

MICHEL FORTIN

ANDRÉ FORTIN

**Une note sur les méthodes de caractéristiques  
et de Lesaint-Raviart pour les problèmes  
hyperboliques stationnaires**

*Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 23, n° 4  
(1989), p. 593-596

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1989\\_\\_23\\_4\\_593\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_4_593_0)

© AFCET, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE NOTE SUR LES MÉTHODES DE CARACTÉRISTIQUES ET DE LESAIN-T-RAVIART POUR LES PROBLÈMES HYPERBOLIQUES STATIONNAIRES

Michel FORTIN <sup>(1)</sup> et André FORTIN <sup>(2)</sup>

Communiqué par R. TEMAM

---

Resumé. — *Nous montrons que dans le cas des problèmes hyperboliques stationnaires, la méthode de Lesaint et Raviart peut être considérée comme un cas limite d'une méthode de caractéristiques introduite par Bermudez et Durany*

Abstract. — *We show that the Lesaint-Raviart method is a limiting case of a characteristic method introduced by Bermudez and Durany when applied to stationary hyperbolic problems*

### 1. INTRODUCTION

La résolution numérique des problèmes hyperboliques par la méthode des éléments finis présente un très grand intérêt pratique comme le démontre la grande quantité d'études publiées sur le sujet. Parmi les nombreuses méthodes qui ont été développées pour ce type de problèmes, certaines possèdent la propriété enviable de permettre la résolution du problème élément par élément. Cela est rendu possible par l'utilisation d'approximations discontinues de la variable à discrétiser. Dans cette catégorie, on compte principalement les méthodes de caractéristiques sous la forme développée par Benqué et Ronat [1] et celle de Lesaint-Raviart [2]. Nous nous proposons de montrer que la méthode de Lesaint et Raviart est un cas limite de la méthode des caractéristiques lorsque cette dernière est appliquée aux problèmes hyperboliques stationnaires.

---

(\*) Reçu en juin 1988, révisé en juillet 1988.

(1) Département de mathématiques, et statistique, Université Laval, Québec, Canada, G1K 7P4.

(2) Groupe MIAO, Département de mathématiques appliquées, Ecole polytechnique de Montréal, C P 6079, Succursale A, Montréal, Canada, H3C 3A7

## 2. APPLICATION AUX PROBLÈMES HYPERBOLIQUES STATIONNAIRES

La méthode des caractéristiques est très efficace pour le traitement des problèmes hyperboliques instationnaires. Cependant dans le cas stationnaire, on peut se demander ce qu'il advient de cette méthode. D'autre part, malgré des développements théoriques très poussés (voir [3] par exemple) et des résultats numériques probants, l'introduction de la méthode de Lesaint et Raviart reste difficile à justifier dans le cadre d'un développement mathématique standard. Suivant une idée introduite récemment par Bermudez et Durany [4], nous allons appliquer la méthode des caractéristiques au problème stationnaire suivant :

$$(1) \quad \begin{aligned} u \cdot \nabla T &= f && \text{dans } \Omega, \\ T &= g && \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

où  $u$  est un champ de vecteurs supposé connu et  $\Gamma_0$  est la partie entrante de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . Suivant [4], on remplace l'équation (1) par

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{T^k(x) - T^k(X^k(x))}{k} &= f && \text{dans } \Omega, \\ T^k(x) &= g && \text{sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

où l'indice  $k$  exprime la dépendance de la solution par rapport au paramètre  $k$  (pseudo pas de temps). La caractéristique  $S(x, t; \tau)$  est définie par le problème de Cauchy

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= u(S), \\ S(x, t; \tau) &= x, \end{aligned}$$

et on pose également

$$X^k(x) = S(x, t; t - k).$$

La formulation variationnelle associée à (2) sera alors :

$$(4) \quad \int_{\Omega} \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

On remarque immédiatement que (4) est une adaptation au cas stationnaire de la formulation obtenue par Benqué-Ronat [1]. Utilisant une approximation discontinue de  $T$ , on peut alors choisir une fonction test  $v$  s'annulant identiquement à l'extérieur de l'élément courant  $K$  et résoudre (4) élément par élément en suivant une stratégie de parcours du domaine  $\Omega$  analogue à celle décrite dans [2] pour la méthode de Lesaint et Raviart. Notons que le

domaine d'intégration dans (4) se réduit alors à l'élément courant  $K$ .

Pour le même problème, la méthode de Lesaint-Raviart consiste à résoudre sur chaque élément  $K$  de la triangulation :

$$(5) \quad \int_K (u \cdot \nabla T) v \, dx + \int_{\Gamma_{\text{ent}}} (u \cdot n)[T] v \, ds = \int_K f v \, dx$$

où la variable  $T$  est ici encore approximée par des fonctions discontinues d'un élément à un autre et où  $\Gamma_{\text{ent}}$  désigne la partie entrante ( $u \cdot n \leq 0$ ) de la frontière de  $K$ . La terme  $[T]$  désigne le saut de la variable  $T$  à travers la frontière  $\Gamma_{\text{ent}}$  i.e.

$$[T] = T(\text{extérieur de } K) - T(\text{intérieur de } K).$$

Nous allons montrer que (5) est le cas limite de (4) lorsque  $k$  tend vers 0. Il est à remarquer qu'il est possible d'utiliser la méthode de Lesaint-Raviart dans le cas de l'équation de convection-diffusion via une méthode mixte et que le raisonnement qui suit reste valable.

Supposons donc le cas simple de la figure 1 où seule une face  $F_1$  est éclairée et on considère le premier terme de (4) i.e.

$$\int_K \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x))) v}{k} \, dx$$

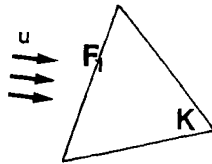


Figure 1.

On divise l'élément  $K$  en 2 régions  $K_1$  et  $K_2$  où  $K_1$  ne contient que les points  $x$  de  $K$  pour lesquels la caractéristique issue de  $x$  reste à l'intérieur de  $K$ . Les points de  $K_2$  ont une caractéristique qui franchit la face  $F_1$ . On a alors la situation de la figure 2.

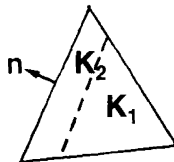


Figure 2.

Si on suppose pour simplifier que  $u$  est constant le long de  $F_1$ , la région  $K_2$  se réduit à une bande de largeur

$$(6) \quad \varepsilon = - (u \cdot n) k$$

On a alors

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_K \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k} v \, dx = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{K_1} + \int_{K_2}$$

D'une part, l'intégrale sur  $K_1$  devient

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \int_{K_1} \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k} v \, dx = \\ = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{K_1} \left( \frac{\partial T}{\partial u} + O(k) \right) v \, dx = \int_K (u \cdot \nabla T) v \, dx$$

D'autre part, l'intégrale sur  $K_2$  dégénère en une intégrale curviligne puisque l'élément d'aire  $dx$  devient

$$dx = - (u \cdot n) k \, ds$$

et on obtient

$$(8) \quad \lim_{k \rightarrow 0} \int_{K_2} \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k} v \, dx = \int_{F_1} (u \cdot n) [T] v \, ds$$

En regroupant (7) et (8), on retrouve la méthode de Lesaint-Raviart

Nous avons ainsi une interprétation très simple de la méthode de Lesaint et Raviart comme étant un cas limite de la méthode des caractéristiques

### 3. REFERENCES

- [1] J P BENQUE, J RONAT, *Quelques difficultés des modèles numériques en hydraulique*, Fifth Int Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Versailles, Rapport E D F E/41/82/03
- [2] P LESAIN, P A RAVIART, « On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equations », dans *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (C de Boor Ed), pp 89-123, Academic Press (1974)
- [3] C JOHNSON, U NAVERT, J PITKARANTA, *Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems*, Comp Meth Appl Mech Eng, 45, pp 285-312 (1984)
- [4] A BERMUDEZ, J DURANY, *La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires*, M<sup>2</sup>AN, vol 21, n° 1, pp 7-26 (1987)