

T. HADHRI

**Prise en compte d'une force linéique de frontière dans un modèle de plaques de Hencky comportant une non-linéarité géométrique**

*Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 22, n° 3 (1988), p. 457-468

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1988\\_\\_22\\_3\\_457\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1988__22_3_457_0)

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



**PRISE EN COMPTE D'UNE FORCE LINÉIQUE DE FRONTIÈRE  
DANS UN MODÈLE DE PLAQUES DE HENCKY  
COMPORTANT UNE NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE (\*)**

par T. HADHRI (1)

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On considère dans ce travail un modèle de plaques élastoplastiques régies par une loi de type Hencky et on démontre un résultat d'existence pour le problème aux déplacements. Le modèle comporte une non-linéarité géométrique et le chargement comprend une distribution linéique de forces extérieures agissant sur une partie de la frontière. Le cadre mathématique est HB (hessien borné) pour le déplacement transverse et BD (déformation bornée) pour le déplacement plan.*

Abstract. — *We hereafter study a mathematical elastoplastic plate model of Hencky type. An existence result for the displacement problem is proved. The deformation considered here is a non-linear expression of the displacements. A plane load distributed on a part of the boundary of the plate is taken into account. The mathematical framework is HB (bounded hessian) for the deflection and BD (bounded deformation) for the inplane displacement.*

**I. INTRODUCTION**

Nous poursuivons ici l'étude du problème de plaque élastoplastique présenté dans [4]. Le but du présent travail est de généraliser le théorème 4.2 de [4] en s'affranchissant de l'hypothèse  $F = 0$ . Rappelons que  $F$  désigne la densité linéique d'efforts agissant sur la partie  $\Gamma_2$  de la frontière de la plaque dans le plan de celle-ci.

La technique utilisée dans [8-13] pour d'autres problèmes de plasticité, et qui consiste à dualiser le problème posé dans un cadre de fonctions régulières et à reformuler l'expression de la fonctionnelle énergie potentielle en introduisant un champ de contraintes, (ou de contraintes généralisées),

---

(\*) Reçu en avril 1986, révisé en février 1987

(1) Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

plastiquement et statiquement admissible, ne s'applique pas pour notre problème à cause de la présence de la non-linéarité géométrique dans l'expression du tenseur des déformations. Cette non-linéarité implique en effet la non-convexité de la fonctionnelle énergie potentielle et par suite, la difficulté d'utiliser les outils classiques de la dualité dans les problèmes convexes [3-10].

Néanmoins, si nous modifions les conditions aux limites sur le déplacement transverse (ici  $\frac{\partial \xi}{\partial \nu}$  sera libre sur la partie  $\Gamma_2$  de la frontière contenant le support de la distribution de forces  $F$ ), une technique de dualisation partielle nous permet de démontrer un résultat d'existence pour le problème aux déplacements dans le cas où la densité d'efforts  $F$  est non nulle.

Un autre résultat démontré dans ce travail est que l'ensemble des charges statiquement admissibles est d'intérieur non vide ; ceci fait l'objet de la proposition II.1 et de la remarque II.1.

Le cas où la dérivée normale,  $\frac{\partial \xi}{\partial \nu}$ , du déplacement transverse n'est pas libre sur  $\Gamma_2$  et où la distribution de forces  $F$  agissant sur  $\Gamma_2$  n'est pas nulle est, à notre connaissance, un problème ouvert.

## II. POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITION DES CHARGES LIMITES

Considérons une plaque élastoplastique, de surface moyenne  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , soumise à une densité surfacique d'efforts transverses  $\lambda f$  et d'efforts plans  $\lambda g$  et à une densité linéique d'efforts plans  $\lambda F$  agissant sur une partie  $\Gamma_2$  de la frontière de  $\Omega$ . Le réel  $\lambda$  est appelé paramètre de chargement. Le système de forces extérieures va engendrer un déplacement plan  $u$  et un déplacement transverse  $\xi$ . Les conditions aux limites « imposées » à  $\xi$  et  $u$  sont les suivantes : la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  sera subdivisée en  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  :  $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . La plaque sera encastree le long de  $\Gamma_1$  et simplement posée le long de  $\Gamma_2$  :

$$(II.1) \quad \begin{cases} u = u_0, \quad \xi = \xi_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \xi_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \xi = \xi_0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

où  $u_0$ ,  $\xi_0$  et  $\xi_1$  sont tels que :

$$(II.2) \quad \begin{cases} \exists U \in BD(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}) & U|_{\Gamma_1} = u_0 \\ \exists \theta \in HB(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}) & \theta|_{\Gamma} = \xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \xi_1. \end{cases}$$

Les définitions de  $BD$  et  $HB$  sont rappelées dans [13-2].

La modélisation d'un tel système conduit à relaxer la condition de Neumann le long de  $\Gamma_1$ , [4], et à introduire le problème d'optimisation posé ci-dessous :

$$(II.3) \quad \text{Inf } \{ \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) ; (\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega), \xi|_\Gamma = \xi_0 \}$$

$$(II.4) \quad \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) = \int_\Omega h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) + \\ + \int_{\Gamma_1} h_p \left( \mathfrak{C} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma \\ - \lambda L(u) - \lambda L_1(\xi)$$

$$(II.5) \quad \begin{cases} HB(\Omega) = \{ \xi \in W^{1,1}(\Omega) ; \xi_{,\alpha\beta} \in M_1(\Omega) ; 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \} \\ BD(\Omega) = \{ u \in L^1(\Omega) ; \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \in M_1(\Omega) ; 1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \} \end{cases}$$

ci-dessus  $M_1(\Omega)$  est l'espace des mesures bornées sur  $\Omega$  et nous utilisons les notations :

$$(II.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \chi_{\alpha\beta}(\xi) = -\xi_{,\alpha\beta} ; \omega_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{2} \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} / (1 + \xi_{,\gamma} \xi_{,\gamma}) \end{cases}$$

$h$  est l'extension aux mesures, cf. [5-6-13], de la fonction définie sur  $\mathbb{R}_s^4 \times \mathbb{R}_s^4$  par :

$$(II.7) \quad h(X, Y) = \langle (X, Y), \Pi_B(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8} - \\ - \frac{1}{2} |\Pi_B(X, Y)|_{\mathbb{R}^8}^2$$

$$(II.8) \quad \begin{cases} \Pi_B \text{ est le projecteur sur un convexe fermé borné } B \subset \mathbb{R}_s^4 \times \mathbb{R}_s^4 ; \\ B \text{ est le convexe d'élasticité et } 0 \in \overset{\circ}{B} . \end{cases}$$

$$(II.9) \quad h_p(X, Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} h(tX, tY) ;$$

$h_p$  est la partie principale de  $h$ .

$$(II.10) \quad \begin{cases} \forall p \in L^1(\Gamma_1), \mathfrak{C}_{\alpha\beta}(p) = p\nu_\alpha \nu_\beta, \text{ pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ \forall q \in \mathbb{L}^1(\Gamma_1), \mathcal{F}_{\alpha\beta}(q) = \frac{1}{2} (q_\alpha \nu_\beta + q_\beta \nu_\alpha), \text{ pour } \alpha, \beta \in \{1, 2\} \end{cases}$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$  est un champ de normales unitaires extérieures à  $\Omega$ .

$$(II.11) \quad \begin{cases} L(u) = \int_{\Omega} g \cdot u \, dx + \int_{\Gamma_2} F \cdot u \, d\Gamma, & g \in \mathbb{L}^2(\Omega), F \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_2) \\ L_1(\xi) = \int_{\Omega} f \xi \, dx, & f \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\mathbb{L}^p(S) = [\mathbb{L}^p(S)]^2 \text{ pour } S = \Omega \text{ ou } \Gamma \text{ et } p \in [1, +\infty]$$

$$W_s^4 = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in W^4, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} \} \text{ pour tout espace } W.$$

L'infimum apparaissant en (II.3) peut prendre la valeur  $-\infty$  pour  $|\lambda|$  assez grand. Ceci nous amène à définir l'ensemble  $\Lambda$  des charges admissibles pour le système :

$$(II.12) \quad \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \inf_{\substack{(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega) \\ \xi|_{\Gamma} = \xi_0}} (\xi, u) > -\infty \right\}.$$

La proposition suivante donne des précisions sur l'ensemble  $\Lambda$ .

**PROPOSITION II.1 :** *L'ensemble  $\Lambda$  défini par (II.12) et (II.2, 4, ..., 11) est un intervalle contenant zéro en son intérieur. Ainsi, les charges limites définies par :*

$$(II.13) \quad \lambda = \text{Inf } \Lambda, \quad \bar{\lambda} = \text{Sup } \Lambda,$$

*vérifient les inégalités :*

$$(II.14) \quad \underline{\lambda} < 0 < \bar{\lambda}.$$

*Démonstration :*

(i) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_*$ , on a, en utilisant (II.4) :

$$(II.15) \quad \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \mathcal{E}_{\lambda_0}(\xi, u) + \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \mathcal{E}_0(\xi, u).$$

Or on a, d'après [4],  $h \geq 0$  et  $h_p \geq 0$ . D'où, grâce à [5-6] :

$$\mathcal{E}_0(\xi, u) \geq 0.$$

Cette inégalité et (II.12, 15) montrent que si  $\lambda_0 \in \Lambda$  et si  $0 \leq \lambda/\lambda_0 \leq 1$ , alors  $\lambda \in \Lambda$ . Ceci prouve que  $\Lambda$  est un intervalle.

(ii) Il nous reste à prouver que  $0 \in \overset{\circ}{\Lambda}$ .

Les propriétés des fonctions  $h$  et  $h_p$  énoncées dans [4], et la Proposition I.1 de [6] permettent de prouver que :

$$(II.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists c_0 > 0, \quad \forall (\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega), \\ \int_{\Omega} h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) \geq c_0 \|\chi(\xi); \varepsilon(u) + \omega(\xi)\|_{M_1(\Omega)^8} \\ \int_{\Gamma_1} h_p \left( \mathfrak{T} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u - u_0) \right) d\Gamma \geq c_0 \\ \times \int_{\Gamma_1} \left| \mathfrak{T} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \nu} - \xi_1 \right); \mathcal{F}(u - u_0) \right|_{\mathbb{R}^8} d\Gamma. \end{array} \right.$$

Or, grâce à (II.6), on peut majorer le tenseur  $\omega(\xi)$  de la manière suivante :

$$(II.17) \quad \begin{array}{l} \forall \xi \in HB(\Omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}; \\ |\omega_{\alpha\beta}(\xi)| \leq \frac{1}{2} [dx] \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array}$$

En utilisant le Théorème 4.1 de [4] et (II.4, 16, 17), on obtient :

$$(II.18) \quad \begin{array}{l} \exists c_0 > 0, c_1 \in \mathbb{R}; \quad \forall (\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega), \\ \xi|_{\Gamma_0} = \xi_0 \Rightarrow \mathcal{E}_0(\xi, u) > c_0 \|\xi, u\|_{HB \times BD} + c_1. \end{array}$$

Par ailleurs la continuité des injections :  $HB(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ , cf. [2], et :  $BD(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , cf. [11-12-13], et la continuité de l'opérateur trace :  $u \in BD(\Omega) \rightarrow \gamma_0(u) \in L^1(\Gamma)$ , cf. [11-12-13], permettent de déduire de (II.11) que :

$$(II.19) \quad \exists c_2 > 0, \quad |L_1(\xi) + L(u)| \leq c_2 \|\xi, u\|_{HB \times BD}.$$

Finalement (II.4, 18, 19) donnent :

$$\begin{array}{l} \forall (\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega), \\ \xi|_{\Gamma} = \xi_0 \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \geq (c_0 - c_2|\lambda|) \|\xi, u\|_{HB \times BD} + c_1. \end{array}$$

La définition (II.12) de  $\Lambda$  permet alors de voir que

$$]-c_0/c_2, c_0/c_2[ \subset \Lambda$$

et ceci achève la démonstration de la proposition. ■

*Remarque II.1 :* On peut montrer, en suivant les arguments développés dans la démonstration de la proposition II.1, que la charge limite  $\lambda_\gamma$  définie dans la Proposition 4.1 de [4] est strictement positive. ■

### III. SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE DE LA FONCTIONNELLE ÉNERGIE

La prise en compte de la non-linéarité géométrique par l'introduction du terme  $\omega(\xi)$  dans l'expression du tenseur des déformations du plan moyen de la plaque,  $\varepsilon(u) + \omega(\xi)$ , conduit à une fonctionnelle énergie potentielle,  $\mathcal{E}_\lambda(\xi, u)$ , non connexe. La technique basée sur la dualité et l'analyse convexe et qui est utilisée dans [8], [13], [15] pour démontrer la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle énergie potentielle d'un solide de Hencky soumis à des efforts extérieurs sur une partie de sa frontière, ne s'applique pas à notre problème à cause de la non-convexité de  $\mathcal{E}_\lambda(\xi, u)$ .

Néanmoins la convexité de l'application  $h$  définie par (II.7) permet de montrer, grâce à [5], [6], que l'application  $u \rightarrow \mathcal{E}_\lambda(\xi, u)$  est convexe. Une technique de dualisation partielle, par rapport à  $u$ , nous permet alors de surmonter la difficulté évoquée ci-dessus et de montrer la semi-continuité inférieure de  $\mathcal{E}_\lambda(\xi, u)$  pour une topologie faible de  $HB(\Omega) \times BD(\Omega)$ , lorsque la densité de forces  $F$ , agissant sur la partie  $\Gamma_2$  de la frontière, est non nulle.

Commençons par démontrer le résultat suivant :

**PROPOSITION III.1 :** *Sous les hypothèses de la Proposition II.1, si le réel  $\lambda$  vérifie :*

$$\lambda \in \Lambda$$

*alors l'ensemble des efforts normaux plastiquement et statiquement admissibles  $\mathcal{S}_N(\lambda)$  défini par :*

$$(III.1) \quad \mathcal{S}_N(\lambda) = \{N \in L^\infty(\Omega)_s^4, \quad (0, N) \in B \text{ p.p. } x \in \Omega . \\ N_{\alpha\beta, \beta} + \lambda g_\alpha = 0 \text{ dans } \Omega , \\ N_{\alpha\beta} \nu_\beta = \lambda F_\alpha \text{ sur } \Gamma_2\}$$

*est non vide.*

*Démonstration :* Il est clair, par (II.5, 12), que pour  $\lambda \in \Lambda$ , le problème :

$$\text{Inf}_{u \in LD(\Omega)} \{ \mathcal{E}_\lambda(0, u) \} ,$$

$$LD(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^1(\Omega), \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \in L^1(\Omega), 1 \leq \alpha, \beta \leq 2\}$$

admet un infimum fini. La dualisation de ce problème permet alors de montrer, cf. [3, 4, 13], que :

$$\text{Sup}_{N \in \mathcal{S}_N(\lambda)} \left\{ - \int_{\Omega} h^*(0, N) dx + \int_{\Gamma_1} N_{\alpha\beta} \nu_\beta \cdot u_0 \right\} > -\infty .$$

ceci implique que  $\mathcal{S}_N(\lambda) \neq \emptyset$  et achève la démonstration. ■

Nous ne pouvons pas affirmer que la fonctionnelle  $\mathcal{E}_\lambda$  définie par (II.4) est semi-continue inférieurement, pour la topologie faible de  $HB \times BD$  introduite dans [4], pour toute valeur du paramètre de chargement  $\lambda$ . En réalité les valeurs de  $\lambda$  qui nous « intéressent » sont les valeurs strictement comprises entre les deux charges limites  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  définies par la Proposition II.1. Pour de telles valeurs de  $\lambda$ , le théorème suivant donne un résultat de semi-continuité inférieure de  $\mathcal{E}_\lambda$  permettant de démontrer, dans la section IV, l'existence d'une solution pour le problème (II.3, 4).

**THÉORÈME III.1 :** *La fonctionnelle  $\mathcal{E}_\lambda$  et l'ensemble  $\Lambda$  étant définis par (III.4, 6, ..., 12), pour  $\lambda \in \Lambda$  et pour toute suite de fonctions  $(\xi_n, u_n)$  vérifiant :*

(III.2)  $(\xi_n, u_n) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega), \xi_n|_\Gamma = \xi_0, \|\xi_n, u_n\|_{HB \times BD} \leq Cte$

(III.3)  $\begin{cases} \xi_n \rightarrow \xi \text{ dans } W^{1,1}(\Omega) \text{ fort et dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible }^* , \\ u_n \rightarrow u \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ fort et dans } L^2(\Omega) \text{ faible } , \end{cases}$

(III.4)  $\begin{cases} \chi(\xi_n) \rightarrow \chi(\xi) \text{ dans } [M^1(\Omega)]^4 \text{ faible }^* , \\ \varepsilon(u_n) \rightarrow \varepsilon(u) \text{ dans } [M^1(\Omega)]^4 \text{ faible }^* , \end{cases}$

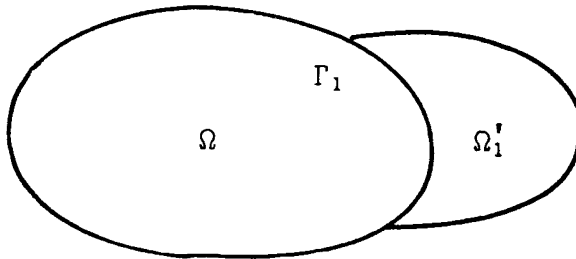
nous avons :

(III.5)  $\mathcal{E}_\lambda(\xi, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\lambda(\xi_n, u_n) \text{ et } \xi|_\Gamma = \xi_0 .$

*Démonstration :*

(i) Commençons par introduire deux ouverts  $\Omega'_1$  et  $\Omega_1$  ayant, comme l'indique la figure 1, les propriétés suivantes :

(III.6)  $\begin{cases} \Omega'_1 \cap \Omega = \emptyset & \bar{\Omega}'_1 \cap \bar{\Omega} = \Gamma_1 \\ \Omega_1 = \Omega \cup \Gamma_1 \cup \Omega'_1 \end{cases}$



$\Omega_1 = \Omega \cup \Gamma_1 \cup \Omega'_1$

Figure 1.



En considérant les fonctions  $\theta$  et  $U$  définies par (II.2), nous associons à tout élément  $(\xi, u) \in HB(\Omega) \times BD(\Omega)$  l'élément  $(\tilde{\xi}, \tilde{u}) \in HB(\Omega_1) \times BD(\Omega_1)$  défini par :

$$(III.7) \quad (\tilde{\xi}, \tilde{u}) = (\xi, u) \cdot 1_\Omega + (\theta, U) \cdot 1_{\Omega_1}.$$

Il est clair que l'hypothèse (III.3, 4) implique que la suite  $(\tilde{\xi}_n, \tilde{u}_n)$  associée à  $(\xi_n, u_n)$  par (III.7) vérifie :

$$(III.8) \quad (\tilde{\xi}_n, \tilde{u}_n) \rightarrow (\tilde{\xi}, \tilde{u}) \text{ dans } W^{1,1}(\Omega_1) \times \mathbb{L}^1(\Omega_1),$$

$$(\chi(\tilde{\xi}_n), \varepsilon(\tilde{u}_n)) \rightarrow (\chi(\tilde{\xi}), \varepsilon(\tilde{u})) \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega_1)]^8$$

où  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$  est l'espace des distributions sur  $\Omega_1$ . Or la convergence au sens des distributions d'une suite bornée d'éléments de  $M_1(\Omega)$ , vers une mesure bornée implique la convergence de la suite dans  $M_1(\Omega_1)$  faible \*. D'où :

$$(III.9) \quad (\chi(\tilde{\xi}_n), \varepsilon(\tilde{u}_n)) \rightharpoonup (\chi(\tilde{\xi}), \varepsilon(\tilde{u})) \text{ dans } [M_1(\Omega_1)]^8 \text{ faible } *$$

(ii) Nouvelle expression de la fonctionnelle énergie.

La proposition III.1 permet de choisir  $N$  dans  $S_N(\lambda)$  qui vérifie, grâce à (II.11) :

$$N \in H(\Omega) ; H(\Omega) = \{N \in [L^\infty(\Omega)]_s^4, \operatorname{div} N \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

et de réécrire, grâce à la formule de Green portant sur  $BD(\Omega) \times H(\Omega)$  et donnée par le théorème (III.1) de [1], l'expression de la forme linéaire  $\lambda L$  définie par (II.11) de la manière suivante :

$$(III.10) \quad \lambda L(u) = \int_\Omega N \varepsilon(u) - \int_{\Gamma_1} (N\nu) u \, d\Gamma.$$

Maintenant, en rassemblant (II.4, 6), (III.6, 7, 10) et en utilisant les propriétés de localisation des fonctions convexes de mesures, cf. [5, 13], on peut donner une nouvelle expression de  $\mathcal{E}_\lambda$  :

$$(III.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_\lambda(\xi, u) = \bar{\mathcal{E}}(\xi, u) - \lambda L(\xi) + \int_{\Gamma_1} (N\nu) u_0 \, d\Gamma \\ \bar{\mathcal{E}}(\xi, u) = \int_{\Omega_1} h(\chi(\tilde{\xi}), \varepsilon(\tilde{u}) + \omega(\tilde{\xi})) \\ \quad - \int_{\Omega_1} h(\chi(\theta), \varepsilon(U) + \omega(\theta)) \\ \quad - \int_\Omega N \varepsilon(u) - \int_{\Gamma_1} (N\nu)(u_0 - u) \, d\Gamma. \end{array} \right.$$

En prouvant la semi-continuité inférieure de  $\bar{\mathcal{E}}$  dans la partie (iii) de la démonstration, on obtiendra (III.5).

(iii) Soit  $\delta > 0$  fixé. Introduisons l'ensemble  $A_\delta$  et deux fonctions  $\varphi_\delta, \psi_\delta$  vérifiant :

$$(III.12) \quad \begin{cases} A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, \Gamma_2) < \delta\} \\ \varphi_\delta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \text{ Supp } \varphi_\delta \subset A_\delta, 0 \leq \varphi_\delta \leq 1, \varphi_\delta|_{\Gamma_2} = 1, \psi_\delta = 1 - \varphi_\delta \end{cases}$$

et posons :

$$(III.13) \quad R_\delta(\xi, u) = \int_{\Omega \cup \Gamma_1} \varphi_\delta h(\chi(\xi), \varepsilon(u) + \omega(\xi)) - \int_{\Omega} \varphi_\delta N\varepsilon(u) - \int_{\Gamma_1} \varphi_\delta(N\nu)(u_0 - u) d\Gamma .$$

En utilisant [1, 6, 13], on peut montrer que  $\bar{\mathcal{E}} - R_\delta$  est s.c.i. pour la convergence (III.3, 4) ; d'où :

$$(III.14) \quad \bar{\mathcal{E}}(\xi, u) < \liminf_n \{ \bar{\mathcal{E}}(\xi_n, u_n) - R_\delta(\xi_n, u_n) \} + R_\delta(\xi, u) .$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est clair que :

$$(III.15) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} R_\delta(\xi, u) = 0$$

puisque, par (III.12),  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega \cup \Gamma_1$ .

Il nous reste à majorer le terme  $-R_\delta(\xi_n, u_n)$  figurant dans (III.14).

Un calcul simple nous donne à partir de (II.7, 8) l'expression de la fonction  $h^*$ , conjuguée de Fenchel de  $h$  :

$$\forall (S, T) \in \mathbb{R}_s^4 \times \mathbb{R}_s^4, \quad h^*(S, T) = \begin{cases} \frac{1}{2} |S, T|^2 & \text{si } (S, T) \in B \\ + \infty & \text{sinon} . \end{cases}$$

D'où pour  $(S, T) \in B$ , l'inégalité :

$$-h(X, Y) + X \cdot S + Y \cdot T \leq + \frac{1}{2} |S, T|^2 .$$

En utilisant [1-6-13], on peut démontrer que l'inégalité ci-dessus reste valide

lorsque l'on fait l'extension de la fonction  $h$  aux mesures. D'après (III.1),  $(0, N) \in B[dx]$  – p.p.  $x \in \Omega$ , et on a donc :

$$(III.16) \quad - \int_{\Omega} \varphi_{\delta} h(\chi(\xi_n), \varepsilon(u_n) + \omega(\xi_n)) + \int_{\Omega} \varphi_{\delta} N \varepsilon(u_n) \\ \leq - \int_{\Omega} \varphi_{\delta} \omega_{\alpha\beta}(\xi_n) N_{\alpha\beta} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{\delta} |N|^2 dx .$$

Or il est clair, d'après (II.6), que :

$$\forall \xi \in W^{1,1}(\Omega) , \quad |\omega_{\alpha\beta}(\xi)| \leq \frac{1}{2} [dx] - \text{p.p.}$$

D'où, en regroupant (III.13, 16) :

$$(III.17) \quad - R_{\delta}(\xi_n, u_n) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{\delta} \sum_{\alpha\beta} |N_{\alpha\beta}| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{\delta} |N|^2 dx \\ + \int_{\Gamma_1} \varphi_{\delta} \left\{ (N\nu)(u_0 - u_n) - h_P \left( \mathfrak{T} \left( \frac{\partial \xi_n}{\partial \nu} - \xi_1 \right), \mathcal{F}(u_0 - u_n) \right) \right\} d\Gamma .$$

Ci-dessus l'intégrale portant sur  $\Gamma$  est négative ou nulle pour des raisons analogues à celles évoquées dans la démonstration de la Proposition 3.3 de [4]. Il ressort alors de (III.12, 17) que

$$(III.18) \quad - R_{\delta}(\xi_n, u_n) \leq c \cdot \delta$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $n$  et de  $\delta$ .

Maintenant, en rassemblant (III.14, 15, 18), on obtient :

$$\bar{\mathcal{E}}(\xi, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{E}}(\xi_n, u_n) + c_0 \delta$$

où  $c_0$  est une constante indépendante de  $(n, \delta)$ . Ceci donne la s.c.i. de  $\bar{\mathcal{E}}$  et permet d'achever la démonstration. ■

#### IV. RÉSULTAT D'EXISTENCE

Nous avons défini dans la section II l'ensemble des charges admissibles,  $\Lambda$ , et nous avons montré, dans la proposition II.1, que  $\Lambda$  est un intervalle d'extrémités  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$ .

L'hypothèse dite de « charge sûre », que l'on rencontre toujours dans les problèmes de plasticité, [7-8-9-12], se traduit ici par :

$$(IV.1) \quad \lambda \in ]\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[.$$

Nous allons démontrer dans cette section que pour toute charge sûre  $\lambda$ , le problème aux déplacements (II.3) admet au moins une solution.

THÉORÈME IV.1 : *Les charges limites  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  étant définies dans la Proposition II.1, pour  $\lambda$  satisfaisant (IV.1) et pour*

$$f \in L^1(\Omega), g \in L^2(\Omega), F \in L^\infty(\Gamma_2),$$

*le problème (II.3), (II.2, 4, ..., 11), admet une solution.*

*Démonstration* : Soit  $(\xi_n, u_n)$  une suite minimisante pour le problème (II.3). La technique utilisée dans la démonstration du théorème 4.2 de [4], cf. aussi [13, 15], permet d'extraire une suite vérifiant (III.2, 3, 4). Le résultat du Théorème III.1 permet alors de conclure. ■

#### REFERENCES

- [1] H. BEN DHIA et T. HADHRI, *Existence result and discontinuous finite element discretization for a plane stresses Hencky problem*, Rapport interne C.M.A.P. École Polytechnique 1986 et article à paraître.
- [2] F. DEMENGEL, *Fonctions à hessien borné*, Ann. Institut Fourier, Grenoble, Fasc. 2, 1984.
- [3] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris, 1974.
- [4] T. HADHRI, *Étude dans  $HB \times BD$  d'un modèle de plaques élastoplastiques comportant une non-linéarité géométrique*, RAIRO, M<sup>2</sup>AN, vol. 19, n° 2, 1985, pp. 235-283.
- [5] T. HADHRI, *Fonction convexe d'une mesure*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série 1, n° 13, 1985, p. 687-690.
- [6] T. HADHRI, *Convex function of a measure and application to a problem of nonhomogeneous elastoplastic material*, Rapport interne C.M.A.P. École Polytechnique, 1986, et article à paraître.
- [7] C. JOHNSON, *Existence theorems for plasticity problems*, J. Math. Pures et Appl., 55, 1976, p. 431-444.
- [8] R. KOHN et R. TEMAM, *Dual spaces of stresses and strains, with applications to Hencky plasticity*, Appl. Math. Optim., vol. 10, n° 1, 1983.

- [9] B. MERCIER, *Sur la théorie et l'analyse numérique de problèmes de plasticité*, Thèse d'État, Paris 6, 1977.
- [10] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [11] P. SUQUET, *Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la plasticité*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286, Série A, 1978, p. 1129-1132.
- [12] P. SUQUET, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse d'État, Paris 6, 1982.
- [13] R. TEMAM, *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [14] R. TEMAM et G. STRANG, *Duality and relaxation in the variational problems of plasticity*, J. Mécanique, 19, 1980, p. 493-527.
- [15] F. DEMENGEL, *Fonctions convexes de mesure et problèmes variationnels. Application en mécanique non linéaire*, Thèse d'État, Paris-Sud, 1986.