M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

A. BOSSAVIT

Calcul des courants induits et des forces électromagnétiques dans un système de conducteurs mobiles

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, nº 2 (1989), p. 235-259

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_2_235_0>

© AFCET, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE
(Vol 23, n° 2, 1989, p. 235-259)

CALCUL DES COURANTS INDUITS ET DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS MOBILES (*)

par A. BOSSAVIT [1]

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On propose deux méthodes (duales en un certain sens) de calcul approché des forces de Laplace dans un systeme de conducteurs rigides en mouvement (incluant des électro-aimants et des aimants permanents) Elles font appel à certains opérateurs d'impédance sur la frontière des conducteurs, qu'on définit, et à des éléments finis particuliers à l'intérieur des conducteurs des éléments mixtes, associés aux arêtes et aux facettes (par opposition aux éléments traditionnels, associés aux nœuds).*

Abstract. — *Two numerical methods, dual in some precise sense, are proposed for the computation of Lorentz forces within a system of moving rigid conductors and electromagnets (or permanent magnets) These methods rely on suitably defined impedance boundary operators and on special finite-elements in conductive regions . mixed elements, associated with edges or facets (in contrast with conventional node-based elements).*

1. INTRODUCTION

Le sujet de cet article est le calcul des courants de Foucault dans un système de solides conducteurs, rigides, mobiles les uns par rapport aux autres, en interaction électromagnétique entre eux et avec des aimants ou électro-aimants, eux-mêmes mobiles.

Notre objectif est de donner un *modèle* mathématique (variationnel) de cette situation, susceptible d'une simulation numérique.

Pour fixer les idées, considérons un problème de cette nature, des plus simples (*fig.* 1 et [24, 38]). Un électro-aimant A, fixe, fait face à un disque

(*) Reçu en mars 1988, révisé en septembre 1988.
[1] EDF/IMA, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart.

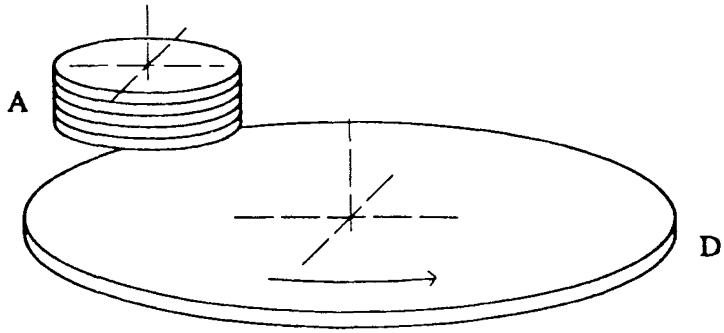

Figure 1. — Principe du frein à disque électromagnétique. Si *A* est alimenté en courant continu, le mouvement de *D* engendre des courants de Foucault dans son épaisseur. L'interaction des deux systèmes de courants freine le disque.

en aluminium D, mobile autour de son axe. A l'instant $t = 0$, on branche l'électro-aimant. Si le disque est en rotation, des courants induits, dits courants de Foucault, apparaissent dans son épaisseur et engendrent une force, entre l'aimant et le disque, qui tend à freiner celui-ci. Comment évolue ce système pour $t \geq 0$? On peut répondre à cette question si les forces d'origine *mécanique* (frottements, inertie, couple résistant, etc.) sur le disque sont calculables en fonction de l'angle de rotation (éventuellement, des valeurs de cet angle jusqu'à l'instant présent). Prenant cet angle θ comme paramètre, on a d'une part un « problème électrique » (calculer les champs et les courants, d'où le couple d'origine électromagnétique), d'autre part un « problème mécanique », d'où le couple d'origine mécanique (y compris les forces d'inertie). Les deux s'équilibrent, d'où une équation déterminant θ, au prix de la résolution d'un problème couplé.

Nous cherchons à appliquer la même stratégie à un système aussi général que possible de corps solides. Leurs positions relatives dans l'espace sont décrites par un paramètre de configuration $u(t)$, constitué par exemple des centre de gravité et des angles d'Euler des différents solides. La dynamique du système est supposée connue, c'est-à-dire qu'on peut déterminer les forces et couples d'origine purement mécanique agissant sur les différents solides connaissant l'évolution de la configuration $t \to u(t)$. Notre objectif est de déterminer les forces et couples d'origine électromagnétique pour cette même trajectoire. Celle-ci est alors déterminée en écrivant l'équilibre des forces, d'où un problème couplé.

Plus concrètement encore, nous supposons disponible un système logiciel capable de calculer l'évolution d'un système de solides connaissant toutes les forces. Notre but est de décrire les principes d'un logiciel complémen-

taire, capable de calculer les forces électromagnétiques pour une trajectoire donnée. En associant les deux, on obtient un système qui résout le problème couplé. Nous cherchons une méthode effectivement implémentable, ce qui suppose une discrétisation des équations du champ.

Les données du problème sont donc 1) la trajectoire $t \to u(t)$, dans l'espace de configuration, 2) la densité de courant j^s dans certaines parties des conducteurs (comme les bobines d'électro-aimant) où elle est connue d'avance. (Les aimants peuvent toujours être assimilés à des distributions de courants.) L'inconnue du problème est la répartition de la densité de courant j dans chacun des conducteurs, et on veut de plus une règle permettant de calculer les forces électrodynamiques à partir de cette information.

Les applications potentielles sont très diverses : magnétoformage [12], lévitation magnétique [6, 8, 10, 14, 16], propulsion éléctromagnétique [26], mouvements d'un satellite artificiel [1, 17], etc., et bien entendu machines et moteurs électriques.

Notre premier résultat est une *formulation variationnelle* de ce problème, montrant en particulier qu'il est *bien posé* (*cf.* (26) et Prop. 1 plus loin). C'est une équation où figurent j et u et où les courants imposés jouent le rôle de second membre. Elle détermine j. Cette équation permet de développer toute la théorie, en particulier de justifier et préciser la règle classique selon laquelle les forces s'obtiennent en dérivant, « à courants constants », l'énergie du champ magnétique par rapport aux paramètres de configuration. Malheureusement, la méthode numérique qu'elle suggère (prendre comme inconnues les densités de courants dans de petits volumes élémentaires, en les supposant constantes dans chacun de ces volumes) n'est pas très commode, car tous les courants élémentaires interagissent à distance, donc le système d'équations linéaires auquel on aboutit par cette approche est plein. On essaie donc de remplacer la variable j par d'autres variables caractéristiques du champ.

On constate alors qu'il y a deux choix possibles, auxquels correspondent deux familles de méthodes : celles où le champ magnétique h est pris pour inconnue, celles où le champ électrique e est pris pour inconnue. Précision importante, il s'agit de h ou de e *dans les conducteurs* seulement, et pas dans l'air, et mesurés dans les repères *locaux,* tels qu'un observateur qui se déplace avec un des conducteurs, et qui garde son orientation par rapport à ce conducteur, les mesurerait. Dans chacune des deux formulations nouvelles, « en h » et « en e » ainsi obtenues, le calcul du champ dans les conducteurs consiste à résoudre une équation aux dérivées partielles, donc mène après discrétisation à des matrices creuses. Les conditions aux limites sont de type intégral : elles font intervenir un opérateur intégral, sur la réunion des surfaces des conducteurs, auquel correspond par discrétisation une matrice pleine, mais d'ordre bien inférieur à celui de la matrice de la

methode en j Ainsi, dans l'ensemble, on a un système d'équations relativement creux, donc maniable

Ce même operateur intégral, qui dépend de la configuration u, permet de calculer les forces une fois connues les valeurs tangentielles du champ (Physiquement, cet operateur est une impédance) Ceci ne veut pas dire, bien entendu, qu'il n'y a pas de forces volumiques exercées par les conducteurs les uns sur les autres, mais que les éléments de réduction (résultante, couple) de ces forces pour chaque conducteur peuvent s'obtenir a partir des valeurs de surface du champ

C'est grâce à l'intervention de cet opérateur intégral qu'il est possible de limiter la discrétisation aux conducteurs et à leurs surfaces (alors que le champ existe dans tout l'espace) Le couplage entre méthodes d'éléments finis et méthodes intégrales est un aspect essentiel des deux méthodes décrites Un autre est le choix des éléments finis eux-mêmes Il s'agit d'éléments « mixtes », dont les degrés de liberte sont associés non pas aux sommets, mais aux arêtes et aux facettes du maillage

La description qu'on vient de donner montre que cet article porte essentiellement sur la *modélisation* passer des lois physiques de la situation à un modèle mathématique propre à une simulation numérique Nous n'insistons ni sur l'existence et l'unicité dans le modèle, qui est facile dans le cas linéaire ($b = \mu h$), ni sur l'analyse numérique des schémas Cela ne veut pas dire que ces questions soient sans intérêt il y a beaucoup à faire, d'une part sur les modèles non linéaires correspondants (changer μh en une fonction non linéaire $B(h)$ dans (33) ci dessous), pour lesquels on ne sait presque rien (voir toutefois [9]), d'autre part sur la convergence et les propriétés éventuelles de superconvergence de ces schémas mixtes Des progres dans cette direction auraient des applications pratiques immédiates

Que ces problemes de modélisation soient encore ouverts peut surprendre C'est que l'électrodynamique des corps en mouvement est une question difficile Ce n'est que tout récemment que l'on en a eu un traitement mathématiquement correct (voir p ex [20]) L'expression des forces d'origine électrodynamique dans un corps déformable en mouvement fait l'objet d'une controverse presque centenaire [15, 33, 35, 36] qui est à peine apaisée aujourd'hui. Le problème est que les équations de Maxwell sont relativistes, alors que la dynamique classique est newtonienne Comment associer des équations qui n'ont pas la même covariance ? Le problème est complique par le fait que tout se passe comme si la vitesse de la lumière était infinie dans les problemes concrets que nous avons en vue (pas de hautes frequences, pas d'ondes, etc), donc on s'autorise a negliger certains termes dans les équations de Maxwell Les équations ainsi obtenues ne sont ni galiléennes ni lorentziennes Trouver dans ces conditions une formulation cohérente du problème couplé ne va pas de soi En fait, il en existe plusieurs [11, 33], dont on prouve, non sans peine, l'équivalence du point de vue des

effets mécaniques, mais qui donnent des expressions différentes pour les forces volumiques et surfaciques [35], ce qui explique la persistance jusqu'à nos jours d'incompréhensions et de polémiques, malgré de patientes mises au point [36].

Certains auteurs toutefois croient devoir préserver la forme relativiste des équations de Maxwell [30], et sont logiquement amenés à traiter la partie « mécanique » des problèmes couplés sous forme relativiste aussi : masse variable, etc. Il nous paraît difficile de répondre de cette façon à la demande de méthodes de calcul venant des électrotechniciens.

Nous résolvons le problème ici en adaptant les moyens aux fins. En effet, les formulations auxquelles on vient de faire allusion visent à résoudre des problèmes d'interaction électromécanique beaucoup plus complexes (piézoélectricité, magnétostriction, fluides magnétiques, etc.) que ceux que nous avons en vue. Or, lorsqu'on étudie le mouvement de corps solides, on n'a pas besoin de l'expression locale des forces, seulement de leurs résultantes et de leurs moments. La théorie présentée ici ne vise donc pas plus loin : les lois physiques qu'elle prend pour point de départ (loi d'Ohm dans le repère mobile lié au conducteur, pas de « courants de déplacement », loi de Faraday) sont celles familières en électrotechnique, et elle donne une expression des forces qui est sans ambiguïté et se prête au calcul numérique.

Ces problèmes de formulation ont retardé le développement des méthodes numériques en électromagnétisme. Pour l'état de l'art, voir [37, 43]. Les méthodes analytiques (qui ont permis d'aborder dans le passé des problèmes complexes [12, 23]) dominent encore. Le « simple » calcul (par des méthodes intégrales) du champ d'une plaque ferromagnétique placée dans un champ uniforme, même sans couplage dynamique, est encore un sujet de recherche [25].

L'une des deux méthodes proposées ci-dessous (celle « en h ») a été développée à EDF, à partir de 1981, principalement par J. C. Vérité [2, 40]. Le code correspondant est connu sous le nom de « Trifou ». Pour une application à un problème couplé, voir [5]. Les éléments mixtes que nous décrivons étaient connus [29, 34], mais la relation avec certaines questions de géométrie différentielle (les « formes de Whitney », [42]) n'a été analysée que récemment [3]. (L'idée doit être portée au crédit de P. R. Kotiuga.)

Le plan est le suivant. Après avoir décrit la situation et le problème, la Section 2 donne les « lois physiques » propres au modèle. La Section 3 introduit la « formulation en j » et la règle de calcul des forces. La Section 4 est consacrée aux deux formulations équivalentes (« en $h - j$», et « en $b - e$»), et à leur discrétisation par éléments finis mixtes et méthodes intégrales associés.

2. LE PROBLÈME

2.1. Notations

Soit E l'espace euclidien à trois dimensions, Ω un ouvert borné de E (à frontière régulière Γ) à p composantes connexes. Soit U la variété (de dimension $6p$, sauf réductions par symétrie) des plongements $u : \Omega \to E$ dont les restrictions aux composantes connexes sont des isométries. Un « mouvement » sera une application continûment différentiable de l'intervalle temporel $[0, T]$ dans U. L'interprétation physique est la suivante : les conducteurs gardent chacun leur forme (isométrie) et ne se rencontrent pas au cours du mouvement (plongement). A l'instant t, ils occupent le domaine $u_t(\Omega)$. On peut supposer que $u_0(x) = x$ pour tout x de Ω (la position à $t = 0$ est alors la configuration de référence).

Soit $\Omega_u = u(\Omega)$. Soit $(Du)_x$ la dérivée de u, au sens de Fréchet, au point x. Soient $\mathscr{F}(\Omega)$, $\mathscr{F}(\Omega_u)$, $\mathscr{F}(E)$ les espaces vectoriels des champs de vecteurs réguliers sur les variétés à bord Ω, Ω_u, E. On définit l'*image directe* $u_* : \mathscr{F}(\Omega) \to \mathscr{F}(\Omega_u)$ par

$$(u_* f)(u(x)) = (Du)_x f(x)$$

et l'*image réciproque* $u^* : \mathscr{F}(E) \to \mathscr{F}(\Omega)$ par

$$(u^* f)(x) = [(Du)_x]^{-1} f(u(x)) .$$

On remarque que $u^* u_*$ est l'identité et que $(Du)_x$ est unitaire.

Pour des champs scalaires, c'est-à-dire des fonctions, les définitions correspondantes sont :

$$(u_* \varphi)(u(x)) = \varphi(x) , \quad (u^* \varphi)(x) = \varphi(u(x)) .$$

Du fait que u est une isométrie, on a, pour des champs f et f' réguliers,

$$\int_\Omega f(x) \cdot f'(x)\, dx = \int_{\Omega_u} u_* f(x) \cdot u_* f'(x)\, dx , \tag{1}$$

où le point dénote le produit scalaire dans E. De même, pour des fonctions,

$$\int_\Omega f(x)\, f'(x) = \int_{\Omega_u} u_* f(x)\, u_* f'(x)\, dx .$$

Toujours du fait de l'isométrie, on a

$$u_* \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} u \quad \varphi \,, \tag{2}$$

$$u_* \operatorname{rot} f = \operatorname{rot} u \quad f \,, \tag{3}$$

$$u_* \operatorname{div} f = \operatorname{div} u_* f \,, \tag{4}$$

etc., et des formules analogues pour u^*.

On appelle n le champ des normales sur Γ, dirigé vers l'extérieur, et $n_u = u_* n$ le champ correspondant sur l'image Γ_u de Γ par u. Si k est un champ sur Ω, le champ scalaire sur Γ de ses composantes normales est noté $n \cdot k$. De même, $n \wedge k$ est le champ surfacique de la partie tangentielle de k, après rotation de 90° à gauche autour de la normale en chaque point. On voit que

$$u_* n \wedge f = n_u \wedge u_* f \,, \quad u_* n \cdot f = n \cdot u_* f \,. \tag{5}$$

Plus loin, nous ferons intervenir les complétés de $\mathscr{F}(\Omega)$, $\mathscr{F}(\Omega_u)$, $\mathscr{F}(E)$, par rapport à certaines normes préhilbertiennes. Alors u_* et u^* désigneront les prolongements linéaires continus de u_* et u^* aux espaces de Hilbert ainsi obtenus.

Remarque : Le champ $n \wedge f$ doit être conçu comme un champ de vecteurs tangents sur la variété Γ, et non pas comme la restriction à Γ d'un champ défini dans E. De ce fait on écrira par exemple « $n \wedge f = 0$ » et non pas « $n \wedge f = 0$ sur Γ ». De même, les opérateurs $\operatorname{rot}_\Gamma$ et $\operatorname{div}_\Gamma$ utilisés plus loin porteront sur des champs de vecteurs tangents à la variété Γ.

De façon générale, les notations telles que b, h, j, etc., désigneront des éléments de $\mathscr{F}(\Omega)$, alors que b_u, h_u, j_u, etc., seront des éléments de $\mathscr{F}(E)$. En général (mais pas obligatoirement), on aura $b_u = u_* b$, etc. Le sens physique à accorder à ces entités va être précisé plus loin.

2.2. Objectifs de la modélisation

Le problème physique auquel on s'intéresse est le suivant. Soit $t \in [0, T] \to u(t)$ un mouvement. Étant donnée une densité de courant j^s, à divergence nulle, connue en fonction du temps sur *une partie* Ω_s de Ω, on se propose de calculer le champ magnétique dans tout l'espace et la densité de courant correspondante, soit j, dans Ω. Le s dans j^s signifie « source », mais j^s n'est pas la cause unique de l'apparition d'un champ électromagnétique : l'autre cause est le mouvement relatif des conducteurs. Noter que Ω_s inclut les aimants permanents, s'il s'en trouve, puisqu'une magnétisation donnée peut toujours être remplacée par une densité de courant équivalente.

On suppose qu'une certaine dynamique est donnée pour les conducteurs et plus précisément qu'on dispose d'une méthode numérique pour calculer

leur mouvement lorsque les forces sont connues. Ces forces (« de Laplace »), dues à l'interaction électromagnétique entre les conducteurs, dépendent non seulement de la position actuelle $u(t)$, mais de toute l'histoire antérieure. Le premier objectif de cet article est de donner une règle pour le calcul des forces de Laplace à l'instant t étant donnée la trajectoire $t \to u(t)$ jusqu'à cet instant. Le second objectif est de décrire une méthode de calcul permettant d'appliquer pratiquement cette règle.

Dans ces conditions, on pourra envisager de simuler *numériquement* la dynamique d'un système de conducteurs mobiles. Nous ne nous proposons pas, toutefois, de faire l'étude *mathématique* de ce problème couplé, qui semble devoir être très compliquée dans le cas général. (On connaît beaucoup d'exemples de comportements chaotiques ; voir entre autres [27, 28].)

2.3. Lois physiques

On va maintenant énoncer les « lois physiques », c'est-à-dire expliciter la structure mathématique particulière qui constitue la modélisation standard du problème des courants de Foucault. Ceci doit être fait avec soin, à cause de la confusion qui règne à ce propos. En effet, les équations traitées en électrotechnique numérique ne sont pas celles de Maxwell, mais un modèle mathématique différent, dérivé des équations de Maxwell (par une procédure dont la justification mathématique constitue encore, selon nous, un problème ouvert) en supposant négligeables les « courants de déplacement » et en supposant les dimensions du système faibles par rapport aux longueurs d'ondes correspondant aux fréquences considérées [22].

La caractéristique première de ce modèle est d'être *newtonien,* non relativiste : il y a un espace absolu (E, déjà introduit), un temps absolu, et toute altération du champ au voisinage d'un point est ressentie sans délai en tout point de E. L'état du système est caractérisé par une configuration u et par des champs de vecteurs sur E, notés b_u, h_u, j_u, qu'on appelle induction, champ magnétique et densité de courant. On a, à tout instant $t \geq 0$ (la configuration étant $u = u(t)$),

$$j_u = 0 \text{ dans } E - \Omega_u\,, \quad j_u = u_* j^s \text{ sur } u(\Omega_s)\,,$$

ainsi que (« théorème d'Ampère ») :

$$\operatorname{rot} h_u = j_u \text{ dans } E \tag{6}$$

et la relation

$$\operatorname{div} b_u = 0 \tag{7}$$

qui exprime l'absence de charges magnétiques. Noter que (6) entraîne

$$\operatorname{div} j_u = 0 \text{ dans } E\,. \tag{8}$$

Enfin, b_u et h_u sont liés par une loi de comportement, comme suit. On se donne une fonction μ sur Ω, dite *perméabilité,* avec $\mu(x) \geq \mu_0$, où μ_0 est la constante bien connue ($\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7}$ en unités MKSA). On pose $\mu_u = u_* \mu$ sur Ω_u, $\mu_u = \mu_0$ en dehors de Ω_u. Alors

$$b_u = \mu_u h_u \,. \tag{9}$$

(La théorie s'étend à des lois de comportement plus compliquées, mais on s'en tiendra ici au cas linéaire que représente (9).)

Si b et h désignent les images réciproques de b_u et h_u (plus brièvement, leurs « retraits », sur le modèle de l'anglais « pull-back »), on voit que

$$b = \mu h \text{ sur } \Omega \,. \tag{10}$$

Si $j = u^* j_u$ est le retrait de j_u, on a

$$\operatorname{rot} h = j \text{ sur } \Omega \tag{11}$$

comme on l'a déjà remarqué, et de même

$$\begin{aligned} \operatorname{div} b &= 0 \text{ sur } \Omega \,, \\ \operatorname{div} j &= 0 \text{ sur } \Omega \,, && (12) \\ n \cdot j &= 0 \text{ sur } \Gamma \,, && (13) \end{aligned}$$

comme conséquences de (1-5) et de (6-7).

Les champs $b = u^* b_u$ et $h = u^* h_u$, définis sur Ω, seront dits « locaux ». Pour les interpréter on considère, à la manière des physiciens, que chaque composante connexe de Ω porte un observateur, qui rapporte ses mesures à un système de référence lié à cette composante connexe. Si x fait partie de cette composante connexe, la densité de courant mesurée par cet observateur au point x à l'instant t est $j(x, t)$. De même il y a un observateur lié à E. S'il mesure ce même courant, il lui trouvera la valeur $j_u(x, t)$ au point $\{x, t\}$. De même pour les champs b et b_u, h et h_u.

2.4. Le modèle, en formulation « forte »

Si Ω_s coïncide avec Ω, le modèle ci-dessus (qui s'appelle alors « modèle de la magnétostatique ») détermine complètement le champ. En effet, tenant j dans Ω (et donc j_u dans E) pour donné, avec (12) et (13), il existe un champ a_u unique, dit « potentiel vecteur », vérifiant

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_u} \operatorname{rot} a_u\right) = j_u \equiv u_* j \text{ dans } E \,, \\ &\operatorname{div} a_u = 0 \,. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Posant alors $b_u = \operatorname{rot} a_u$ et $h_u = b_u/\mu_u$, on a bien (6), (7) et (9).

Dans le cas général, (14) ne suffit pas à déterminer le champ, mais sera un intermédiaire utile, pour lequel on introduit les notations suivantes Soit j donné sur Ω, et a_u la solution de (14) On définit G_u par

$$G_u j = u^* a_u \tag{15}$$

et on note $a = G_u j$ (c'est un champ sur Ω, comme j) On remarque que

$$\operatorname{rot} a = b \ , \quad \operatorname{div} a = 0 \ , \tag{16}$$

toujours par commutativité de rot, ou de div, avec u^*

Pour passer au modele des courants de Foucault, on introduit une nouvelle entité le champ e, dit « champ electrique local », defini sur Ω Celui-ci est lié à j sur $\Omega - \Omega_s$ (c'est-à-dire là où j n'est pas connu d'avance) par une loi de comportement, la loi d'Ohm $j = \sigma e$, où σ, la conductivité, est une fonction à valeurs strictement positives sur $\Omega - \Omega_s$ Comme $j = j^s$ sur Ω_s, il est commode de convenir que $\sigma = 0$ sur Ω_s et d'écrire

$$j = j^s + \sigma e \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{17}$$

On appellera desormais *loi d'Ohm* cette condition, incluant les sources Par ailleurs, on a la *loi de Faraday,* dont nous donnerons l'énoncé suivant, un peu inhabituel Soit γ un circuit ferme dans Ω, τ un champ de vecteurs unitaires tangents à γ Alors

$$\frac{d}{dt} \int_\gamma \tau \cdot a + \int_\gamma \tau \cdot e = 0 \ , \tag{18}$$

où $a = G_u j$

D'apres (16) et le theoreme de Stokes, (18) entraîne en particulier

$$\partial_t b + \operatorname{rot} e = 0 \text{ dans } \Omega \ , \tag{19}$$

ce qui est l'enonce classique de la loi de Faraday (∂_t est la derivee partielle par rapport au temps) Mais (19), qui n'exprime la loi de Faraday que dans Ω, est plus faible que (18) En particulier, (19) n'entraîne pas (18) pour un circuit γ tel que celui de la figure 2, qui ne borde pas une surface contenue dans Ω

On remarquera qu'il n'est question ici que du champ local e et pas du champ électrique dans E tout entier (Celui-ci serait noté e_u, mais prendre garde que e n'est *pas* le retrait de e_u) Cela ne signifie pas que d'éventuelles questions sur le champ électrique en dehors des conducteurs soient dénuées de sens (Voir [2] sur ce point) Mais seul le champ local a droit de cité dans la théorie Il n'apparaît non plus nulle part de termes « en $v \wedge b$ » (où v serait la vitesse) que l'on voit figurer dans la loi d'Ohm telle que la donnent les traités classiques Ces termes apparaissent dans des formulations « eulériennes » du problème (c'est-à-dire, faisant appel à un unique système de réference) mais pas dans la formulation « lagrangienne » (un repère par

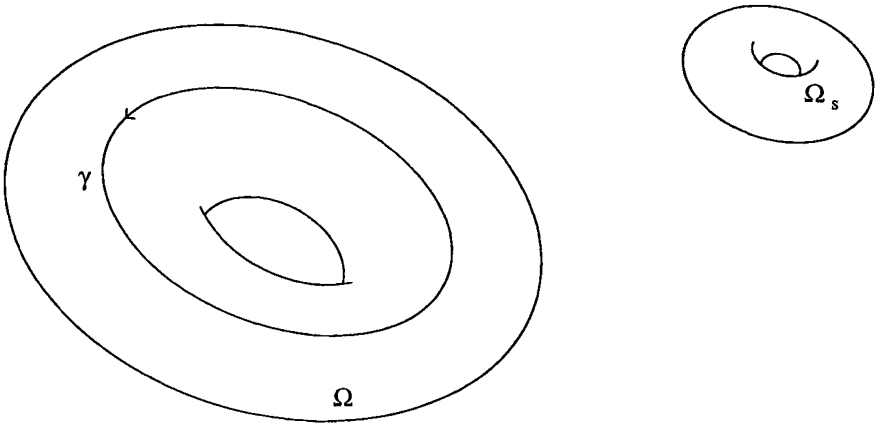

Figure 2. — Ici le conducteur Ω a la forme d'un tore. Pour un circuit γ, tracé dans le tore, qui « fait une boucle », la loi (18) ne peut pas être déduite de (19).

conducteur mobile) que nous développons ici. Ceci peut être vu comme l'un des avantages de cette dernière formulation.

Remarque : On peut montrer que (18) est équivalent à la loi de Faraday (19) exprimée dans E tout entier, soit

$$\partial_t b_u + \operatorname{rot} e_u = 0 \,. \tag{20}$$

Nous ne le faisons pas, pour ne pas avoir à introduire e_u. La forme (18) est celle employée par Maxwell lui-même [21].

Avec (10) (11) (17) (18), joints à la définition de a par (14) (15), on dispose d'une formulation complète du modèle, lagrangienne, en ce sens qu'elle ne fait intervenir que les champs locaux. Nous avons en vue l'approximation numérique de ce modèle par la méthode des éléments finis. Celle-ci demande une formulation *variationnelle* des équations en cause. On va donc rechercher de telles formulations pour le modèle ci-dessus.

3. FORMULATION VARIATIONNELLE EN j

3.1. Espaces fonctionnels

L'espace vectoriel des champs de vecteurs de carré sommable sur une région D est noté $\mathbb{L}^2(D)$. On note

$$\mathbb{L}^2_{\mathrm{rot}}(D) = \{h \in \mathbb{L}^2(D) : \operatorname{rot} h \in \mathbb{L}^2(D)\} \,,$$
$$\mathbb{L}^2_{\mathrm{div}}(D) = \{B \in \mathbb{L}^2(D) : \operatorname{div} b \in L^2(D)\}$$

($L^2(D)$) est l'espace des champs *scalaires* de carré sommable), et on pose

$$J = \{j \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} j = 0 \,, \quad n \cdot j = 0\}\,,$$
$$J^0 = \{j \in J : j = 0 \text{ sur } \Omega_s\}\,.$$

Soit maintenant $t \to j^s(t) \in J$ une fonction donnée du temps, à valeurs dans J. Posons

$$J^s(t) = \{j \in J : j = j^s(t) \text{ sur } \Omega_s\}\,.$$

On voit que $J^s(t)$ est le sous-espace affine $j^s(t) + J^0$ (il dépend donc du temps) et que la condition $j(t) \in J^s(t)$ exprime que j est égal au courant source sur Ω_s à l'instant t.

Plus loin, on aura besoin de considérer des couples de champs tels que h et j, liés par une relation de type $\operatorname{rot} h = j$. C'est pourquoi on pose

$$\begin{aligned} HJ &= \{\{h, j\} \in \mathbb{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) \times J : \operatorname{rot} h = j\}\,, \\ BE &= \{\{b, e\} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) : b = \operatorname{rot} e\}\,, \\ HJ^0 &= \{\{h, j\} \in HJ : j \in J^0\}\,, \\ HJ^s(t) &= \{\{h, j\} \in HJ : j \in J^s(t)\}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

L'image de HJ [resp. de HJ^0] par la projection $\{h, j\} \to j$ est J [resp. J^0]. On note H [resp. H^0] l'image par la première projection. Soit de même B et E les projections de BE. On remarque les inclusions suivantes (qui peuvent être strictes) :

$$B \subset \left\{b \in \mathbb{L}^2_{\text{div}}(\Omega) : \operatorname{div} b = 0 \,, \quad \int_\Gamma n \cdot b = 0\right\},$$
$$H \subset \{h \in \mathbb{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) : \operatorname{div}_\Gamma (n \wedge h) = 0\}\,.$$

On note :

$$n \wedge H = \{n \wedge h : h \in H\}\,, \tag{22}$$
$$n \cdot B = \{n \cdot b : b \in B\}\,. \tag{23}$$

Ce sont des espaces vectoriels de champs définis sur Γ.

Remarque : On montre [31] que $n \cdot B = H^{-1/2}(\Gamma)$ et que $n \wedge H = \{k \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma) : \operatorname{rot}_\Gamma k \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$. On ne se servira pas de ce résultat.

3.2. Des lois physiques à une formulation variationnelle en j

Soit $j \in J$ donné. L'opérateur G_u défini en (14) (15) pour j régulier se prolonge en un opérateur linéaire continu de J dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Par composition

avec la projection sur J dans $\mathbb{L}^2$, on obtient un opérateur sur J, qu'on notera G_u^0, auto-adjoint, compact, défini positif.

Partons de (18), avec $a = G_u j$. Selon des résultats de topologie algébrique bien connus [41], un champ dont les circulations sur tous les circuits fermés de Ω sont nulles est un gradient (même si Ω n'est pas simplement connexe !).

On peut donc exprimer la loi de Faraday (18) en disant qu'il existe une fonction φ, dépendant de t, telle que

$$\partial_t a + e = -\operatorname{grad} \varphi \,. \tag{24}$$

Or les éléments de J sont orthogonaux aux gradients dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Multipliant (24) à droite par $j' \in J^0$ et intégrant sur Ω, on trouve donc

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega G_u j \cdot j' + \int_\Omega e \cdot j' = 0 \quad \forall j' \in J^0 \,. \tag{25}$$

Comme $j' = 0$ sur Ω_s, on peut remplacer e par ρj (où $\rho = 1/\sigma$ est la *résistivité*), d'où, en adoptant la notation (,) pour le produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} (G_u j, j') + (\rho j, j') = 0 \quad \forall j' \in J^0 \,, \\ j(t) \in J^s(t) \,. \end{cases} \tag{26}$$

Si u et j^s sont assez réguliers en t, on a sans peine existence et unicité de j dans (26), pour j donné à $t = 0$ (ou avec périodicité en temps, pour une période donnée). La démonstration se fait en développant j dans la base des vecteurs propres de $\rho^{-1/2} G_u^0 \rho^{-1/2}$. Une fois j trouvé, on en déduit succesivement j_u, a_u par (14), puis b_u et h_u.

Remarque : Si Ω est borné, de frontière régulière, on montre que le φ de (24) est dans $H^1(\Omega)$.

En résumé,

PROPOSITION 1 : *Étant donnés un mouvement $t \to u(t)$ et un courant-source $t \to j^s(t)$ (assez réguliers en t), ainsi que $j(0)$, l'équation* (26) *a une solution $t \to j(t)$ unique dans $L^2([0, T]\,; J)$, qui est la densité de courant dans Ω au cours de ce mouvement.*

3.3. Les forces de Laplace

Soit j la solution de (26). Considérons la quantité

$$E(u, j) = \frac{1}{2} (G_u j, j) = \frac{1}{2} \int_E \frac{1}{\mu_u} |\operatorname{rot} a_u|^2 \,,$$

c'est-à-dire l'*énergie* du champ magnétique. Pour un mouvement donné, et pour les courants correspondant à ce mouvement, $E(u, j)$ est une fonction du temps. De même, G_u est fonction du temps. Différentions (27) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} dE/dt &= (G_u\, \partial_t j, j) + \frac{1}{2}\,([\partial_t G_u]\, j, j) \\ &= (\partial_t (G_u\, j), j) - \frac{1}{2}\,([\partial_t G_u]\, j, j)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

D'après (24), on a (puisque les éléments de J sont orthogonaux aux gradients)

$$0 = (\partial_t G_u\, j + e, j) = (\partial_t G_u\, j + \rho j, j) + \int_{\Omega_s} e \cdot j\,. \tag{29}$$

Or, désignant par $-P$ le dernier terme ci-dessus, on a

$$P = -\int_{\Omega_s} e \cdot j = -\int_{\Omega_s} e \cdot j^s$$

puisque $j = j^s$ sur Ω. Le produit scalaire d'un champ électrique par un courant est une puissance volumique (correspondant ici au travail effectué par les charges électriques du courant donné j^s lorsqu'elles remontent le champ e), donc P est la puissance *apportée au système* par la source de puissance électrique qui entretient le courant j^s. Rapprochant (28) de (29), on a

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\,(G_u\, j, j) + \frac{1}{2}\,([\partial_t G_u]\, j, j) + (\rho j, j) = P\,.$$

Cette identité est un bilan énergétique, montrant comment est partagée la puissance apportée. Les deux termes extrêmes du premier membre étant respectivement la puissance apportée au champ et la puissance dissipée par effet Joule, le terme médian ne peut être, par conservation de l'énergie, que la puissance mécanique, d'où le bilan :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,\langle \text{énergie magnétique} \rangle + \langle \text{puissance mécanique} \rangle \\ &\quad + \langle \text{pertes Joule} \rangle = \langle \text{puissance apportée} \rangle\,. \end{aligned}$$

Or cette « puissance mécanique » est fournie au système par les forces électrodynamiques qui agissent sur les conducteurs, dites « forces de Laplace ». Elle vaut $\langle F(u), du/dt \rangle$. (Dans cette expression, du/dt est un vecteur tangent à U, la variété de configuration, au point u. $F(u)$ est un covecteur, c'est-à-dire une forme linéaire sur l'espace tangent à U en u. Si on appelle u_i les coordonnées de u, la puissance est de la forme $\Sigma_i\, F_i\, u_i$. Les F_i sont ce qu'on appelle des « forces généralisées » en

mécanique : un couple si u_t est un angle, etc. La notation $F(u)$ est un léger abus, car F dépend de la trajectoire jusqu'à l'instant t, et non de u seul.) On a donc

$$\left\langle F(u), \frac{du}{dt} \right\rangle = ([\partial_t G_u]\, j, j)$$

et, par composition des différentiations,

$$F(u) = \frac{1}{2}\,([\partial_u G_u]\, j, j)\,, \tag{30}$$

qui est l'expression finale : les forces s'obtiennent « en différentiant, par rapport au paramètre de configuration u, l'énergie magnétique de la distribution de courant à l'instant t, tout en maintenant constante cette distribution de courant ». (L'énoncé de cette règle, que nous ne donnons que parce qu'il est classique, n'est pas plus clair que (30).)

En résumé,

PROPOSITION 2 : *Au cours du mouvement $t \to u(t)$, les forces de Laplace sont données par* (30), *où j est la solution de* (26).

Le modèle (26) (30), qui fournit les forces connaissant le mouvement, correspond bien à ce que nous cherchions, puisqu'on pourrait, en principe, le discrétiser : il suffirait de prendre j constant par morceaux sur un pavage de Ω, en assurant la continuité normale de j. D'où une méthode numérique. Mais celle-ci n'est pas très attrayante, car la matrice correspondant à l'opérateur G_u de (26) est pleine, sans parler du problème (bien connu par ailleurs, par exemple en hydrodynamique) de l'approximation d'un espace de champs de vecteurs à divergence nulle. Les deux formulations qu'on va maintenant développer sont plus intéressantes, de ces deux points de vue.

4. DEUX FORMULATIONS « À DEUX CHAMPS », ET LEUR DISCRÉTISATION

4.1. Deux opérateurs de bord

On va introduire deux formes bilinéaires continues symétriques, paramétrées par u, sur les espaces $n \wedge H$ et $n \cdot B$ de (22) et (23). Posons, pour k dans $n \wedge H$,

$$\mathbf{S}_u(k, k) = \inf \left\{ \int_{E-\Omega_u} |\bar{h}|^2 : \bar{h} \in \mathbb{L}^2_{\mathrm{rot}}(E - \Omega_u),\ \mathrm{rot}\, \bar{h} = 0,\ n_u \wedge \bar{h} = u_\times k. \right\} \tag{31}$$

Comme $\mathbf{S}_u$ est symétrique, cela suffit à sa définition. L'opérateur linéaire correspondant, de $n \wedge H$ dans son dual, sera noté $\mathbf{S}_u$ lui aussi.

La borne inférieure dans (31) est à prendre sur un sous-espace fermé, donc est atteinte pour un certain $\bar{h}_u$. On remarque (écrire l'équation d'Euler) que celui-ci vérifie div $\bar{h}_u = 0$. Soit maintenant $h \in H$ donné, soit $k = n \wedge h$, et soit

$$u_*^{=} h = u_* h \text{ sur } \Omega_u \,, \quad = \bar{h}_u \text{ sur } E - \Omega_u \,.$$

Ce champ a une interprétation physique intéressante. Soit h_u un champ magnétique physiquement réalisable dans E, c'est-à-dire vérifiant div $h_u = 0$ dans E et rot $h_u = 0$ hors de Ω_u, et à partie tangentielle continue au passage de Γ. Soit h son retrait. Alors h_u est précisément le $u_*^{=} h$ ci-dessus. (Le symbole $^{=}$ signale la continuité de la partie tangentielle.)

Remarque : Un champ h_u physiquement réalisable est à circulation nulle sur tout chemin allant d'un conducteur à un autre (sinon le b_u correspondant serait à flux non nul à travers la surface d'un conducteur, et ceci ne peut avoir lieu, puisque div $b_u = 0$ dans tout l'espace). Remarquer que (31) implique bien la nullité d'une telle circulation pour $\bar{h}_u$.

La deuxième forme bilinéaire, S_u, est définie de même en posant, pour $\psi \in n \cdot B$,

$$S_u(\psi, \psi) = \inf \left\{ \int_{E - \Omega_u} |\bar{b}|^2 : \bar{b} \in \mathbb{L}^2_{\text{div}}(E - \Omega_u),\ \text{div } \bar{b} = 0, n_u \,.\, \bar{b} = u_* \psi \right\} ,$$

et on note également S_u l'opérateur correspondant. Le minimum est atteint en $\bar{b}_u$, pour lequel rot $\bar{b}_u = 0$. On pose (cette fois, $^{\perp}$ rappelle la continuité *normale* du prolongement)

$$u_*^{\perp} b = u_{\perp} b \text{ sur } \Omega_u, \ = \bar{b}_u \text{ sur } E - \Omega_u \,.$$

Si b_u vérifie rot $b_u = 0$ dans E et div b_u hors de Ω_u, et si b est son retrait, $u_*^{\perp} b$ est précisément b_u. Dans le cas où $E - \Omega_u$ est simplement connexe, $\bar{b}_u$ est à b ce que $\bar{h}_u$ ci-dessus est à h. Nous laissons de côté le cas général. En effet, il exige des développements de topologie algébrique que l'usage relativement restreint que nous ferons de S_u ne justifie pas.

Grâce à ces opérateurs, on peut calculer l'énergie d'un champ dont on connaît les valeurs sur les conducteurs dans les repères locaux et dont on sait qu'il satisfait les équations hors des conducteurs. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_E \mu_u |u_*^{=} h|^2 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \mu |h|^2 + \frac{\mu_0}{2} S_u(n \wedge h, n \wedge h) \,, \\ \frac{1}{2} \int_E \nu_u |u_*^{\perp} b|^2 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \nu |b|^2 + \frac{\nu_0}{2} S_u(n \cdot b, n \cdot b) \end{aligned} \tag{32}$$

(où $\nu = \mu^{-1}$ et $\nu_0 = \mu_0^{-1}$). Or les premiers membres ci-dessus représentent l'énergie du champ dans tout l'espace, et les intégrales sur Ω son énergie dans Ω. Donc $\mathbf{S}_u$[resp. S_u] fournit, à un facteur près, l'énergie en *dehors des conducteurs* d'un champ magnétique [resp. d'une induction magnétique] physiquement réalisable, connu sur Ω. Cette énergie ne dépend que du champ tangentiel [resp. de l'induction normale] sur Γ.

Nous appellerons « impédances » les opérateurs $\mathbf{S}_u$ et S_u, à cause de ce lien avec l'énergie. (On pourrait justifier cette terminologie de façon plus serrée, mais c'est sans objet ici. L'opérateur S_u^{-1} est ce qu'on appelle « capacité » de l'ouvert $E - \Omega_u$ dans [7].)

4.2. Formulation en $h - j$

PROPOSITION 3 : *Soit $t \to j(t)$ la solution de* (26) *et*

$$h(t) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} G_{u(t)}\, j(t)\,.$$

Alors le couple $\{h(t), j(t)\}$, élément de $HJ^s(t)$ (cf. (21)*), est la solution de l'équation variationnelle*

$$\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \mu h \cdot h' + \mu_0\, \mathbf{S}_u(n \wedge h, n \wedge h')\right] + \int_\Omega \rho j \cdot j'$$
$$\cdots = 0 \quad \forall\, \{h', j'\} \in HJ^0\,. \tag{33}$$

Démonstration : Par définition de G_u (*cf.* (14), (15)) et par (3), on a $\operatorname{rot} h = j$ dans Ω à chaque instant. D'autre part, pour $\{h', j'\} \in HJ^0$,

$$\begin{aligned}
(G_u j, j') &= \int_\Omega a \cdot \operatorname{rot} h' = \int_{\Omega_u} a_u \cdot \operatorname{rot} h'_u \\
&= \int_E a_u \cdot \operatorname{rot} u_*^{=}\, h' \\
&= \int_E \operatorname{rot} a_u \cdot u_*^{=}\, h' = \int_E b_u \cdot u_*^{=}\, h' \\
&= \int_E \mu_u\, u_*^{=}\, h \cdot u_*^{=}\, h'
\end{aligned}$$

d'où (33) en substituant cette expression dans (26) et en utilisant (32).

Cette formulation, équivalente à (26), est meilleure en pratique, car elle se prête à une discrétisation par éléments finis sur Ω, donc conduit à une matrice creuse. Certes, la matrice correspondant à l'opérateur de bord $\mathbf{S}_u$ sera pleine, quelle que soit la méthode de discrétisation, mais sa taille n'est que le nombre de degrés de liberté de surface, bien inférieur à celui des

degrés de liberté dans tout le volume, qui était la taille de la matrice dans la méthode en j On voit d'avance que dans cette méthode, la principale difficulté sera le calcul de l'approximation de $\mathbf{S}_u$, calcul qu'il faut recommencer à chaque pas de temps, sauf exception Mais on ne pouvait s'attendre à moins il faut bien que le mouvement apparaisse quelque part dans le calcul Il est remarquable qu'il n'intervienne que dans un terme de bord : on peut donc calculer l'interaction entre les conducteurs en fonction du champ à la surface de ceux-ci uniquement

Montrons, en particulier, comment les forces de Laplace peuvent être obtenues à l'aide de cet opérateur de bord, en fonction du seul champ tangentiel

D'après (30), il faut dériver $E(u, j)$ par rapport à u en gardant j constant Soit u la configuration, j et h les champs dans les repères locaux a l'instant correspondant. Soit v une configuration voisine de u Soit $h_v = (\text{rot}\, a_v)/\mu_v$, avec a_v donné par (14) Alors,

$$E(v, j) = (G_v j, j) = \int_E \mu_v |h_v|^2 \tag{34}$$

Soit maintenant $g_v = v_*^{=} h$ Ce champ n'est pas égal à h_v, mais comme $\text{rot}\, h_v = \text{rot}\, g_v$ dans E, il existe ψ, fonction de u et v, telle que

$$h_v = g_v - \text{grad}\, \psi(u, v)$$

Donc.

$$\begin{aligned} \int_E \mu_v |g_v|^2 &= \int_E \mu_v |h_v + \text{grad}\, \psi|^2 \\ &= \int_E \mu_v |h_v|^2 + \int_E \mu_v |\text{grad}\, \psi(u, v)|^2 \end{aligned} \tag{35}$$

(puisque $\text{div}\,(\mu_v h_v) = 0$). Comme $\psi(u, u) = 0$, la dérivée du second membre de (34) par rapport à $v = u$ est aussi celle du second membre de (35), donc celle de

$$\int_\Omega \mu |h|^2 + \mu_0 \mathbf{S}_v(n \wedge h, n \wedge h)$$

d'après (32). La contribution de Ω étant fixe, on obtient la règle suivante

PROPOSITION 4 *Au cours du mouvement $t \to u(t)$, les forces de Laplace sont données par*

$$F(u) = \frac{1}{2} \mu_0\, \partial_u \mathbf{S}_u(n \wedge h, n \wedge h)\,, \tag{36}$$

où h est la solution de (33)

En d'autres termes, compte tenu de la définition de $\mathbf{S}_u$ donnée en (32), « les forces de Laplace s'obtiennent en différentiant, par rapport au paramètre de configuration u, l'énergie du champ magnétique dans la région extérieure aux conducteurs, tout en maintenant constante la partie tangentielle de ce champ à la surface des conducteurs ».

Ainsi, on dispose d'un nouveau modèle susceptible de fournir les forces connaissant le mouvement : (33), (36). On verra plus loin comment le discrétiser.

4.3. Symétrie des équations, et dualité

Il existe une méthode duale de la précédente, où les deux champs sont b et e au lieu de h et j. Nous ne donnerons pas la dérivation détaillée, mais seulement le résultat. En revanche, il nous paraît nécessaire d'expliquer le pourquoi de cette dualité : on le trouve en considérant les champs b, h, etc., comme des *formes différentielles.* Ce point de vue, qui est si courant en physique moderne, n'est pas encore adopté par les spécialistes du calcul des courants de Foucault, sauf rares exceptions [18]. Or il est doublement intéressant, à notre avis, car d'une part il révèle une certaine symétrie des équations, qui à son tour suggère l'existence de la méthode duale annoncée, d'autre part il mène de façon naturelle aux « bons » éléments finis (des éléments mixtes) pour la discrétisation des deux méthodes.

Nous nous contenterons d'une définition simplifiée, qui ne vaut que pour l'espace euclidien à trois dimensions E. Une forme différentielle sur E, de degré p, est un champ d'applications multilinéaires alternées à valeurs réelles : donc, si ω est une telle forme, sa valeur ω_x au point x de E est une machine qui à p vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_p$ de E associe un nombre réel, $\omega_x(\xi_1, \ldots \xi_p)$, dépendant linéairement des ξ_i, et changeant de signe si on permute deux d'entre eux. (Cette dernière clause fait que toute forme de degré supérieur à 3 est identiquement nulle sur E.)

A un champ de vecteurs donné, on peut de deux façons différentes faire correspondre une forme différentielle. Première façon : soit h un champ, l'application $\xi \to h(x) \cdot \xi$ est linéaire, donc répond à la définition. Le champ de ces applications (une en chaque point x) est une forme de degré 1, ou 1-forme, que nous noterons ${}^1h$. Deuxième façon : soit b un champ de vecteurs, le champ des applications bilinéaires alternées $\{\xi, n\} \to b(x) \cdot (\xi \wedge n)$ est une 2-forme, notée ${}^2b$. De même à une fonction φ correspond une 3-forme, à savoir le champ des applications trilinéaires $\{\xi, n, \zeta\} \to \varphi(x)(\xi, \eta, \zeta)$, où $(\ , \ , \ )$ est le produit mixte dans E. On la note ${}^3\varphi$. Enfin, la même fonction peut être considérée comme une 0-forme, notée ${}^0\varphi$.

Réciproquement, à toute forme correspond un champ de vecteurs (si $p = 1$ ou 2) ou une fonction si $p = 0$ ou 3. (Ceci n'est plus vrai en dimension supérieure à 3.)

Il existe sur les formes une opération de dérivation, notée d, qui va des p-formes aux $(p+1)$-formes. On a (et ceci peut être pris comme définition de de d, dans une approche élémentaire),

$$d^0 \varphi = {}^1(\text{grad}\, \varphi)\,,\ d\ {}^1h = {}^2(\text{rot}\, h)\,,\ d\ {}^2b = {}^3(\text{div}\, b)\,,\ d\ {}^3\varphi = 0\,.$$

De même un autre opérateur général, l'opérateur $*$ de Hodge, peut être défini élémentairement par

$$*\,{}^1h = {}^2h\,,\quad *\,{}^2b = {}^1b\,.$$

Avec ces notations, les équations des courants de Foucault deviennent

$$\begin{aligned} d\ {}^1h &= {}^2j\,, & {}^2b &= \mu * {}^1h\,,\\ d\ {}^1e &= -\,\partial_t {}^2b\,, & {}^2j &= \sigma * {}^1e + {}^2j^s\,. \end{aligned}$$

On voit l'analogie entre les paires h et j d'une part, e et b d'autre part. Elle suggère une démarche parallèle à celle que nous avons suivie jusqu'ici, qu'on peut décrire rapidement comme suit.

4.4. Formulation en $b - e$

Alors que notre point de départ plus haut était j, la densité de courant sur Ω, partons ici de b, l'induction locale, définie sur Ω. Posons $\beta = -\,\partial_t b$. A partir de β et de u, on peut construire (comme plus haut à partir de j et de u) tous les éléments du champ, d'où une équation intégro-différentielle analogue à (26), portant sur β. On la transforme en travaillant sur le couple $\{\beta, e\}$, élément de l'espace BE, pour aboutir à l'équation variationnelle :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega (\sigma e + j^s)\,.\,e'\right] + \nu_0\, S_u(n\cdot\beta, n\cdot b') + \dots\\ &\dots + \int_\Omega \nu\beta\,.\,b' = 0 \quad \forall\ \{\beta', e\} \in BE\,, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

où l'inconnue est le couple $\{\beta, e\} \in BE$. On trouve b par $\beta = -\,\partial_t b$.

Cette formulation a les mêmes avantages que (33) : matrices creuses (malgré le bloc plein correspondant à S_u) et calcul des forces à partir de la composante normale de l'induction sur Γ. On a en effet

$$F(u) = \frac{1}{2}\,\nu_0\, \partial_u S_u(n\cdot b, n\cdot b)\,.$$

Il reste à discrétiser (33) et (37).

4.5. Discrétisation de (33) et (37)

Dans l'esprit de la méthode de Galerkine, on a besoin d'une famille finie de champs de vecteurs de HJ ou de BE, qui sera la base d'un sous-espace d'approximation. On construit facilement de telles bases pour H et J [resp. pour B et E] séparément, mais en trouver qui satisfassent la contrainte

$$\operatorname{rot} h = j \,[\text{resp. } \operatorname{rot} e = \beta\,]$$

est une sérieuse difficulté, que l'on ne peut surmonter avec les éléments finis habituels, dont les degrés de liberté sont associés aux nœuds du réseau. C'est tout le problème des éléments finis pour les approximations à « deux champs » [13], ou « éléments mixtes ».

Or la théorie des formes différentielles fournit l'outil voulu. Ce sont les « formes de Whitney » [42], une famille de formes polynomiales par morceaux sur un maillage simplicial, de degré polynomial 1 au plus, pour toutes les valeurs de p de 0 à 3. Nous n'avons besoin que de celles de degré $p = 1$ ou 2, et nous décrivons les champs de vecteurs correspondants, dits « éléments de Whitney ». Soit un pavage de Ω par des tétraèdres (n'ayant en commun qu'une facette, une arête, ou un sommet). Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{F}$ les ensembles des arêtes et des facettes, dont on identifiera les éléments en donnant la liste de leurs sommets : arête $\{i, j\}$, facette $\{i, j, k\}$, etc. Soit $x \to \lambda(x)$ la coordonnée barycentrique de x relative au sommet i (avec $\lambda_i(x) = 0$ si x ne fait pas partie d'un tétraèdre ayant i pour sommet). A chaque arête $\{i, j\}$, on associe l'élément de Whitney

$$w_{ij} = \lambda_i \nabla\lambda_j - \lambda_j \nabla\lambda_i \tag{38}$$

(∇ pour grad). Le champ de vecteurs w_{ij} a pour support la réunion des tétraèdres qui ont l'arête $\{i, j\}$ en commun. On vérifie, à l'aide d'un peu de géométrie élémentaire, que la partie tangentielle de w_{ij} est continue au passage des facettes, et que les *circulations* de w_{ij} sont nulles sur toutes les arêtes sauf l'arête $\{i, j\}$, où la circulation est égale à 1. Donc, si on cherche h dans (33) comme combinaison linéaire

$$h = \sum_{\{i,j\} \in \mathscr{A}} h^{ij} w_{ij} \tag{39}$$

d'éléments de Whitney de degré 1, h^{ij} est la circulation de h sur $\{i, j\}$. C'est pourquoi w_{ij} est un « élément d'arête ». (Le sous-espace engendré est bien le même que celui des éléments d'arêtes décrits dans [29]. La formulation de Whitney (38) a l'avantage de donner directement une base.)

De même, il y a des éléments de facettes, associés à des formes de degré 2 :

$$w_{ijk} = 2(\lambda_i \nabla\lambda_j \wedge \nabla\lambda_k + \lambda_j \nabla\lambda_k \wedge \nabla\lambda_i + \lambda_k \nabla\lambda_i \wedge \nabla\lambda_j) ,$$

avec continuité normale, et tous les *flux* nuls sauf celui à travers $\{i, j, k\}$, égal à 1. Le point essentiel est que si h est comme en (39), rot h est une combinaison linéaire d'éléments de facettes.

Donc, pour discrétiser (33), on cherche h sous la forme (39) et j sous la forme rot h, et on prend des fonctions-test h' et j' de même forme. Pourvu que l'on sache discrétiser $\mathbf{S}_u$, on aboutit ainsi à un système différentiel dont les inconnues sont les degrés de liberté h^{ij} associés aux arêtes, c'est-à-dire les circulations de h le long des arêtes. De même, pour discrétiser (37), on écrit e comme combinaison linéaire d'éléments d'arête et β (et donc b) comme combinaison linéaire d'éléments de facette. La relation $\beta = \text{rot}\, e$ subordonne les degrés de liberté de β à ceux de e. De nouveau, pourvu que l'on sache discrétiser S_u, on aboutit à un système d'équations différentielles dont les inconnues sont les degrés de liberté d'arête e^{ij}, c'est-à-dire les circulations de e le long des arêtes.

Il reste à trouver une approximation des opérateurs d'impédance. Ce problème constitue un thème de recherches à lui seul. On se contentera d'indiquer *une* méthode (voisine de celle utilisée dans « Trifou », *cf.* [4]) et seulement dans le cas où $E - \Omega_u$ est simplement connexe. On suppose pour simplifier la notation que Ω_u coïncide avec Ω, et on omet le u.

Soit donc k un champ tangentiel sur Γ pris dans $n \wedge H$. De ce fait, par définition de H, il existe un potentiel φ sur Γ (unique à une constante additive près) tel que $k = n \wedge \text{grad}_\Gamma \varphi$. Pour calculer $\mathbf{S}$, il faut trouver h dans $E - \Omega$ tel que rot $h = 0$, div $h = 0$ et $n \wedge h = k$. Cela revient à trouver Φ dans $E - \Omega$, harmonique, nulle à l'infini, de trace φ sur Γ, et à poser $h = \text{grad}\, \Phi$. C'est le problème de Dirichlet extérieur, que l'on sait résoudre par la méthode des éléments de frontière. Symétriquement, le calcul de S se ramène à la résolution d'un problème de Neumann extérieur.

CONCLUSION

On a donné une formulation variationnelle du problème du calcul des courants de Foucault, des champs magnétiques, et des forces électrodynamiques, pour un système de conducteurs rigides, mobiles les uns par rapport aux autres, selon une loi donnée, en présence de courants inducteurs connus. Deux méthodes (duales) de calcul par éléments finis mixtes et éléments de bord associés ont été décrites et on a donné une règle de calcul des forces pour ces deux méthodes.

RÉFÉRENCES

[1] S. V. BOGATYREV, V. V. STRYGIN, « Stability of stationary motions of a conducting solid about the center of mass in a magnetic field », *Izv. AN SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela, 21,* 5 (1986), pp. 30-35 (trad. Allerton Press).

[2] A. BOSSAVIT, « Eddy-currents in a system of moving conductors », in *The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua* (G. A. Maugin, ed.), North-Holland (Amsterdam), 1984, pp. 345-350.

[3] A. BOSSAVIT, « Mixed finite elements and the complex of Whitney forms », in *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI* (J. R. Whiteman, ed.) Acad. Press (London), 1988.

[4] A. BOSSAVIT, J. C. VÉRITÉ, « The « Trifou » code : Solving the 3-D Eddy Currents Problem by Using *h* as State Variable », *IEEE Trans., MAG-19,* 6 (1983), pp. 2465-70.

[5] A. BOSSAVIT, J. C. VÉRITÉ, « Modélisation d'une machine sans fer avec le code « Trifou » », *Revue Générale de l'Électricité,* 3 (1985), pp. 227-32.

[6] C. P. BRITCHER, P. N. FORTESCUE, G. A. ALLCOCK, M. J. GOODYER, « Investigation of Design Philosophies and Features Applicable to Large Magnetic Suspension and Balance Systems », NASA CR-162433 (November 1979).

[7] M. CESSENAT, « Chap. 9 (Exemples en électromagnétisme et en physique quantique) », in *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* (R. Dautray, J. L. Lions, eds.), Masson (Paris), 1985.

[8] D. CHU, F. C. MOON, « Dynamic instabilities in magnetically levitated models », *J. Appl. Phys., 54,* 3 (1983), pp. 1619-25.

[9] A. DAMLAMIAN, *Homogenization for Eddy Currents,* Delft Progress Report, 6 (1981), pp. 268-75.

[10] G. DEVELEY et coll., « Lévitation électromagnétique d'une sphère solide conductrice », *L'onde électrique, 56,* 4 (1976), pp. 210-13.

[11] R. M. FANO, L. J. CHU, R. B. ADLER, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces,* Wiley (London), 1960.

[12] C. FLUERASU, « The use of transient parameters in the study of electromagnetic forming », *Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotech. et Energ., 14,* 4 (1969), pp. 565-85.

[13] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations,* Lecture Notes in Math. 749, Springer (Berlin), 1979.

[14] E. HABERMANN, Y. DESTOMBES, « Le palier magnétique actif : principe, caractéristiques, applications », *Revue Française de Mécanique,* 1 (1985), pp. 51-56.

[15] S. HAMMOND, « A short modern review of fundamental electromagnetic theory », *Proc. IEEE, 101, Part I,* 130 (1954), pp. 147-66.

[16] S. ISKIERKA, « Analysis of an induction bearing by the finite element method », *Archiv für Elecktrotechnik, 67* (1984), pp. 375-80.

[17] A I KOBRIN, Yu G MARTYNENKO, « Dvizhenie provodyashchego tverdogo tela okolo tsentra mass v medlenno izmenyayushchemsya magnitnom pole », *DAN SSSR, 261* (1981), pp 1070-73

[18] P R KOTIUGA, *Hodge Decompositions and Computational Electromagnetics,* These, Universite McGill (Montreal), 1984

[19] L LANDAU, E LIFCHITZ, *Theorie du champ,* Mir (Moscou), 1969

[20] G A MAUGIN, A C ERINGEN, « On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent », *Journal de Mecanique, 16,* 1 (1977), pp 101-47

[21] J C MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism,* Clarendon Press (Oxford), 1982

[22] J R MELCHER, *Continuum Electromechanics,* The MIT Press (Cambridge, Mass), 1981

[23] P R METHA, R L SWART, « Generalized Formulation for Electromagnetic Forces on Current-Carrying Conductors », *IEEE Trans , PAS-86,* 2 (1967), pp 155-65

[24] M MIKULINSKY, S SHTRIKMAN, « Optimization of an eddy-current damper », *Electric Machines and Electromechanics,* 5 (1980), pp 417-32

[25] A MINATO, T TONE, K MIYA, « Three-dimensional analysis of magnetic field distortion of ferromagnetic beam-plates by the boundary element method », *Int J Num Meth Engng , 23* (1986), pp 1201-16

[26] F C MOON, *Magnetosolid Mechanics,* Wiley (New York), 1984

[27] F C MOON, P J HOLMES, « A Magnetoelastic Strange Attractor », *J Sound Vib 65,* 2 (1979), pp 275-96

[28] F C MOON, G X LI, « Chaotic Dynamics and Magneto-Mechanical Systems », in Ref [43], pp 41-52

[29] J C NEDELEC, « Mixed Finite Elements in $\mathbb{R}^3$», *Numer Math , 35* (1980), pp 315-41

[30] S PAPAZOV, R STANCHEVA, « Electromagnetic effects excited by magnetic loops », *Archiv fur Elektrotechnik, 69* (1986), pp 247-53

[31] L PAQUET, « Problemes mixtes pour le systeme de Maxwell », *Annales Fac Sc Toulouse,* 4 (1982), pp 103-41

[32] A PATECKI, G SZYMANSKI, « Electrodynamic Forces at Thin Non-Magnetic Tapes Placed Above Ferromagnetic Plates », *Archiv fur Elektrotechnik, 65* (1982), pp 93-96

[33] P PFNFIELD, H A HAUS, *Electrodynamics of Moving Media,* The MIT Press (Cambridge, Mass), 1967

[34] P A RAVIART, J M THOMAS, « A mixed finite element method for second order elliptic problems », in Lecture Notes in Math 606, Springer (New York), 1977

[35] R E ROSENSWEIG, *Ferrohydrodynamics,* Cambridge U P (Cambridge), 1983

[36] J G TERNAN, « Equivalence of the Lorentz force and Ampere force laws in magnetostatics », *J Appl Phys , 57,* 5 (1985), pp 1743-45

[37] C. W. TROWBRIDGE, « Low Frequency Electromagnetic Field Computation in Three Dimensions », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 52* (1985), pp. 653-74.

[38] K. VENTAKARATNAM, D. RAMACHANDRA RAJU, « Analysis of eddy-current brakes with non-magnetic rotors », *Proc. IEEE, 124*, 1 (1977), pp. 67-70.

[39] J. C. VÉRITÉ, « Calculation of Multivalued Potentials in Exterior Regions », *IEEE Trans., MAG-23,* 3 (1987), pp. 1881-87.

[40] J. C. VÉRITÉ, et coll., « Trifou : un code de calcul tridimensionnel des courants de Foucault », in *Actes du colloque MODELEC* (La Grande Motte, 22-24 octobre 1984), Pluralis (Paris), 1984, pp. 343-58.

[41] C. VON WESTENHOLZ, *Differential Forms in Mathematical Physics,* North-Holland (Amsterdam), 1981.

[42] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory,* Princeton U. P. (Princeton), 1957.

[43] Y. YAMAMOTO, K. MIYA, *Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures* (Proc. IUTAM Symposium, Tokyo, 12-17 Oct. 1986), North-Holland (Amsterdam), 1987.