M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

M. EL ALAOUI TALIBI
G. BAYADA

Une méthode du type caractéristique pour la résolution d'un problème de lubrification hydrodynamique en régime transitoire

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, nº 4 (1991), p. 395-423

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_4_395_0>

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 25, n° 4, 1991, p 395 a 423)

UNE MÉTHODE DU TYPE CARACTÉRISTIQUE POUR LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE (*)

M EL ALAOUI TALIBI (1), G BAYADA (2)

Communique par R TEMAM

Resume — *Nous etudions un probleme a frontiere libre en regime transitoire lie a la modelisation de la cavitation en lubrification Celle-ci est prise en compte par une nouvelle variable representative d'une saturation Apres un bref rappel du modele mecanique nous proposons un algorithme a l aide d une discretisation en temps par la methode des caracteristiques On demontre que le probleme discretise peut être considere comme une inequation variationnelle de premiere espece ou la saturation joue le rôle d un multiplicateur de Lagrange Des resultats numeriques dans le cas d un mecanisme type joint d etancheite sont presentes*

Abstract — *In this paper we study a moving free boundary problem related to the cavitation modelling in a lubricated device Cavitation is taking account by the introduction in the classical Reynolds equation of a new variable which acts as a saturation After a brief statement of the physical problem we introduce an algorithm based on characteristics method for the time discretization We show how the time-discretized problem can be view as a variational inequality where the saturation plays the role of a Lagrange multiplier Some numerical results are given in the case of face seals device*

1. INTRODUCTION

Dans la modélisation des phénomènes lubrifiés, on est souvent amené à accorder une importance particulière au calcul du débit de fuite car celui-ci est lié à la consommation et intervient dans la prise en compte des phénomènes thermiques Or le debit de fuite est tres sensible à la manière dont la cavitation est prise en compte et les modélisations habituellement

(*) Reçu en decembre 1989, revise en mai 1990

(1) Departement de Mathematiques, Faculte des Sciences, Universite Cadi Ayyad, Marrakech, B P S15, Maroc

(2) URA 856 & 740 CNRS Math 403 INSA 69621 Villeurbanne Cedex

 © AFCET Gauthier-Villars

employées qui utilisent une technique de type inéquation variationnelle conduisent à des résultats inacceptables [2].

L'introduction d'une variable de saturation pour caractériser la cavitation, proposée par Jackobson-Floberg a permis d'obtenir une nouvelle modélisation dont l'étude théorique et numérique dans le cas stationnaire a été faite dans [1].

Nous nous proposons ici d'étudier le cas transitoire correspondant. Dans le § 2, nous introduisons les notations et la formulation physique du problème qui est de type convection-diffusion puisque l'équation de Reynolds est elliptique dans la zone non cavitée et que l'équation de saturation est hyperbolique dans la zone cavitée. Dans le § 3, on donne la formulation faible associée et on rappelle les théorèmes d'existences démontrés dans [9]. Le § 4 est consacré à l'étude du problème obtenu après discrétisation par la méthode des caractéristiques [17]. On montre en particulier que l'on peut approcher le problème transitoire par une suite d'inéquations variationnelles stationnaires où la saturation θ s'exprime comme un multiplicateur de Lagrange associé à la pression. Dans le chapitre 5, nous considérons l'approximation par éléments finis en espace associée et nous donnons des résultats de stabilité et de convergence. Nous donnons enfin au § 6 des résultats numériques sur le problème des joints à faces radiales. L'idée d'utiliser une méthode de type caractéristiques a été introduite de manière indépendante dans [3] pour un problème stationnaire dans lequel le temps était introduit artificiellement. Notons que le problème discret est très différent de celui que l'on trouve ici, et qu'il ne se réduit pas à une inéquation variationnelle de première espèce.

2. ÉQUATION DE REYNOLDS EN PRÉSENCE DE CAVITATION

La pression $P(x, y, t)$ dans un film fluide s'écoulant entre deux surfaces S_1 et S_2 sous les hypothèses de la mécanique des films minces est régit par l'équation de Reynolds [12], [15] :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\vec{V}) + \nabla \cdot (h^3 \nabla P) = 0 \tag{2.1}$$

— $\vec{V}$ est une fonction régulière qui dans le cas des joints étudiés explicitement au § 6 est égale à $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)/2$: $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ étant respectivement les vitesses des surfaces S_1 et S_2.

— $h(x, y, t)$ est l'épaisseur du film supposée dans toute la suite une fonction régulière de ses variables et est une donnée du problème : c'est la distance entre S_1 et S_2.

Si l'écoulement était homogène, la donnée de h et de $\vec{V}$ permettrait de résoudre (2.1). Mais dans la plupart des mécanismes lubrifiés, l'écoulement

est de type diphasique et il y a apparition de cavitation : la surface lubrifiée se divise en deux zones, une zone dite active où la pression, P strictement positive est solution de (2.1) et une zone cavitée où $P = 0$ (*fig.* 1), la frontière libre Σ séparant les deux zones.

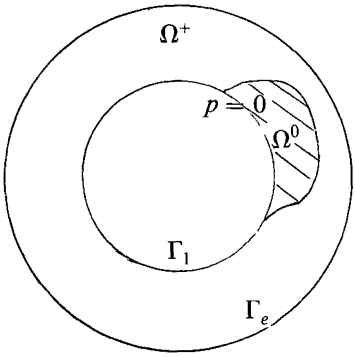

Figure 1. — Vue de dessus du mécanisme.

Plusieurs approches ont été introduites pour modéliser ce phénomène [2] qui diffèrent par les conditions aux limites imposées sur Σ. Les modèles actuellement les plus satisfaisants peuvent être explicités par l'introduction d'une saturation notée θ définie par :

$$\begin{array}{rlll} \theta \equiv 1 & \text{dans} & \Omega^+ & \text{où} \quad P > 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1 & \text{dans} & \Omega_0 & \text{où} \quad P = 0\,, \end{array}$$

ce qui conduit à écrire le débit massique sous la forme

$$F = h^3 \nabla P - \theta h \vec{V} \quad \text{où} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Supposant le phénomène continu, la loi de conservation du débit conduit au système d'équation :

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla P - h \vec{V}) = \frac{\partial h}{\partial t} \qquad \theta = 1 \quad \text{si} \quad P > 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \theta h}{\partial t} + \nabla \cdot (\theta h \vec{V}) = 0 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \text{si} \quad P = 0 \tag{2.3}$$

$$P = 0\,, \quad h^3 \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = (1 - \theta)\, h(\vec{V} \cdot \vec{n} - q_n) \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{2.4}$$

où $\vec{n}$ est la normale sortante à Σ dans le plan $[xoy]$ et q_n la projection de la vitesse de Σ sur $\vec{n}$.

Ce système d'équation a été proposé par Elrod qui a introduit une méthode de calcul par différence-finie en ajoutant un terme régularisant tenant compte de la compressibilité du fluide. La plupart des résultats obtenus jusqu'à présent concernent les problèmes stationnaires ou pseudo-stationnaires [2], [11], bien que certaines études purement mécaniques [5] existent en régime transitoire pur.

3. POSITION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Les équations (2.2)-(2.3) peuvent se ramener à une seule équation valable dans tout le domaine au sens des distributions :

$$\frac{\partial \theta h}{\partial t} - \nabla \cdot (h^3 \nabla P) + \nabla \cdot (\theta h \vec{V}) = 0 \quad \text{dans} \quad D'(Q) \tag{3.1}$$

où $Q = \Omega \times]0, T[$.

Le problème ci-dessus est un problème à deux phases du type Stefan mais il n'est pas classique, en effet :

— θ et P sont liés par la relation

$$\theta \in H(P) = \partial\phi(P), \quad \phi(P) = P^+ = \sup(P, 0) \tag{3.2}$$

où H est le graphe d'Heaviside : $H(P) = 0$ si $P < 0$, $H(0) = [0, 1]$ et $H(P) = 1$ si $P > 0$.

— Chacune des inconnues θ et P varie uniquement dans une seule phase.

— L'équation (3.1) est de nature différente dans chacune des phases.

Nous supposons les conditions aux limites habituelles de pression d'alimentation

$$\begin{aligned} P &= P_a > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_e \\ P &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_i \end{aligned}$$

le problème mathématique s'écrit alors :

Problème (P) : Trouver $(P, \theta) \in L^2(0\ T, H^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ tels que,

$$\frac{\partial \theta h}{\partial t} - \nabla \cdot (h^3 \nabla P) + \nabla \cdot (\theta h \vec{V}) = 0 \quad \text{dans} \quad D'(Q) \tag{3.3}$$

$$\theta \in H(P) \tag{3.4}$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} P &= P_a \quad \text{sur} \quad \Sigma_e = \Gamma_e \times [0, T] \\ P &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_i = \Gamma_i \times [0, T] \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5) est une condition initiale caractérisant l'état initial du fluide. Γ_e et Γ_i désignent respectivement les bords extérieurs et intérieurs de Ω. On a $\Gamma = \Gamma_e \bigcup \Gamma_i$ et P_Γ est la trace de P sur Γ.

Remarque :

Dans [9], on trouve une étude mathématique de (3.3)-(3.6) par des techniques de régularisations elliptiques et par semi-discrétisation en temps qui permet de démontrer des théorèmes d'existence dont l'utilisation pratique est délicate.

La technique présentée ici se prête mieux à une résolution numérique et peut fournir un théorème d'existence (*cf.* remarque 5.2) aussi bien pour des conditions aux limites du type Cauchy que pour des conditions aux limites du type périodiques en temps : $\theta(x, y, T) = \theta(x, y, 0)$.

L'unicité peut se démontrer [4] à l'aide des techniques introduites dans [7] pour un problème avec des conditions aux limites différentes.

4. DISCRÉTISATION EN TEMPS PAR LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

4.1. Introduction de la méthode des caractéristiques

Dans (3.3) $\vec{V}$ peut être considéré comme un vecteur vitesse. Dans les cas courants (*cf.* § 6), $\vec{V}$ vérifie les deux hypothèses suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \vec{V} \cdot \vec{n}\,|_\Gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

d'où une autre écriture du terme :

$$\nabla \cdot (\theta h \vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla \theta h .$$

(3.3) est composée d'une partie convection en θh et d'une partie diffusion en P. Donc une méthode de type caractéristique paraît bien adaptée pour traiter le transport, puis une méthode d'approximation interne ou externe (Éléments-finis, différences finies) pour la diffusion.

Le terme $\frac{\partial}{\partial t} \theta h + \vec{V} \cdot \nabla \theta h$ de (3.3) peut s'écrire [17] sous la forme $\frac{D}{Dt}(\theta h) = \frac{\partial}{\partial t} \theta h + \vec{V} \cdot \nabla \theta h$, où $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée particulaire de θh dans la direction de $\vec{V}$ et peut se définir aussi par :

$$\frac{D}{Dt} \theta h = \frac{\partial}{\partial \tau} \theta h(X(x, t\,; \tau), \tau)\,|_{\tau = t}$$

$X(x, t, \tau)$ est la courbe caractéristique solution du système differentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \vec{V}(x, \tau) \\ X(x, t, t) = x \quad \text{ou} \quad X(t) = x \end{cases} \tag{4 2}$$

— $X(x, t, \tau)$ est la position d'une particule a l'instant τ se déplaçant avec la vitesse $\vec{V}$ et dont la position à l'instant t est x

L'équation (3 3) s'écrit alors

$$\frac{D}{Dt}(\theta h) - \nabla \cdot (h^3 \nabla P) = 0 \tag{4 3}$$

Soit $T > 0$ on pose $\dfrac{T}{N} = \Delta t$ et on note

$$P^n(x) = P(x, n\,\Delta t), \quad \theta^n(x) = \theta(x, n\,\Delta t),$$
$$X^n(x) = X(x, (n+1)\,\Delta t, n\,\Delta t)$$

On discrétise (3 3) par un schéma implicite et on obtient la suite d'équations elliptiques non lineaires suivante

Problème $(\mathscr{P}_N^n)$

$$\begin{cases} \dfrac{(\theta h)^{n+1}(x) - (\theta h)^n (X^n(x))}{\Delta t} - \nabla \cdot ((h^{n+1})^3 \nabla P^{n+1}) = 0 & (4\ 4) \\ \theta^{n+1} \in \partial\phi(P^{n+1}) \quad \text{p p dans } \Omega & (4\ 5) \\ P^{n+1}|_\Gamma = P_\Gamma & (4\ 6) \end{cases}$$

$(\theta h)^0 = \theta_0(x)\, h(0, x)$ étant donnée

Le problème (4 4)-(4 6) est a deux inconnues θ et P En utilisant (4 5), on va montrer qu'il se ramène a la résolution d'une inéquation variationnelle avec une seule inconnue

4.2. Étude du problème $\mathscr{P}_N^n$

Fixons n et étudions le problème $\mathscr{P}_N^n$ où les inconnues sont (θ^{n+1}, P^{n+1}) On introduit le problème sans indice en posant $(\theta^{n+1}, P^{n+1}, h^{n+1}) = (\theta, P, h)$ et $(\theta h)^n (X^n(x)) = f(x)$ Le problème (4 4)-(4 6), devient

Trouver $$(P, \theta) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \tag{4 7}$$

$$\begin{cases} \theta \in \partial\phi(P) \quad \text{p p dans } \Omega & (4\ 8) \\ P|_\Gamma = P_\Gamma & (4\ 9) \\ \theta h - \Delta t\, \nabla \cdot (h^3 \nabla P) = f \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) & (4\ 10) \end{cases}$$

Notons que (4.10) est équivalente à la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \theta h\varphi + \int_\Omega \Delta t h^3 \nabla P \, \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) . \tag{4.11}$$

On commencera par montrer que le problème (4.7)-(4.10) admet une solution en utilisant une inéquation variationnelle de deuxième espèce [8], [10].

PROPOSITION 4.1 : *Soit* (P, θ) *une solution de* (4.7)-(4.10), *alors* $W = P - \bar{P}_\Gamma$ *est solution de l'inéquation variationnelle* (4.12)

$$\left\{\begin{aligned} & W \in H_0^1(\Omega) \\ & \Delta t \int_\Omega h^3 \nabla(W + \bar{P}_\Gamma) \nabla(\varphi - W) + J(\varphi) - J(W) \geqslant \\ & \qquad\qquad \geqslant \int_\Omega f(\varphi - W) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}\right\} . \tag{4.12}$$

J est la fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$J(\varphi) = \int_\Omega h(x)\, \phi(\varphi + \bar{P}_\Gamma)\, dx .$$

— *$\bar{P}_\Gamma$ désigne un relèvement $H^1(\Omega)$ des conditions aux limites, positif (qui existe puisque $P_a \geqslant 0$ sur Γ_e).*

Démonstration : Supposons (P, θ) solution de (4.7)-(4.10) alors, par (4.10), on obtient :

$$\int_\Omega h\theta(\varphi - W) + \Delta t \int_\Omega h^3 \nabla(W + \bar{P}_\Gamma) \nabla(\varphi - W) = \langle f, \varphi - W \rangle ,$$

$$\forall \varphi \in V ; \quad V = H_0^1(\Omega) .$$

Calculons $J(\varphi) - J(W)$.

$$J(\varphi) - J(W) = \int_\Omega h(x)[\phi(\varphi + \bar{P}_\Gamma) - \phi(P)]\, dx$$

or, par (4.8), on a :

$$\phi(\lambda) - \phi(P(x)) \geqslant \theta(x)(\lambda - P(x)) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ p.p. dans } \Omega ,$$

$$\Rightarrow \phi((\varphi + \bar{P}_\Gamma)(x)) - \phi(P(x)) \geqslant \theta(x)((\varphi + \bar{P}_\Gamma)(x) - P(x))$$

$$h \geqslant 0 \Rightarrow h\,[\phi(\varphi + \bar{P}_\Gamma) - \phi(P)] \geqslant \theta h[\varphi - W] \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

D'où après intégration sur Ω et comparaison avec l'égalité ci-dessus obtenue à partir de (4.10), il vient

$$\Delta t \int_\Omega h^3 \nabla(W + \bar{P}_\Gamma) \nabla(\varphi - W) + J(\varphi) - J(W) \geqslant \langle f, \varphi - W \rangle \quad \forall \varphi \in V$$

d'où la proposition 4.1.

On démontre la réciproque suivante :

PROPOSITION 4.2 : *Soit W la solution du problème* (4.12), *alors il existe* θ *unique tel que le couple* $(W + \bar{P}_\Gamma, \theta)$ *est solution de* (4.7)-(4.10).

Pour la démonstration on aura besoin du lemme suivant.

LEMME 4.1 : *Soient* ϕ *et* J *définies comme précédemment ; alors :*

— $\forall \varphi \in L^2(\Omega) \quad \partial J(\varphi) \subset L^2(\Omega)$.

— $\gamma \in \partial J(P) \Leftrightarrow \gamma/h \in H(P + \bar{P}_\Gamma)$ *p.p. dans* Ω.

Pour la démonstration du lemme 4.1 voir [8]-[9].

Montrons maintenant la proposition 4.2.

Soit $W \in H_0^1$ solution de l'inéquation variationnelle (4.12) : prenons pour fonction test $\varphi = W + \lambda u$ où u est un élément quelconque de H_0^1 et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, posons :

$$a(u, V) = \Delta t \int_\Omega h^3 \nabla u \nabla V .$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lambda a(W, u) + J(\varphi) - J(W) \geqslant \lambda \langle f, u \rangle \\ &\Rightarrow \lambda [\langle f, u \rangle - a(W, u)] \leqslant J(\varphi) - J(W) \end{aligned} \tag{4.12}$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{J(\varphi) - J(W)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda} \int_\Omega h(x)[\phi(\varphi + \bar{P}_\Gamma) - \phi(W + \bar{P}_\Gamma)] \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} \int_\Omega h(x)\, \phi(\varphi + \bar{P}_\Gamma) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle f, u \rangle - a(W, u) \leqslant \frac{J(\varphi) - J(W)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda} \int_\Omega h(W + \lambda u + \bar{P}_\Gamma)^+ - (W + \bar{P}_\Gamma)^+ \\ &\leqslant \int_\Omega h |u| \\ &\leqslant C |u|_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Donc si on considère la forme linéaire définie sur H_0^1 par $u \in V \mapsto \langle f, u \rangle - a(W, u)$, elle est continue pour la norme $L^2(\Omega)$. Or H_0^1 est dense dans

$L^2(\Omega)$, on peut alors prolonger cette forme linéaire sur $L^2(\Omega)$ d'une façon unique. Et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe γ unique dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$\langle f, u \rangle - a(W, u) = (\gamma, u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) .$$

On vient de montrer que pour toute solution W de l'inéquation variationnelle (4.12), il existe γ unique dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$\Delta t \int_\Omega h^3 \nabla W \nabla(\varphi - W) + \int_\Omega \gamma(\varphi - W) = \langle f, \varphi - W \rangle \quad \forall \varphi \in V . \quad (4.13)$$

En comparant (4.12) et (4.13), il vient :

$$J(\varphi) - J(W) \geqslant \int_\Omega \gamma(\varphi - W) \quad \forall \varphi \in V .$$

La fonctionnelle J est continue sur $L^2(\Omega)$, on en déduit par densité, que :

$$J(\varphi) - J(W) \geqslant \int_\Omega \gamma(\varphi - W) \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

d'où $\qquad \gamma \in \partial J(W)$ p.p. dans Ω .

Posons $\theta = \gamma/h$, on a $\theta \in L^2(\Omega)$ et par le lemme 4.1 et ce qui précède, on obtient :

$$\theta \in H(W + \bar{P}_\Gamma) \quad \text{p.p. dans } \Omega ,$$

de plus le couple $(P = W + \bar{P}_\Gamma, \theta)$ est solution (4.7)-(4.10).

Remarque 4.1 : L'appartenance de θ à L^∞ est triviale d'après la définition de H et de l'inclusion de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

THÉORÈME 4.1 : *Le problème* (4.4)-(4.6) *admet une solution* (P, θ) *unique.*

Démonstration :

Résoudre $(\mathscr{P}_N^n)$ est équivalent, d'après les propositions (4.1) et (4.2), à résoudre une suite d'inéquations variationnelles (4.12). Il suffit alors de montrer qu'à chaque pas de temps, (4.12) admet une solution unique. Pour cela on va voir que J, $a(u, v)$ et f vérifient les hypothèses classiques d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de deuxième espèce [13].

— La fonctionnelle J est convexe et s.c.i. et

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega)\,, \quad 0 \leqslant J(\varphi) < +\infty$$

— $a(u, v) = \int_\Omega h^3 \nabla u \,.\, \nabla v$ est bilinéaire continue H_0^1-elliptique car on a supposé : $0 < m \leqslant h(x) \leqslant M$.

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et f définie par :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega h^n \theta^n \varphi - k \int_\Omega (h^n \theta^n \vec{V} + h^3 \nabla \bar{P}_\Gamma) \nabla \varphi \,.$$

f est bien une forme linéaire continue sur H_0^1 car θ est dans $L^\infty(\Omega)$ et $\vec{V}$ est régulier.

PROPOSITION 4.3 : *Soit* (P, θ) *la solution du problème* (4.7)-(4.10), *on a le principe du maximum suivant :*

Si $f \geqslant 0$ *et* $P_\Gamma \geqslant 0$ *alors* $P \geqslant 0$ *p.p. dans* Ω.

Démonstration : Soit P la solution de (4.7)-(4.10) :

$$P \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad P\,|_\Gamma \geqslant 0 \text{ implique que } P^- \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Prenons alors P^- comme fonction test dans (4.11), il vient :

$$\int_\Omega \theta h P^- + \Delta t \int_\Omega h^3 \nabla P \,.\, \nabla P^- = \int_\Omega f P^-$$

$$\theta \in \partial\phi(P) \Rightarrow \theta \,.\, P^- = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\,,$$

de plus, on a : $\nabla P^+ \,.\, \nabla P^- = 0$ p.p. dans Ω,

$$\text{d'où : } \int_\Omega h^3 \nabla P \,.\, \nabla P^- = -\int_\Omega h^3 |\nabla P^-|^2 \,.$$

P^- et f sont positives d'où : $\int_\Omega f P^- \geqslant 0$,

on obtient finalement : $-\Delta t \int_\Omega h^3 |\nabla P^-|^2 = 0$.

Soit $P^- = 0$ p.p. dans Ω, h étant strictement positive, d'où :

$$P \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega\,.$$

Le principe du maximum sur le problème $\mathscr{P}_N^n$ pour tout n s'obtient trivialement par récurrence si $\theta_0 \geqslant 0$.

Ainsi, la résolution de (4.12) se ramène à la résolution d'une inéquation variationnelle de première espèce associée au problème de l'obstacle.

PROPOSITION 4.4 : *Soit* (P, θ) *la solution de* (4.7)-(4.10), *alors* $W = P - \bar{P}_\Gamma$ *est solution de l'inéquation variationnelle de première espèce :*

$$\begin{cases} W \in K \\ \Delta t \int h^3 \nabla W \nabla(\varphi - W) \geqslant \int_\Omega \bar{f}(\varphi - W) + \Delta t \langle g, \varphi - W \rangle \quad \forall \varphi \in K \end{cases} \tag{4.14}$$

où $K = \{W \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } W \geqslant \psi\}$, $\psi = -\bar{P}_\Gamma$

$$g = \nabla . (h^3 \nabla \bar{P}_\Gamma)$$

$$\bar{f} = f - h .$$

Démonstration : D'après la proposition (4.3), on a $P \geqslant 0$, d'où : $\phi(W + \bar{P}_\Gamma) = W + \bar{P}_\Gamma$, par ailleurs $\varphi \in K$ implique $J(\varphi) = \int_\Omega h(\varphi + \bar{P}_\Gamma)$, donc $J(\varphi) - J(W) = \int_\Omega h(\varphi - W)$ et(4.12) donne (4.14).

On fait maintenant l'hypothèse suivante :

$$\bar{P}_\Gamma \in W^{2,p}(\Omega) \quad \text{pour} \quad p > 2 . \tag{4.15}$$

THÉORÈME 4.2 : *Avec l'hypothèse* (4.15) *la solution* W *de l'inéquation variationnelle* (4.14) *est dans l'espace* $W^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration : Si $\bar{P}_\Gamma \in W^{2,p}(\Omega)$ le second membre de (4.14) est dans $L^p(\Omega)$ d'où le résultat d'après [18].

Remarque 4.2 : Cette discrétisation permet de transformer le problème à condition aux limites non régulières sur la frontière libre en une suite de problèmes à conditions aux limites régulières sur la frontière libre. On montre plus loin (*cf.* chap. 5) qu'elle conserve le caractère conservatif du problème. D'après [18, p. 44], on a la proposition suivante.

PROPOSITION 4.5 : *La solution* W *de* (4.14) *est caractérisée par :*

$$-\Delta t \nabla . (h^3 \nabla W) - \bar{g} \geqslant 0 \quad \textit{dans } \Omega$$

$$(-\Delta t \nabla . (h^3 \nabla W) - \bar{g})(W - \psi) = 0 \quad \textit{p.p. dans } \Omega \tag{4.16}$$

$$W - \psi \geqslant 0 \quad \textit{dans } \Omega . \tag{4.17}$$

Ci-dessus, $\bar{g} = \bar{f} + \Delta t g$, est le second membre de (4.14). Introduisons $\bar{\lambda}$ défini par :

$$\bar{\lambda} = -\Delta t \nabla . (h^3 \nabla W) - \bar{g}$$

$\bar{\lambda} \in L^2_+(\Omega)$ d'après la régularité $W^{2,p}$ de W.

Posons $\bar{\lambda} = \lambda h$, h étant positive, λ vérifie alors :

$$\begin{cases} -\Delta t\, \nabla . \, (h^3 \nabla W) - \lambda h = \bar{g} \\ W|_\Gamma = 0 \\ \lambda(W - \psi) = 0 . \end{cases} \tag{4.18}$$

Dans le problème (4.7)-(4.10) faisons le changement de variable $\mu = 1 - \theta$ alors μ vérifie le même problème que λ et par unicité de la solution de (4.7)-(4.10), il vient : $\lambda = \mu$.

La formulation (4.18) nous permet d'énoncer la proposition suivante [13] :

PROPOSITION 4.6 : *Le couple* (W, λ) *solution de* (4.18) *est l'unique point-selle du Lagrangien* $\mathscr{L}$ *définie sur* $H_0^1 \times \Lambda$ *par :*

$$\mathscr{L}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_\Omega h^3 |\nabla v|^2 - \int_\Omega \bar{g} v + \int_\Omega \mu h (\psi - v)$$

où $$\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega) / 0 \leqslant \mu(x) \leqslant 1 \quad p.p. \text{ dans } \Omega \} .$$

Démonstration : Soit (W, λ) la solution de (4.18). D'après (4.17), $W - \psi \geqslant 0$ d'où $\int_\Omega \mu h (\psi - W) \leqslant 0 \quad \forall \mu \in \Lambda$

d'où $$\mathscr{L}(W, \mu) \leqslant \mathscr{L}(W, \lambda) \quad \forall \mu \in \Lambda .$$

Montrons maintenant que :

$$\mathscr{L}(W, \lambda) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathscr{L}(v, \lambda) .$$

La solution W_λ du problème de minimisation ci-dessus vérifie trivialement :

$$\begin{cases} -\Delta t\, \nabla . \, (h^3 \nabla W_\lambda) = \bar{g} + \lambda h \quad \text{dans } \Omega \\ W_\lambda|_\Gamma = 0 . \end{cases} \tag{4.19}$$

(4.19) admet une solution unique, or W vérifie aussi (4.19), d'où par unicité : $W = W_\lambda$, soit $\mathscr{L}(W, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(v, \lambda)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ donc (W, λ) est bien point-selle de $\mathscr{L}$.

— Vérifions maintenant que $\mathscr{L}$ admet un point-selle unique.

Soit (W^*, λ^*) un autre point-selle de $\mathscr{L}$:

on a : $$\mathscr{L}(W, \lambda^*) \leqslant \mathscr{L}(W, \lambda)$$
$$\mathscr{L}(W^*, \lambda) \leqslant \mathscr{L}(W^*, \lambda^*) ,$$

soit en explicitant ces deux inégalités :

$$\int_\Omega h(\lambda - \lambda^*)(W^* - W) \geq 0 . \tag{4.20}$$

Écrivons (4.19) pour W et W^*, par différence, on obtient :

$$\Delta t \int_\Omega h^3 |\nabla(W - W^*)|^2 = \int_\Omega h(\lambda - \lambda^*)(W - W^*) \leq 0$$

d'où $W = W^*$ et par suite $\mu = \mu^*$.

On vient de montrer que la résolution du problème (4.7)-(4.10) revient à trouver l'unique point-selle du Lagrangien $\mathscr{L}$. L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet le calcul simultané de P et θ.

Remarque 4.3 : Ceci prouve que le multiplicateur de Lagrange associé à (4.14) est non seulement ≥ 0 mais aussi ≤ 1.

4.3. Algorithme de type Uzawa pour le calcul de W et λ

Nous donnons ici un algorithme [13] qui permet de calculer W et λ par un procédé itératif.

On se donne λ^0 quelconque dans Λ puis on calcule (W^k, λ^{k+1}) par :

$$\begin{cases} \mathscr{L}(W^k, \lambda^k) \leq \mathscr{L}(v, \lambda^k) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ W^k \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\lambda^{k+1} = P_\Lambda(\lambda^k + \rho h(\psi - W^k)) . \tag{4.22}$$

P_Λ désigne l'opérateur de projection sur Λ pour la norme L^2.

On a le résultat de convergence suivant.

PROPOSITION 4.7 : *Pour* ρ *bien choisi, l'algorithme* (4.21)-(4.22) *converge vers la solution* (W, λ) *de* (4.18).

Démonstration : On peut écrire $\mathscr{L}$ sous la forme classique :

$$\mathscr{L}(v, \mu) = J(v) + (\mu, \phi(v))_{L^2(\Omega)}$$

et montrer que J et ϕ vérifient les hypothèses de convergence [6].

Ici on peut donner une démonstration directe [13] qui permet d'avoir une estimation sur le paramètre de convergence ρ. Posons :

$$\bar{W}^k = W^k - W, \quad \bar{\lambda}^k = \lambda^k - \lambda .$$

D'après la définition de P_Λ on a :

$$P_\Lambda(\lambda + \rho h(\psi - W)) = \lambda$$
$$P_\Lambda(\lambda^k + \rho h(\psi - W^k)) = \lambda^{k+1} .$$

P_Λ est une contraction, d'où :

$$\| \bar{\lambda}^{k+1} \|_{L^2}^2 \leq \| \bar{\lambda}^k - \rho h \bar{W}^k \|_{L^2}^2 .$$

Soit : $$\| \bar{\lambda}^k \|_{L^2}^2 - \| \bar{\lambda}^{k+1} \|_{L^2}^2 \geq 2 \rho \int_\Omega h \bar{\lambda}^k \bar{W}^k - \rho^2 \int_\Omega h^2 | \bar{W}^k |^2 .$$

Écrivons (4.19) pour W^k et W, par différence, on obtient :

$$- \Delta t \, \nabla . \, (h^3 \nabla \bar{W}^k) = \bar{\lambda}^k h .$$

Multiplions par $\bar{W}^k$, il vient :

$$\Delta t \int_\Omega h^3 | \nabla \bar{W}^k |^2 = \int_\Omega h \bar{\lambda}^k \bar{W}^k$$

d'où $$\| \bar{\lambda}^k \|_{L^2}^2 - \| \bar{\lambda}^{k+1} \|_{L^2}^2 \geq 2 \rho \, \Delta t \int_\Omega h^3 | \nabla \bar{W}^k |^2 - \rho^2 \int_\Omega h^2 | \bar{W}^k |^2 ;$$

posons : $$\alpha = \inf_{\bar{Q}} h^3 , \quad \beta = \sup_{\bar{Q}} h^2$$

et soit C_0 l'inverse de la plus petite valeur propre de $- \Delta$ sur H_0^1, il vient :

$$\| \bar{\lambda}^k \|_{L^2}^2 - \| \bar{\lambda}^{k+1} \|_{L^2}^2 \geq \| \bar{W}^k \|_{H_0^1}^2 \rho (2 \, \Delta t \, \alpha - \rho \beta C_0) .$$

Soit maintenant ρ tel que :

$$2 \, \Delta t \, \alpha - \rho \beta C_0 > 0 \Rightarrow 0 < \rho < \frac{2 \, \Delta t \, \alpha}{\beta C_0} . \tag{4.23}$$

Si ρ vérifie (4.23), d'après ce qui précède, on a : $\left\{ \| \bar{\lambda}^k \|_{L^2}^2 \right\}_{k \geq 0}$ est une suite décroissante et minorée donc :

$$\lim_{k \to +\infty} (\| \bar{\lambda}^k \|^2 - \| \bar{\lambda}^{k+1} \|) = 0 .$$

Soit $\lim_{k \to +\infty} \| \bar{W}^k \|_{H_0^1} = 0$ d'où $W^k \to W$ dans $H_0^1(\Omega)$, d'autre part, on a $\| \bar{\lambda}^k \|_{L^2} \leq C$ donc λ^k converge vers λ^* dans L^2-faible. (W, λ^*) vérifie alors (4.18) ; par unicité, on déduit que toute la suite λ^k converge vers λ solution de (4.18).

5. APPROXIMATION INTERNE DU PROBLÈME

5.1. Triangulation du domaine et espace discret

On considère une triangulation régulière $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de Ω, telle que $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ où $h = \max \{h(T)/T \in \mathcal{T}_h\}$. $h(T)$ étant le diamètre de T. Pour éviter toute confusion, on notera dans cette partie l'épaisseur : $\ell(t, x)$ au lieu de $h(t, x)$

$$\Sigma_h = \left\{N \in \bar{\Omega}/N \text{ sommet de } \mathcal{T}_h\right\}$$
$$\mathring{\Sigma}_h = \{N \in \Omega/N \text{ sommet de } \mathcal{T}_h\} .$$

On prend des éléments finis affines par morceaux :

$$V_h = \left\{v_h \in C^0(\bar{\Omega})/v_h|_T \in P_1 , \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_\Gamma = 0\right\} .$$

On note ϕ_h^i les éléments de base de V_h associés aux nœuds N_i, soit : $\phi_h^i(N_j) = \delta_{ij}$.

On définit aussi K_h approximation de K par :

$$K_h = \left\{v_h \in V_h/v_h(N) \geqslant \psi(N) \quad \forall N \in \mathring{\Sigma}_h\right\} .$$

Notons que dans le cas des éléments finis affines par morceaux, (P_1 ou Q_1) $K_h \subset K$.

Pour l'approximation de μ (ou bien de la concentration θ), on introduit la décomposition duale de Ω [16] :

$$\bar{\Omega} = \overline{\bigcup_{N \in \Sigma_h} D_N}$$

où D_N est défini par :

$$D_N = \bigcup_k \{D_N^k/T_k \in \mathcal{T}_h \text{ et } N \text{ sommet de } T_k\}$$
$$D_N^k = \bigcap_{j=1,2} \{x/x \in T_k/\lambda_N^j(x) \leqslant \lambda_N(x)\}$$

λ_N, λ_N^1, λ_N^2 étant les coordonnées barycentriques associées au triangle T_k de sommets N, N^1, N^2 (*fig.* 2).

On définit l'espace d'interpolation associé à cette décomposition

$$L_h = \left\{\mu_h \in L^\infty(\Omega)/\mu_h(x) = \sum_{N^i \in \mathring{\Sigma}_h} \mu_h^i(x)\, \chi_h^i(x)\right\}$$

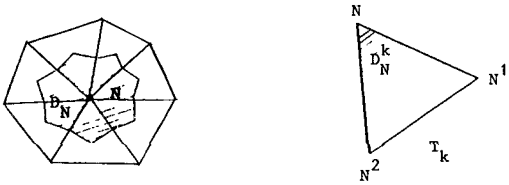

Figure 2.

$\chi_h^i(x)$ est la fonction caractéristique du domaine D_{N^i}.

Et enfin :

$$\Lambda_h = \{\mu_h \in L_h / 0 \leqslant \mu_h \leqslant 1 \text{ p.p. dans } \Omega\} .$$

5.2. Problème discret

On a vu au (§ 4.2) que la résolution de (4.18) se ramène à la recherche du point-selle du Lagrangien $\mathscr{L}$, on introduit ici l'équivalent discret de $\mathscr{L}$ soit :

$$\mathscr{L}_h : V_h \times L_h \to \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L}_h(V_h, \mu_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega \ell^3 |\nabla V_h|^2 - \int_\Omega \bar{g} v_h + \int_\Omega \lambda_h \ell(\psi_h - v_h) \tag{5.1}$$

où ψ_h est l'interpolé V_h de ψ :

$$\begin{cases} \psi_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; \quad \psi_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \\ \psi_h(P) = \psi(P) \quad \forall P \in \Sigma_h . \end{cases} \tag{5.2}$$

— On introduit aussi l'inéquation variationnelle approchée :

$$\begin{cases} W_h \in K_h \\ \Delta t \displaystyle\int_\Omega \ell^3 \nabla W_h . \nabla(\varphi_h - W_h) \geqslant \int_\Omega \bar{g}(\varphi_h - W_h) \quad \forall \varphi_h \in K_h . \end{cases} \tag{5.3}$$

On a la proposition 5.1, dont la vérification est triviale.

PROPOSITION 5.1 : *Le problème* (5.3) *admet une solution unique.*

PROPOSITION 5.2 : *Le Lagrangien défini par* (5.1) *admet un point-selle unique* (W_h, λ_h) *sur* $V_h \times \Lambda_h$ *tel que :*

— W_h *est l'unique solution de* (5.3).

— $\lambda_h(\psi_h - W_h) = 0$.

Démonstration : Le problème maintenant est celui de la recherche d'un point-selle d'une fonctionnelle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Pour l'existence, il suffit de vérifier que les contraintes sont qualifiées. En utilisant le théorème 1.1 de [§ 6, chap. 5], il suffit de vérifier que : $\exists (v_h^i)_{1 \leq i \leq \operatorname{card} \mathring{\Sigma}_h}$ tels que $v_h^i > \psi_h^i \; \forall i$.

Le choix de la triangulation duale nous permet d'avoir un résultat d'unicité sur λ_h, en effet :

Supposons λ_h, λ_h^* deux solutions :

Explicitons $\mathscr{L}_h$ sur $V_h \times L_h$:

$$\mathscr{L}(v_h, \mu_h) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathring{\Sigma}_h} (v_h^i)^2 \alpha_i + \sum_{i<j} v_h^i v_h^j \alpha_{ij} - \sum_i v_h^i \beta_i$$

$$+ \sum_{i \in \mathring{\Sigma}_h} \lambda_h^i \int_{D_i} \ell(\psi_h - v_h) ,$$

avec $$\alpha_i = \int_\Omega \ell \left| \nabla \phi_h^i \right|^2 \quad \alpha_{ij} = \int_\Omega \ell \, \nabla \phi_h^i \, \nabla \phi_h^j \quad \beta_i = \int_\Omega \bar{g} \phi_h^i .$$

D'après la définition de $\mathscr{L}_h$ on a :

$$\mathscr{L}_h(W_h, \lambda_h) = \mathscr{L}_h(W_h, \lambda_h^*) \Rightarrow \int_\Omega \ell(\lambda_h - \lambda_h^*)(\psi_h - W_h) = 0$$

de plus on a : $$\mathscr{L}(W_h, \lambda_h) \leq \mathscr{L}(v_h, \lambda_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

d'où $$\int_\Omega (\lambda_h^* - \lambda_h) \, \ell(V_h - W_h) \leq 0$$

soit $$\sum_{i=1}^{N^h} (\lambda^{*i} - \lambda_n^i) \int_{D_i} \ell(v_h - W_h) = 0 \quad N_h = \operatorname{card} \mathring{\Sigma}_h .$$

Notons l'ensemble des indices voisins de i : $\{f(i)\}$.

$$\int_{D_i} \ell(v_h - W_h) = \sum_{j \in \{f(i)\}} \left(\int_{D_i} \ell \phi_h^j \right) (v_h^j - W_h^j) .$$

Choisissons alors $v_h^j = w_h^j$ sauf au nœud i, il vient :

$$(\lambda_h^{i*} - \lambda_h^i) \left(\int_{D_i} \ell \phi_h^i \right) (v_h^i - W_h^i) \leq 0 .$$

Soit $$\lambda_h^{i*} \leq \lambda_h^i$$

de la même façon on obtient $\lambda_h^i \leq \lambda_h^{i*}$,

soit $$\lambda_h^{i*} = \lambda_h^i .$$

5.3. Résultat de stabilité

On supposera dans ce paragraphe que le système différentiel (4.2) est intégré exactement, et que :

$$|x - X(x, t, \tau)| \leqslant C\,|V|_\infty\,|t - \tau|\,. \tag{5.4}$$

Ces deux conditions sont réalisées en pratique dans l'exemple étudié au § 6.

On reprend les notations (θ, P) en gardant $\ell(t, x)$ pour l'épaisseur $h(x, t)$ et on considère le problème approché qu'on vient de résoudre :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{(\theta_h\,\ell)^{n+1}(x) - (\theta_h\,\ell)^n(X^n(x))}{\Delta t}\,\varphi_h + \int_\Omega \ell^3\,\nabla P_h^{n+1}\,\nabla\varphi_h = 0 \quad \forall\varphi \in V_h & (5.5)\\ P_h^{n+1}\big|_\Gamma = P_\Gamma\,, & (5.6)\\ \theta_h^{n+1} \in \partial\phi(P_h^{n+1})\,. & (5.7)\end{cases}$$

Le choix des éléments finis affines par morceaux nous permet de conserver (5.7) dans le problème approché (*cf.* Prop. 5.2). En utilisant cette remarque, on démontre le résultat de stabilité suivant :

THÉORÈME 5.1 : *Supposons* $P_\Gamma = 0$, *alors le schéma* (5.5)-(5.7) *est* H^1*-inconditionnellement stable pour* P_h :

$$\|P_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \tag{5.8}$$

où C *est une constante indépendante de* h *et de* Δt.

Démonstration : Par (5.7), on a :

$$P_h^{n+1}(\theta_h^{n+1}(x) - \theta_h^n(X^n(x))) \geqslant 0\,. \tag{5.9}$$

Prenons P_h^{n+1} comme fonction test dans (5.5), nous obtenons :

— pour le premier terme :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega [(\theta_h\,\ell)^{n+1}(x) - (\theta_h\,\ell^n)(X^n(x))]\,P_h^{n+1}(x)\,dx\\ &= \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \ell^{n+1}(x)\,\theta_h^{n+1}(x) - \theta_h^n(X^n(x))\,P_h^{n+1}(x)\,dx\,+\\ &\quad + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \theta_h^n(X^n(x))(\ell^{n+1}(x) - \ell(X^n(x)))\cdot(P_h^{n+1}(x))\,dx\,. \end{aligned}$$

Par (5.9) et (5.4) on a :

$$E_n \leq C \left\| P_h^{n+1}(x) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

où C est une constante dépendant uniquement de la fonction régulière $\ell(x, t)$ d'où par (5.4) et (5.5) :

$$\int_\Omega \ell^3 \left| \nabla P_h^{n+1} \right|^2 \leq C \left\| P_h^{n+1}(x) \right\|_{L^2(\Omega)} .$$

Soit en utilisant l'inégalité de Poincaré et les hypothèses de régularité sur ℓ :

$$\left\| P_h^{n+1} \right\|_{H^1(\Omega)} < C ,$$

d'où le résultat.

Remarque 5.1 : L'hypothèse $P_\Gamma = 0$ n'est pas indispensable. Elle sert ici, uniquement à simplifier l'exposé de la démonstration.

Remarque 5.2 : L'estimation (5.8) permet de montrer la convergence du schéma dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$-faible et $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$-faible* pour p, L^∞-* et L^2-faible pour θ, vers une solution du problème (3.3)-(3.6). Et de retrouver les résultats obtenus dans [9] par d'autres méthodes.

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On présente dans ce chapitre des résultats numériques obtenus par la méthode introduite au chapitre IV. Ces résultats concernent un joint d'étanchéité à faces radiales, en régime dynamique.

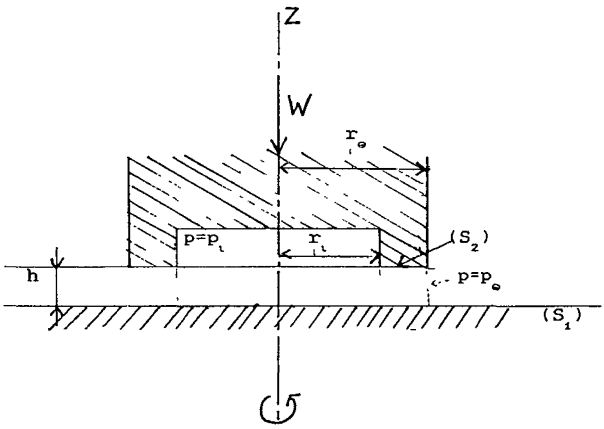

Figure 3. — Vue en coupe du mécanisme.

6.1. Présentation du modèle

Un joint d'étanchéité à face radiale assure le raccord entre une partie fixe et une partie mobile. Les deux faces du joint sont des couronnes circulaires. La face (1) est fixe cependant que la face (2) mobile a deux degrés de libertés :

— La rotation autour de l'axe $\vec{Z}$ avec une vitesse angulaire constante ω.
— La translation le long de $\overrightarrow{OZ}$. Ici on suppose cette translation connue.

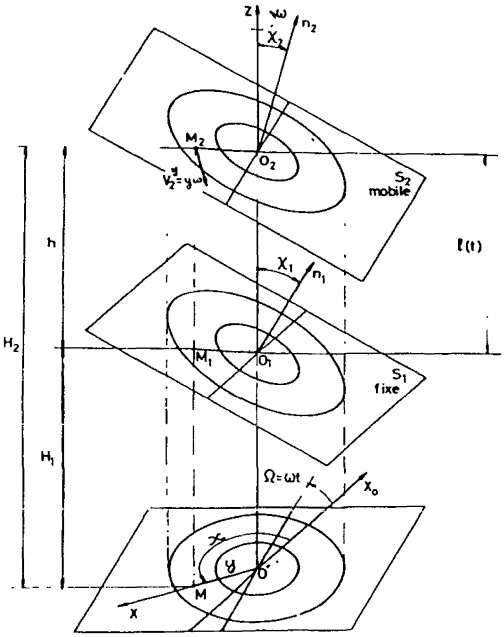

Figure 4. — Schéma du joint.

$h(x, y, t) = \ell(t) + y[\chi_2 \sin(x - \omega t) - \chi_1 \sin x]$, d'après [12]
($h \sim 10^{-2}$ mm, RE = 35 mm, RI = 28 mm).

Les deux faces ne sont pas parallèles et le mésalignement relatif est caractérisé par les paramètres χ_1 et χ_2 cependant qu'une ondulation périodique associée au paramètre ε $(0 < \varepsilon < 1)$ peut apparaître.

Dans le système de coordonnée cartésienne noté (x, y, z), l'épaisseur du film est donnée par :

$$h(x, y, t) = \iota(t) + y(\chi_2 \sin(x - \omega t) - \chi_1 \sin x) ; \tag{6.1}$$

L'épaisseur du film h est très faible devant les autres dimensions et l'équation de Reynolds s'écrit :

$$y\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta h+\frac{\omega}{2}\frac{\partial}{\partial x}\theta h\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\,\mu y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3 y}{12\,\mu}\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0\,. \quad (6.2)$$

Elle est définie sur la projection Ω des faces du joint dans le plan fixe $[xoy]$. Le mouvement relatif des deux surfaces engendre une pression et par là même une portance $W=\iint_\Omega p\,dx\,dy$ qui équilibre la charge supportée par la partie fixe.

Suivant les utilisations, le mécanisme est alimenté en pression par le centre ou l'extérieur ce qui induira des conditions aux limites de type Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Comme il a été signalé dans l'introduction, le modèle avec cavitation est particulièrement intéressant car il assure la continuité du débit, on sera donc conduit à calculer les débits intérieur et extérieur :

$$DI=\int_{\Gamma_i} h^3\frac{\partial p}{\partial n}\,ds\,,\qquad DE=\int_{\Gamma_e} h^3\frac{\partial p}{\partial n}\,ds\,.$$

On introduit les adimensionnements classiques en posant :

$$\bar{P}=\frac{P}{6\,\mu\omega}\,,\qquad t^*=\frac{\omega}{2}t\,,$$

(6.2) devient :

$$y\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\theta h+\frac{\partial}{\partial x}\theta h\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{y}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h^3 y\frac{\partial\bar{P}}{\partial y}\right)=0\,. \quad (6.3)$$

6.2. Rappels sur la méthode de résolution

L'équation (6.3) est résolue dans le domaine

$$\bar{\Omega}=[0,2\pi]\times[RI,RE]\,.$$

On a choisi des éléments finis Q_1. La triangulation duale introduite au début du § 5, est simple à obtenir (*fig.* 5).

Décrivons les différentes étapes de l'algorithme :

— La condition initiale $\theta_0(x)$ est toujours prise égale à 1, c'est-à-dire que le joint est supposé plein à l'instant initial.

— On calcule d'abord le second membre de l'I.V. de première espèce (4.14).

$$\bar{f}(x)=(\theta h)^n\,(X^n(x))-h^{n+1}(x)\,.$$

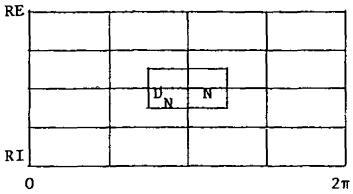

Figure 5.

Pour cela on détermine la caractéristique $X^n(x)$ en résolvant le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{d\tau} = \vec{V}(x, y, \tau) \\ X(x, (n+1)\,\Delta t\,;\, n\,\Delta t) = x \end{cases} \tag{6.4}$$

dans l'équation (6.3), $\vec{V}$ est réduit au vecteur constant (0, 1) et (6.4) s'intègre exactement, la solution étant donnée par (6.5)

$$X^n(x) = x - \Delta t\,. \tag{6.5}$$

Remarques : La deuxième partie du second membre de l'I.V. (4.14) qui provient du relèvement des conditions aux limites est prise en compte automatiquement dans le calcul en fixant les nœuds aux bords à leurs valeurs.

— (6.5) n'introduit pas une condition de calcul de type $\Delta x > \Delta t$ car le domaine Ω est $2\,\pi - x$ périodique.

Le second membre de l'I.V.1. étant calculé, on résout celle-ci par l'algorithme d'Uzawa :

— λ_0 donnée :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{h^3}{y}\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + h^3 y \frac{\partial \bar{P}_k}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_\Omega y\bar{f}\varphi + \int_\Omega y\lambda_k h\varphi \quad \forall \varphi \in V \\ \bar{P}_k - \bar{P}_a \in V \end{cases} \tag{6.6}$$

Si $$\left\| \bar{P}_k - \bar{P}_{k-1} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{Stop}\,. \tag{6.7}$$

Sinon :

$$\lambda_{k+1} = \text{Sup}\,(0, \inf\,(1, \lambda_k - \rho h y \bar{P}_k)) \tag{6.8}$$

aller à (6.6).

Remarques : La projection (6.8) est faite point par point et permet d'obtenir λ seulement sur les nœuds intérieurs. Pour les nœuds sur

$\partial\Omega$ on prend $\lambda = 0$, si on a des pressions d'alimentation strictement positives, sinon on prolonge λ à partir des nœuds intérieurs les plus proches du bord.

— Le paramètre ρ est choisi au départ en fonction de la condition théorique (4.23), puis ajusté numériquement pour avoir un nombre d'itérations minimum.

6.3. Quelques exemples traités

6.3.1. *Un critère de conservation*

L'équation de Reynolds en présence de la cavitation est une loi de conservation (*cf.* § 2).

— Si on considère le problème de départ entre les instants t et $t + \Delta t$ et que l'on intègre formellement sur $\Omega \times [t, t + \Delta t]$, on obtient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_\Omega y \frac{\partial}{\partial t} \theta h - \int_t^{t+\Delta t} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \right) + y \frac{\partial}{\partial x} \theta h = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega y\theta h(t + \Delta t) - \int_\Omega y\theta h(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_0^{2\pi} y_e h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y_e} dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} y_i h^3 \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y_i} dx \right) dt \quad (6.9)$$

ceci en vertu de la condition (2.4) (*cf.* Chap. 2), sur la frontière libre, et du fait que $\cos(\vec{n}, \vec{x}) = 0$ sur la frontière $\partial\Omega$. Le premier membre de l'égalité (6.9), représente la variation du volume V du fluide existant dans le joint, entre les instants t et $t + \Delta t$. Le second membre représente la différence entre les débits de fluide à travers les rayons extérieur et intérieur du joint.

— Considérons maintenant, le problème approché défini par le schéma (4.4)-(4.6) (*cf.* § 4), et intégrons sur Ω, il vient :

$$\int_\Omega y\theta^{n+1} h^{n+1} - \int_\Omega y\theta^n h^n(X^n(x)) =$$

$$= \Delta t \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^{n+1}}{y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h^{n+1} y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right). \quad (6.10)$$

La transformation $x \mapsto X^n(x)$ est de Jacobien 1, et donc on a :

$$\int_\Omega y\theta^n h^n(X^n(x))\, dx = \int_\Omega y\theta^n h^n(z)\, dz$$

$$= V(n\,\Delta t).$$

La solution P^{n+1} est dans $H^2(\Omega)$, de plus $\dfrac{\partial P^{n+1}}{\partial n} = 0$ sur la frontière libre. Le second membre de (5.10) se réduit alors à :

$$\Delta t \,.\, \Delta Q^{n+1} = \Delta t \int_0^{2\pi} \left(y_e h^3 \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \bigg|_{y_e} - y_i h^3 \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \bigg|_{y_i} \right) dx$$

où ΔQ^{n+1} est la différence entre les débits extérieur et intérieur à l'instant $(n+1)\,.\,\Delta t$.

D'où finalement :

$$\Delta t \times \Delta Q^{n+1} = V((n+1)\,\Delta t) - V(n\,\Delta t)\,. \tag{6.11}$$

Remarquons que si la solution approchée P_k est définie par morceaux sur $[0, T]$ par $P_k = P^{n+1}$ sur $[n\,\Delta t,\ (n+1)\,\Delta t]$, (6.11) n'est autre que (6.9). On en déduit alors que ce schéma est conservatif.

L'égalité (6.11) peut être considérée comme un critère de conservation de notre schéma puisque le calcul de la proportion de fluide θ, nous permet d'évaluer à chaque instant le volume existant entre les deux faces du joint.

Dans les trois tests que nous présentons, les paramètres suivants ont été utilisés :

- L'épaisseur au centre $h_0 = 10^{-5}$ m $= 10^{-2}$ mm.
- Les rayons extérieur et intérieur : $RE = 35$ mm, $RI = 28$ mm.
- Les pressions extérieure et intérieure : $Pe = 2$ bars, $Pi = 1$ bar.
- La viscosité : $\mu = 0{,}1$ Pℓ.
- La vitesse angulaire : $\omega = 1\,500$ tr/mn.

6.3.2. *Cas hydrostatique*

Dans ce cas les deux faces sont parallèles et l'épaisseur h est constante :

$$\chi_1 = \chi_2 = 0 \qquad h = h_0\,.$$

La solution est analytique et il n'y a pas de cavité. On a l'expression analytique des débits [15] :

$$Q = \frac{\pi h_0^3 (P_i - P_e)}{6\,\mu(\operatorname{Log} R_E - \operatorname{Log} R_I)}\,, \tag{6.12}$$

On rappelle que la charge ou portance vaut

$$W = \iint_\Omega P\, dx\, dy\,.$$

On donne ci-dessous les débits calculés et le pourcentage d'erreur par rapport au débit théorique (6.12) :

TABLE 6.1

$NX \times NY$	31×11	31×15	31×21	31×25	41×21	39×25	41×31
Charge	1,5066	1,5066	1,5065	1,5065	1,5065	1,5065	1,5065
D.I. (*)	4,0168	4,0310	4,0416	4,0418	4,0416	4,0458	4,0500
D.E. (**)	4,1081	4,0962	4,0873	4,0839	4,0873	4,0839	4,0805
Erreur %	1,2	0,9	0,6	0,5	0,6	0,5	0,4

(*) D.I. : Débit à travers le rayon intérieur.
(**) D.E. : Débit à travers le rayon extérieur.

L'exemple ci-dessus ne présente pas beaucoup d'intérêt du point de vue frontière libre mais permet de mettre en évidence la convergence par rapport au maillage de la solution puisque c'est le seul cas où on connaît une solution analytique du problème.

6.3.3. *Hydrodynamique stationnaire*

On considère maintenant le cas où la face ① est plane et tourne avec une vitesse angulaire ω tandis que la face ② est fixe mais présente une ondulation d'amplitude ε. L'épaisseur h s'écrit :

$$h(x, y) = 1 + \varepsilon \cos x . \tag{6.13}$$

Sur la figure 6, nous avons représenté la variation de la charge et des débits au cours du temps. Nous constatons que la solution converge au bout de deux tours vers une solution stationnaire indépendamment du pas de temps. La périodicité suivant la variable x de la géométrie du mécanisme et des données implique naturellement le caractère périodique de la cavitation.

Les résultats obtenus sur les débits sont donnés par le tableau (6.2) pour $\varepsilon = 0.5$ et un maillage 30×9 :

TABLE 6.2

30×9	Charge N	D.E. $\times 10^4$	D.I. $\times 10^4$
$\Delta t = \frac{\pi}{5}$	288,4	4,95	4,50
$\Delta t = \frac{\pi}{10}$	282,7	4,90	4,40

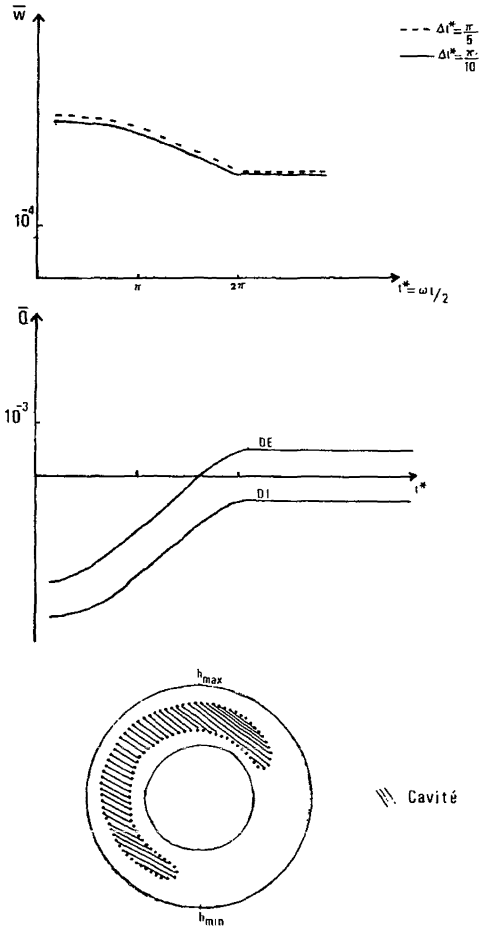

Figure 6. — *En haut :* variation de la charge.
***En bas :* variation des débits.**

Cet exemple est résolu avec le paramètre ρ d'Uzawa : $\rho = 135$ et une précision $\varepsilon = 10^{-4}$. Le nombre moyen d'itérations sur les deux premiers tours est de 30 itérations.

6.3.4. *Hydrodynamique en transitoire à un degré de liberté*

Nous traitons ici le cas où nous avons un seul degré de liberté mais où les faces sont mésalignées ce qui donne une géométrie variable au cours du temps. L'expression de l'épaisseur h du film est donnée par :

$$h(x, y, t) = h_0 + y[\chi_2 \sin (x - \omega t) - \chi_1 \sin x] . \tag{6.14}$$

Nous avons résolu le cas transitoire suivant :

$\chi_2 = 2\,\chi_1$ le défaut principal est situé sur le rotor (Face tournante). $\chi_1 = 2{,}5\ 10^{-5}$ rd .

Nous obtenons une solution périodique après deux tours (*fig.* 7.1). La cavité suit le mouvement du rotor et se déforme légèrement (*fig.* 7.2).

Sur le tableau 6.3, nous donnons les résultats obtenus sur les débits. Le critère de conservation est respecté à 8 % en norme du maximum et à 4 % globalement sur une période. En ce qui concerne les charges, elles sont comparables à celles obtenues par [15], [14]. Pour les débits, à notre connaissance, aucune courbe de comparaison entre les débits sortant et entrant au cours du temps, n'apparaît dans la littérature pour ce problème.

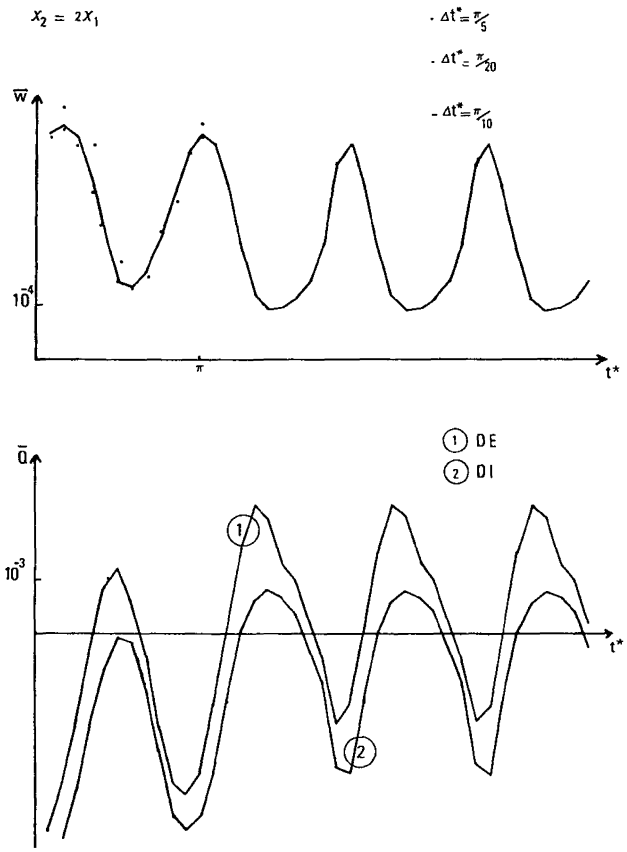

Figure 7.1. — *En haut :* variation de la charge. *En bas :* variation des débits.

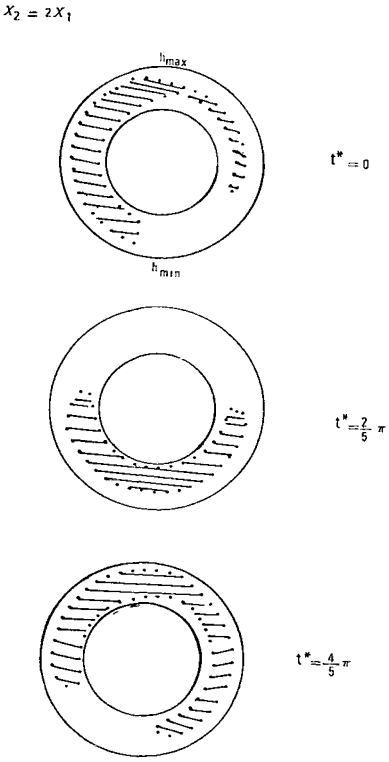

Figure 7.2. — Evolution de la cavité.

Cas 1 : $\Delta t^* = \dfrac{\pi}{10}$

TABLE 6.3

t^*	0	$\frac{\pi}{10}$	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert \Delta Q \rvert \times 10^{12}$ m^3	0	32,1	93,4	90,2	27,7	35,5	69	69,2	47,2	34,2
$\lvert \Delta V \rvert \times 10^{12}$ m^3	2	34,7	96,4	94	28,4	38,3	69,5	68,9	46,2	32,2
$\left\lvert \dfrac{\Delta Q - \Delta V}{\Delta Q_{moy}} \right\rvert$ %	0,04	0,05	0,06	0,07	0,01	0,06	0,01	0,006	0,02	0,04

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BAYADA, M. CHAMBAT, *Existence and uniqueness for a lubrication problem with non regular conditions on the free boundary,* Boll. un Math. Ital., 6, 3*B*, 543-547 (1984).

[2] G. BAYADA, M. CHAMBAT, *Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique,* Journal de Méc. Théor. Appl., vol. 5, 5, 703-729 (1986).

[3] A. BERMUDEZ, J. DURANY, *La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection diffusion stationnaires,* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 21, 1, 7-26 (1987).

[4] M. BOUKROUCHE, M. EL ALAOUI, G. BAYADA, Generalized Hele Shaw type problems, Rap. int. URA 740 Analyse Num. Lyon, 1989.

[5] D. E. BREWE, *Theoretical Modeling of Vapor Cavitation in Dynamically loaded Journal Bearing,* ASME J. of Tribology, 108, 628-638 (1986).

[6] J. CEA, *Optimisation, théorie et algorithmes,* Dunod, Paris, 1971.

[7] A. B. CROWLEY, *On the weak solution of moving boundary problems,* J. Inst. Math. Applics., 24, 43-57 (1979).

[8] A. DEGUEIL, *Résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème de Stefan en termes de température et teneur en matériau non gelé,* Thèse, Univ. Bordeaux, 1977.

[9] M. EL ALAOUI TALIBI, *Sur un problème à frontière libre en mécanique des films minces,* Thèse, Univ. Lyon 1, 1986.

[10] C. M. ELLIOT, *On a finite approximation of an elliptic variational inequality arising from an implicit time discretization of the Stefan problem,* I.M.A., J. Num. Anal. (1981).

[11] H. G. ELROD, *A cavitation algorithm,* J. of Lubrication Technology, 103, 350-354 (1981).

[12] B. FANTINO, J. FRENE, M. GODET, *Conditions d'utilisation de l'équation de Reynolds en mécanique des films minces,* série A, C.R. Acad. Sci., Paris, 262, 691-693 (1971).

[13] R. GLOWINSKI, J. L. LIONS, R. TRÉMOLIÈRES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles,* Dunod, 1976.

[14] R. HAARDT, *Les joints d'étanchéité à faces radiales : les effets transitoires introduits en lubrification hydrodynamique par leur mésalignement,* Thèse, Univ. Lyon 1, 1975.

[15] M. LOHOU, *Hydrodynamique des joints d'étanchéité du type radial,* Thèse, Univ. Lyon 1, 1972.

[16] P. PIETRA, *An upwind finite element method for a filtration,* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 16, 4, 463-481 (1982).

[17] O. PIRONNEAU, *On the transport diffusion algorithm and its application on the Navier Stokes equations,* Numer. Math., 38, 309-332 (1981).

[18] G. STAMPACHIA, D. KINDERLEHRER, *An introduction to variational inequalities and applications,* Academic Press, 1980.