  par la fonction  $\tilde{q}$  constante par morceaux, définie par :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \tilde{q}(t) = q(t) = q_{i+1}$$

(2.1) devient alors :

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{q}) &= \Psi(q_1, \dots, q_n) \\ &= h \sum_{k=1}^n \left( -\frac{1}{2} \left( h \sum_{i=1}^k q_i \right)^2 + \frac{1}{\beta} |q_k - \cos t_k|^\beta \right). \end{aligned}$$

En fait on peut se ramener à minimiser une fonction de  $n - 1$  variables sans contrainte. En effet  $\sum_{k=1}^n q_k = 0 \leftrightarrow q_n = -\sum_{k=1}^{n-1} q_k$ . On a donc  $\Psi(q_1, \dots, q_n) = F(q_1, \dots, q_{n-1})$  avec :

$$\begin{aligned}
 F(q_1, \dots, q_{n-1}) &= h \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{1}{2} \left( h \sum_1^k q_i \right)^2 + \frac{1}{\beta} |q_k - \cos t_k|^\beta \right) \\
 &\quad + \left( -\frac{1}{2} h^3 \right) \left( \sum_1^n q_i \right) + \frac{h}{\beta} |q_n - \cos t_n|^\beta \\
 F(q_1, \dots, q_{n-1}) &= h \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{1}{2} \left( h \sum_1^k q_i \right)^2 + \frac{1}{\beta} |q_k - \cos t_k|^\beta \right) \\
 &\quad + \frac{h}{\beta} \left| -\sum_1^{n-1} q_k - \cos t_n \right|^\beta. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de commodité de notation on continue à noter  $q_n = \sum_1^{n-1} q_k$ . On cherche à annuler  $F'(q)$ , pour ce faire on a utilisé une méthode de Newton.

Posons  $f'_j = \frac{\partial f}{\partial q_j}$  pour  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  alors  $F' = (f'_1, \dots, f'_{n-1})$  et on a :

$$\begin{aligned}
 f'_j &= -h^3 \sum_{k=j}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^k q_i \right) + h |q_j - \cos t_j|^{\beta-1} \operatorname{sgn}(q_j - \cos t_j) \\
 &\quad - h (q_n - \cos t_n)^{\beta-1} \operatorname{sgn}(q_n - \cos t_n).
 \end{aligned}$$

On pose  $A = (f'_{ij})$  avec  $f'_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j}$ . La méthode consiste alors à se donner une valeur initiale  $q^0 = (q_1^0, \dots, q_{n-1}^0)$  et à construire la suite  $(q^k)$  avec  $q^{k+1} = q^k - (A(q^k))^{-1} F'(q^k)$ . Alors  $q^k$  tend vers  $q$  solution de  $F(q) = 0$ .

## 2.4. Résultats

La méthode nécessite d'inverser à chaque pas la matrice  $A(q^k)$  d'ordre  $n \times n$ . Cette matrice, excepté la symétrie, n'a aucune autre propriété permettant d'utiliser des méthodes évoluées d'inversion (elle n'est ni définie positive, ni à diagonale dominante par exemple). Pour l'inverser on a donc utilisé une triangularisation par pivot de Gauss total. Avec cette méthode on

a utilisé un critère de convergence double pour contrôler l'arrêt des itérations :

$$\begin{aligned} 1 - |f'(q_n)|_\infty &\leq 10^{-8} \\ 2 - |q^{n+1} - q^n| &\leq 10^{-8}. \end{aligned}$$

Le premier critère traduit clairement la présence d'un point critique et le second indique que le processus est stabilisé. Pour remonter à  $X$  (on a fait le changement de variable  $q = \ddot{X}$ ) il suffit d'intégrer 2 fois  $q$  en tenant compte des contraintes sur  $X$ . Lors de la résolution on a procédé en plusieurs étapes. Pour la première étape, on choisit un pas de discrétisation relativement grossier et on initialise la méthode de Newton avec une fonction constante  $X(t) = \bar{q}$ . La solution obtenue est alors prise comme condition initiale lors de la deuxième étape, où l'on prend un pas plus fin, et ainsi de suite. On a observé une grande stabilité du processus : dès la deuxième étape la méthode de Newton converge en moins de 10 itérations. La première étape nécessite de 50 à 100 itérations, soit un temps de calcul de 5 à 10 min sur un sun 3. Pour obtenir des solutions différentes on initialise la première étape avec différents  $\bar{q}$ . Il est à noter qu'une variation très faible de  $\bar{q}$  (de l'ordre de 1 pour 500) peut changer totalement la solution finale. De plus on a observé que pour certains  $\bar{q}$  la méthode ne converge plus vers une solution du problème. En effet avec la démarche adoptée, on peut vérifier très aisément la validité de la solution obtenue : la méthode donne  $\ddot{X}$  puis  $X$ . Il suffit donc de calculer  $\ddot{X} + \frac{1}{\alpha} |X|^\alpha$  puis de le comparer à  $\cos t$ . Dans tous les cas on a obtenu une très bonne adéquation de  $\ddot{X} + \frac{1}{\alpha} |x|^\alpha$  avec  $\cos t$ , typiquement  $\left| \ddot{X} + \frac{1}{\alpha} |x|^\alpha - \cos t \right| \leq 10^{-2}$ .

### 3. ÉTUDE DE L'INDEX

Pour une étude plus complète de l'index on se reportera au livre d'Ekeland [2]. Nous nous contentons de rappeler les résultats et notations qui nous sont utiles. Soit le système Hamiltonien :

$$\dot{Z} = JA(t)Z. \quad (3.1)$$

Soit  $R$  la matrice solution du problème

$$\frac{dR}{dt} = JA(t)R(t).$$

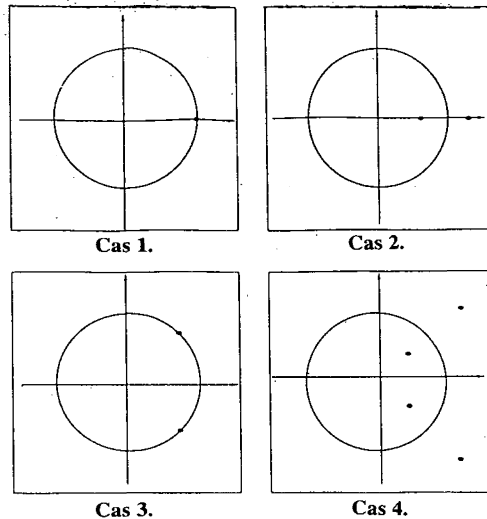
**DÉFINITION :**  $R$  est la résolvante du système (3.1) et les valeurs propres de  $R(T)$  sont appelées les multiplicateurs de Floquet de (3.1).

$R$  est symplectique, donc si  $\lambda$  est un multiplicateur de Floquet alors

$\lambda^{-1}$ ,  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}^{-1}$  sont des multiplicateurs de Floquet avec la même multiplicité. 1 et  $-1$  ont une multiplicité paire. Il y a donc 4 types de configurations possibles pour les multiplicateurs de Floquet :

1.  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$
2.  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| \neq 1$ , on a le couple  $\{\lambda, \lambda^{-1}\}$
3.  $\lambda \notin \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| = 1$ , on a le couple  $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$
4.  $\lambda \notin \mathbb{R}$ ,  $|\lambda| \neq 1$ , on a le quadruplet  $\{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$ .

On remarque que le cas 4 implique une dimension de 4 au moins (deux degrés de liberté).



Cas de figures possibles pour  $\lambda$ .

L'index de (3.1) sur l'intervalle  $[0, s]$ , noté  $i_s$ , est la dimension de  $E_-(0, s)$  où

$$E_-(0, s) = \left\{ \sum \zeta_n e_n / \zeta_n = 0 \text{ si } 1 - \lambda_n \geq 0 \right\}$$

où  $(e_n)$  est une base de vecteurs propres. On introduit également la nullité notée  $\nu_s$  comme étant la dimension de

$$E_0(0, s) = \left\{ \sum \zeta_n e_n / \zeta_n = 0 \text{ si } 1 - \lambda_n \neq 0 \right\}.$$

Si  $\nu_s \neq 0$  on dit alors que  $s$  est conjugué à 0 avec la multiplicité  $\nu_s$ . Or  $\nu_s$  est la dimension de  $\ker(R(s) - I)$  donc  $\nu_s \neq 0$  si 1 est valeur propre de (3.1). De plus Ekeland démontre que  $i_s$  est égal au nombre de  $t \in [0, s]$  conjugués à 0, comptés avec leur multiplicité. L'index d'une

solution  $\bar{X}$  de (1) est définie comme étant l'index de l'équation (3.1), obtenue en linéarisant autour de  $\bar{X}(1)$ .

Si nous nous reportons à notre cas particulier on obtient :

$$\ddot{y} + (\alpha - 1) \bar{X}(t)^{\alpha-2} y = 0$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha - 1) \bar{X}(t)^{\alpha-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

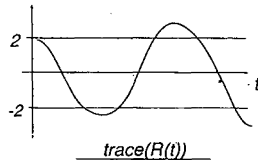
$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \bar{X}(t)^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

on a donc

$$Z = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t) = \begin{pmatrix} (\alpha - 1) \bar{X}(t)^{\alpha-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous travaillons donc en dimension 2, seuls les 3 premiers types de multiplicateurs sont possibles. De plus  $t$  est conjugué à 0 si et seulement si 1 est valeur propre double de  $R(t)$ . Or la valeur de trace ( $R(t)$ ) permet de lire directement la position des valeurs propres. En effet :

1.  $-2 < \text{trace}(R(t)) < 2$  si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\lambda \notin \mathbb{R}$
2.  $\text{trace}(R(t)) \leq -2$  si  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda < 0$
3.  $\text{trace}(R(t)) > 2$  si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$
4.  $\text{trace}(R(t)) = 2$  si  $\lambda = 1$ .



Pour calculer l'index il suffit donc de compter les passages par 2 de la trace de  $R(t)$ . Or la matrice  $R(t)$  se calcule facilement, les résultats obtenus sont présentés au paragraphe 4.

Le second résultat que nous allons utiliser est la formule d'itération de l'index : une solution périodique de période  $T$  sera également solution pour les périodes  $2T$ ,  $3T$ , ... Ekeland montre que l'index pour la période  $kT$  est donné par la formule :

$$i_{kT} = \sum_{\omega^k = 1} j(\omega)$$

où  $j$  est la fonction de Bott constante par morceaux dont les points de



discontinuité sont les multiplicateurs de Floquet de (3.1) qui sont sur le cercle unité (Réf. [2]). Le saut en un multiplicateur simple est  $+$  ou  $-1$ , le saut en 1 est  $n$ . On a donc pour le cas hyperbolique en dimension  $n$  (pas de valeur propre sur le cercle unité)  $i_{kT} = i(1) + (k-1)n$ .

On s'est proposé de vérifier numériquement cette formule d'itération. Pour chaque solution, on calcule son index sur la période double, triple, etc., en comptant le nombre de fois que trace  $(R(T))$  prend la valeur 2. On a observé un accord parfait avec la valeur théorique.

#### 4. RÉSULTAT

Les calculs ont été effectués avec comme valeur typique  $\alpha = 1,5$  ( $\beta = 3$ ).

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux et de courbes :

— un tableau présente l'ensemble des solutions obtenues pour l'harmonique donnée en donnant :

- \* un numéro à la solution
- \* ses bornes inf et sup
- \* son index

— les courbes des solutions sur une période

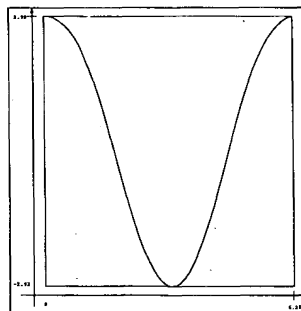
— un tableau donnant l'index des solutions itérées en donnant :

- \* le numéro de la solution de départ
- \* le nombre de tours
- \* le nouvel index.

#### *Harmonique 1*

##### Solutions obtenues

Numéro solution	Borne inf	Borne Sup	Index
1	-2.92	2.90	1



Harmonique 1 - Solution 1

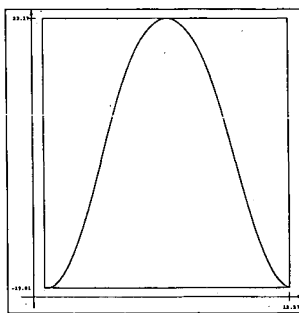
*Harmonique 2*

## Itération de l'index

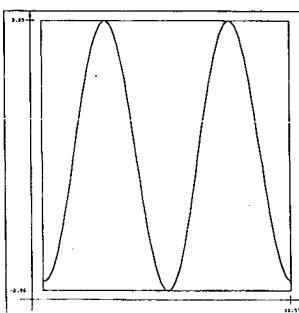
Numéro solution	Nombre de tours	Index
1	1	1
1	2	3
1	3	5
1	4	7
1	5	9

## Solutions obtenues

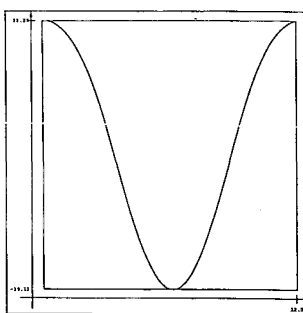
Numéro solution	Borne inf	Borne Sup	Index
1	- 19,81	23,37	5
2	- 2,96	3,05	3
3	- 19,12	22,29	5



Harmonique 2 - Solution 1



Harmonique 2 - Solution 2



Harmonique 2 - Solution 3

On remarque que les solutions 1 et 3 ont le même index et ont sensiblement les mêmes bornes inf et sup. Le tracé de chacune de ces solutions montre qu'il s'agit de la même fonction solution à un décalage de  $2\pi$  près. De plus il apparaît en comparant les courbes et l'index avec l'index itéré que la solution 2 est 2 fois la solution de l'harmonique 1.

## Itération de l'index

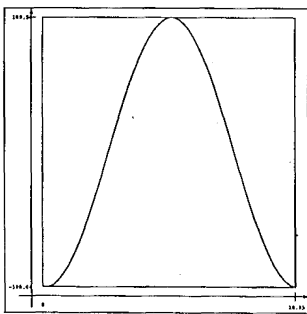
Numéro solution	Nombre de tours	Index
1	1	5
1	2	11
1	3	17

Numéro solution	Nombre de tours	Index
2	1	3
2	2	7
2	3	11

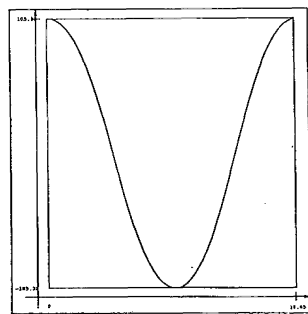
*Harmonique 3*

## Solutions obtenues

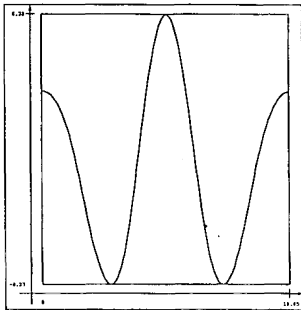
Numéro solution	Borne inf	Borne Sup	Index
1	- 108,04	109,58	13
2	- 105,32	105,33	13
3	- 8,27	6,38	6
4	- 7,20	8,75	6
5	- 6,59	8,28	6



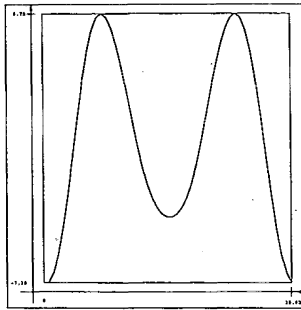
Harmonique 3 - Solution 1



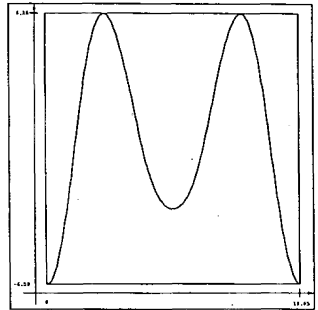
Harmonique 3 - Solution 2



Harmonique 3 - Solution 3



Harmonique 3 - Solution 4



Harmonique 3 - Solution 5

On remarque que les solutions 1 et 2 ont le même index et ont sensiblement les mêmes bornes inf et sup. Le tracé de chacune de ces solutions montre qu'il s'agit de la même fonction solution à un décalage de  $2\pi$  près. Par contre quoique leurs index soient égaux, 3 et 4 ne semblent pas avoir le même graphe. Pour 4 et 5 il semble qu'il s'agisse exactement de la même solution (la différence entre les bornes sup et inf est liée aux imprécisions de calcul).

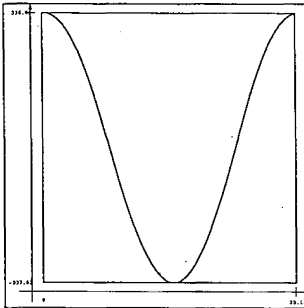
Itération de l'index

Numéro solution	Nombre de tours	Index
1	1	13
1	2	26
1	3	38

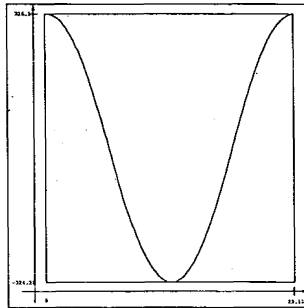
Numéro solution	Nombre de tours	Index
3	1	6
3	2	13
3	3	19

*Harmonique 4*

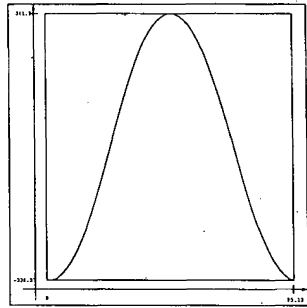
Numéro solution	Borne inf	Borne Sup	Index
1	- 337,83	336,67	23
2	- 344,28	326,11	23
3	- 338,37	341,39	23
4	- 19,52	23,51	11
5	- 18,24	21,44	11



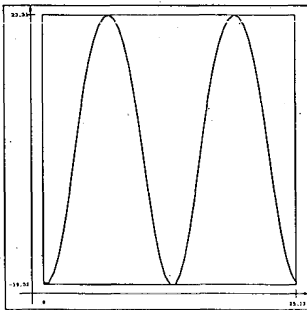
Harmonique 4 - Solution 1



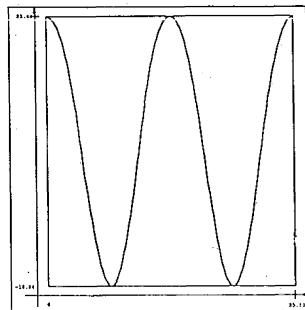
Harmonique 4 - Solution 2



Harmonique 4 - Solution 3



Harmonique 4 - Solution 4



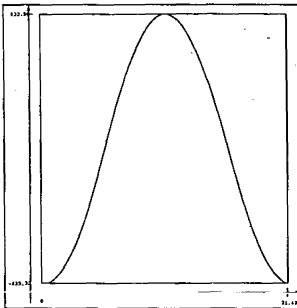
Harmonique 4 - Solution 5

On peut faire les mêmes remarques que précédemment : les solutions 1 et 3 ont le même index et ont sensiblement les mêmes bornes inf et sup. Le tracé de chacune de ces solutions montre qu'il s'agit de la même fonction solution à un décalage de  $2\pi$  près, de même pour 4 et 5. Enfin 1 et 2 représentent la même solution. On remarque que la solution 4 (et donc la

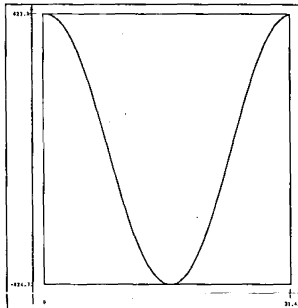
solution 5) est en fait constituée de deux fois la solution 1 pour l'harmonique 2. En effet les courbes correspondent, les bornes sont comparables et l'index de 4 est 11 comme l'index de la seconde itérée de la solution 1 de l'harmonique 2

*Harmonique 5*

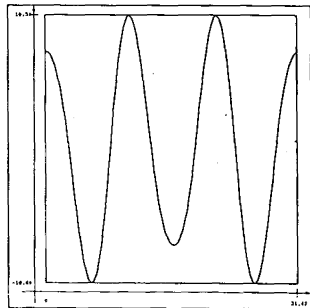
Numéro solution	Borne inf	Borne Sup	Index
1	- 825,32	833,55	36
2	- 824,71	821,11	36
3	- 10,68	10,56	12
4	- 11,25	12,22	12
5	- 53,13	49,96	18
6	- 51,60	55,15	18



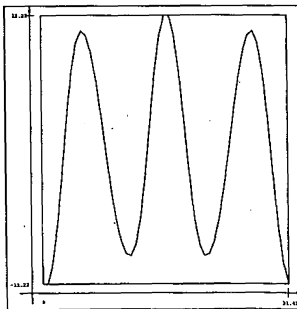
**Harmonique 5 - Solution 1**



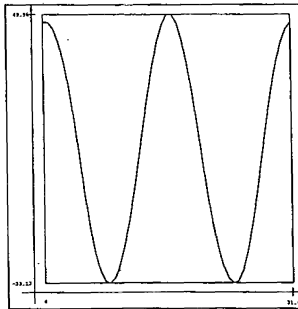
**Harmonique 5 - Solution 2**



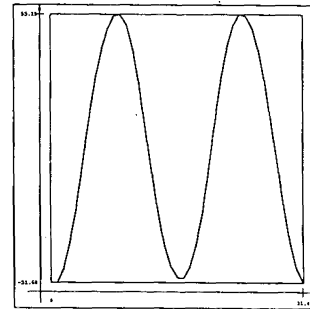
**Harmonique 5 - Solution 3**



**Harmonique 5 - Solution 4**



**Harmonique 5 - Solution 5**



**Harmonique 5 - Solution 6**

Encore une fois les solutions 1 à 6 sont liées : 1 et 2 représentent la même solution à un décalage de  $2\pi$  près. Il en est de même pour 4 et 3 et pour 5 et 6.

#### REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le professeur I. Ekeland pour son aide et son soutien durant ce travail.

#### RÉFÉRENCES

- [1] F. CLARKE et I. EKELAND, *Nonlinear oscillation and boundary-value problems for Hamiltonian systems*, Arch. Rational Mech. Anal., An 78, 1982, p. 315-333.
- [2] I. EKELAND, *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer-Verlag.
- [3] I. EKELAND et H. HOFER, *Subharmonics for convex Nonautonomous Hamiltonian Systems*, Comm. Pure Appl. Math. 40 (1987) 419-467.
- [4] J. MAWHIN et M. WHILEM, *Critical point and Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag.