P. OLIVIER
Q. I. RAHMAN

Sur une formule de quadrature pour des fonctions entières

Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, nº 3 (1986), p. 517-537
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_517_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 20, n° 3, 1986, p 517 à 537)

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE POUR DES FONCTIONS ENTIÈRES (*)

par P. OLIVIER [1] et Q. I. RAHMAN [1]

Communiqué par R S VARGA

Resumé — *Soient m un entier impair et* $\sigma > 0$ *De plus, soit* $a_{0\,0} = 1$ *et pour* $m > 1, 0 \leqslant \mu \leqslant m-1$, *soit* $a_{\mu\, m-1} = \frac{1}{\mu\,!}\psi^{(\mu)}(0)$ *où* $\psi(z) = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1+\frac{z^2}{\mu^2}\right)$ *Nous demontrons que si f est une fonction entière de type exponentiel* $\tau < (m+1)\sigma$ *alors*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma}\sum_{\substack{\mu=0\\ \mu\ pair}}^{m-1}\frac{1}{(2\,\sigma)^{\mu}}a_{\mu,m-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

pourvu que l'intégrale (prise au sens de Cauchy) a gauche et les $(m+1)/2$ *séries à droite soient convergentes La formule de quadrature reste vraie pour les fonctions entières d'ordre* 1 *et de type* $(m+1)\,\sigma$ *appartenant à* $L^1(-\infty, +\infty)$

Abstract. — *Let m be an odd integer and* $\sigma > 0$ *Further, let* $a_{0\,0} = 1$ *whereas for* $m > 1$ *and* $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ *let* $a_{\mu\, m-1} = \frac{1}{\mu\,!}\psi^{(\mu)}(0)$ *where* $\psi(z) = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1+\frac{z^2}{\mu^2}\right)$ *We prove that if f is an entire function of exponential type* $\tau < (m+1)\,\sigma$, *then*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma}\sum_{\substack{\mu=0\\ \mu\ even}}^{m-1}\frac{1}{(2\,\sigma)^{\mu}}a_{\mu,m-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

provided the integral on the left (taken in the sense of Cauchy) and the $(m+1)/2$ *series on the right are convergent The quadrature formula remains valid for entire functions of order* 1 *type* $(m+1)\,\sigma$ *belonging to* $L^1(-\infty, +\infty)$

(*) Reçu en novembre 1985

[1] Département de Mathematiques et de Statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada

1. INTRODUCTION

1.1. Comme démontré par Gauss, l'intégrale d'un polynôme de degré $< 2n$ sur l'intervalle $[-1, +1]$ est exactement évaluée par les valeurs du polynôme en n points particuliers bien qu'il faille $2n$ points pour déterminer le polynôme lui-même. Ces n points sont les zéros du n-ième polynôme de Legendre. Plus généralement Turán [12] a démontré la formule

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_\nu^{(\mu)} f^{(\mu)}(x_\nu) \tag{1}$$

valide pour tout polynôme f de degré $< (m+1)n$ lorsque m est impair et les x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont les zéros du polynôme $\pi_{n,m+1}$ qui, parmi tous les polynômes p de la forme $x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$, minimise l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |p(x)|^{m+1}\,dx$. Le cas $m = 1$ est compatible avec celui de Gauss car il est connu [10, Théorème 3.1.2] que le polynôme de Legendre minimise l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |p(x)|^2\,dx$ lorsque p est de la forme $x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$. La formule de quadrature plus générale du type

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,w(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu)$$

faisant intervenir une fonction poids [10, Théorème 3.4.1] peut aussi être étendue de façon analogue. Par exemple [12, Théorème 2] la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_\nu^{(\mu)} f^{(\mu)}\left(\cos\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)\right) \tag{2}$$

est valide pour tout polynôme f de degré $< (m+1)n$ avec m impair.

Pour les fonctions entières de type exponentiel, il existe une situation analogue. Selon un théorème d'unicité de F. Carlson [1, Théorème 9.2.1], une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ est complètement déterminée par ses valeurs en tous les entiers ; l'exemple $\sin \pi z$ montre que cela ne peut être étendu au type exponentiel π. Rappelons maintenant la formule classique dite de Poisson de la théorie de l'intégrale de Fourier :

Si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} F(t)\,dt$$

et

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x)\, dx$$

alors (*voir* [11, p. 60] *et aussi* [2])

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\nu) = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(2\pi\nu).$$

Grâce au théorème de Paley et Wiener [1, Théorème 6.8.1] cette formule implique que l'intégrale sur $(-\infty, +\infty)$ d'une fonction entière f de $L^1(-\infty, +\infty)$ de type exponentiel 2π est exactement évaluée par les valeurs de f en tous les entiers. Plus précisément nous avons :

THÉORÈME A : *Soit f une fonction entière de type exponentiel* 2π *dans* $L^1(-\infty, +\infty)$. *Nous avons alors* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\nu).$$

Une généralisation de ce théorème, analogue à (1) découle du travail de Kress [9].

THÉORÈME B : *Soit m impair et f une fonction entière de type exponentiel* $\tau < (m+1)\pi$ *dans* $L^1(-\infty, +\infty)$. *Nous avons alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\pi)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}(\nu) \tag{3}$$

où $a_{0,0} = 1$ *tandis que pour* $m > 1$ *les* $a_{\mu,m-1}$ *sont donnés par :*

$$\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} a_{\mu,m-1} z^\mu = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2} \left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right). \tag{4}$$

1.2. Remarquons que dans le cas $m = 1$, d'après le Théorème A, la formule (3) reste vraie pour des fonctions entières d'ordre 1 et de type 2π. Il est naturel de se demander si pour un entier impair m quelconque la formule (3) reste vraie aussi pour des fonctions entières d'ordre 1 et de type $(m+1)\pi$. Nous démontrerons que c'est effectivement le cas.

Quant à la portée du Théorème B elle est considérablement diminuée en exigeant l'intégrabilité au sens de Lebesgue puisque cela exclut la possibilité d'évaluer beaucoup d'intégrales familières comme par exemple

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Par conséquent nous allons chercher les conditions sous lesquelles (3) reste vraie lorsque l'intégrale est prise au « sens de Cauchy », ce qui serait suffisamment général Rappelons que f est dite intégrable au sens de Cauchy sur $(-\infty, +\infty)$ si elle est intégrable sur $(0, X)$ et $(-X, 0)$ pour tout $X > 0$ et si $I_1 = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)\, dx$ et $I_2 = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^0 f(x)\, dx$ existent Comme dans [11, § 1 7] nous notons I_1 et I_2 par $\int_0^{\to +\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{\to -\infty}^0 f(x)\, dx$ respectivement et leur somme (appelée l'intégrale de Cauchy de f sur $(-\infty, +\infty)$) par

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx \tag{5}$$

La notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est réservée pour l'intégrale au sens de Lebesgue de f sur $(-\infty, +\infty)$ Il est clair que *si* $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ *alors* (5) *est convergente et*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

La convergence de $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu$ se définit de façon analogue

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer nos résultats

THÉORÈME 1 *Soient m un entier impair et $\sigma > 0$ Si f est une fonction entiere de type exponentiel $\tau < (m + 1)\sigma$ alors nous avons*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu\ pair}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu\, m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{6}$$

pourvu que l'intégrale et les $(m + 1)/2$ *séries dans* (6) *soient convergentes*

Comme application évaluons $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} \frac{\sin(\sigma x)}{x} dx$. Considérons $\frac{\sin(\sigma z)}{z}$ comme une fonction entière de type exponentiel $< 2\sigma$ et appliquons le Théorème 1 avec $m = 1$. La formule (6) donne alors le résultat :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} \frac{\sin(\sigma x)}{x} dx = \pi .$$

Si $f(z) := \frac{\sin^m(\sigma z)}{z}(1 - \cos(\sigma z))$ alors $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \binom{m}{(m+1)/2} 2^{-m}.\pi$ pendant que $\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = 0$. Ainsi :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx \neq \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right).$$

Donc $\tau = (m + 1)\sigma$ n'est pas acceptable dans le Théorème 1.

Remarquons que la fonction $f(z) := \frac{\sin^m(\sigma z)}{z}(1 - \cos(\sigma z))$ *n'appartient pas à* $L^1(-\infty, +\infty)$. En réalité nous avons :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| f\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2\sigma}\right) \right| = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{2\nu - 1} \frac{\sigma}{\pi} >$$
$$> \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n}\right) \right\} \frac{\sigma}{\pi}$$

ce qui démontre que $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2\sigma}\right) \right|$ diverge et donc que, par le Lemme 4, $f \notin L^1(-\infty, +\infty)$. Nous montrerons que la formule (6) a aussi lieu pour les fonctions f d'ordre 1 et de type $(m + 1)\sigma$ qui appartiennent à $L^1(-\infty, +\infty)$. En d'autres termes nous avons

THÉORÈME 2 : *La formule* (6) *est aussi vraie pour toutes les fonctions entières* f *de type exponentiel* $(m + 1)\sigma$ *qui appartiennent à* $L^1(-\infty, +\infty)$.

Dans le cas $m = 3$ et $\sigma = \pi$ grâce aux Théorèmes 1 et 2 nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE : *Si* f *est une fonction entière de type exponentiel* $\tau < 4\pi$ *et si* $f(n) = f''(n) = 0$ *pour* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *alors* $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = 0$, *lorsque* *cette intégrale existe La même conclusion est vraie pour des fonctions d'ordre* 1 *et de type* 4π *qui appartiennent à* $L^1(-\infty, +\infty)$

Le corollaire met en évidence une situation dans laquelle la connaissance de l'ensemble des valeurs

$$S_1 = \{ f(n), f''(n) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \}$$

peut être plus importante que celle de l'ensemble des valeurs

$$S_2 = \{ f(n), f'(n) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \}$$

car pour une fonction entière quelconque f de type exponentiel 4π appartenant à $L^1(-\infty, +\infty)$, S_1 détermine complètement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ alors que S_2 ne le fait pas comme l'exemple $f(z) = \left(\frac{\sin(\varepsilon z)}{\varepsilon z}\right)^2 \sin^2(\pi z)$ $(0 < \varepsilon \leqslant \pi)$ le montre Cette remarque fournit une motivation pour l'étude de l'interpolation (0, 2) par des fonctions entières de type exponentiel [4, 5, 6]

2. RÉSULTATS AUXILIAIRES

2.1. Dans le but de démontrer nos résultats nous remarquons qu'il est possible de déduire la formule (3) à partir de (2) par une méthode d'approximation développée par Hormander [8] Notons d'abord que (2) est équivalent à

LEMME 1 *Soit t un polynôme trigonométrique de degré* $< (m + 1)\, n$ *avec m impair et* $n \geqslant 1$ *Nous avons alors*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu\ pair}}^{m-1} \frac{1}{(2n)^{\mu}}\, a_{\mu\, m-1} \sum_{\nu=-n+1}^{n} t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}\right) \tag{7}$$

ou les coefficients $a_{\mu,m-1}$ *sont définis dans le Théorème B*

Démonstration De manière evidente il suffit de démontrer (7) pour les polynômes trigonométriques pairs La formule (2) se traduit facilement en

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = 2\int_{0}^{\pi} t(\theta)\, d\theta &= 2\sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{n} \Lambda_{\nu}^{(\mu)}\, t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=-n+1}^{n} \Lambda_{\nu}^{(\mu)}\, t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right)\end{aligned}$$

valide pour tout polynôme trigonométrique pair $t(\theta) = f(\cos\theta)$ de degré $< (m+1)\,n$. L'existence d'un polynôme trigonométrique pair :

$$A_{j,k}(\theta) := \sum_{l=0}^{(m+1)n-1} \alpha_l \cos l\theta$$

où $1 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$ sont fixées, de degré $< (m+1)\,n$ tel que

$$A_{j,k}^{(\mu)}\left(\frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{2\,n}\right) = \delta_{j,\nu}\,\delta_{k,\mu}\ (1 \leqslant \nu \leqslant n,\ 0 \leqslant \mu \leqslant m-1)$$

est déduite des travaux d'Hermite [7]. En posant $t(\theta) = A_{j,k}(\theta)$ dans les précédentes égalités nous obtenons :

$$\pi\alpha_0 = \int_0^\pi A_{j,k}(\theta)\,d\theta = \Lambda_j^{(k)}\,.$$

Le calcul de α_0 se fait en additionnant les n égalités :

$$A_{j,k}^{(\mu)}\left(\frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{2\,n}\right) = \delta_{j,\nu}\,\delta_{k,\mu}\ (1 \leqslant \nu \leqslant n)\,.$$

Ainsi pour $\mu = 0$ nous avons :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=0}^{(m+1)n-1} \alpha_l \cos\left(l\,\frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{2\,n}\right) = \delta_{k,0}\,,$$

i.e. :

$$\sum_{l=0}^{(m-1)/2} (-1)^l\,\alpha_{2nl} = \frac{1}{n}\,\delta_{k,0}\,.$$

Dans le cas $m = 1$ cette formule donne $\alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\,a_{0,0}$ et donc $\Lambda_j^{(0)} = \frac{\pi}{n}\,a_{0,0}$. Dans le cas $m > 1$ nous obtenons pour chaque μ pair de 2 à $m-1$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{(m+1)n-1} (-1)^{\mu/2}\,l^\mu\,\alpha_l \cos\left(l\,\frac{(2\,\nu-1)\,\pi}{2\,n}\right) = \delta_{k,\mu}\,,$$

i.e. :

$$\sum_{l=1}^{(m-1)/2} l^\mu(-1)^l\,\alpha_{2nl} = \frac{1}{n}(-1)^{\mu/2}\,\frac{1}{(2\,n)^\mu}\,\delta_{k,\mu}\,.$$

Il s'agit là de $(m+1)/2$ équations, obtenues pour chaque μ pair entre 0 et $m-1$, dont les $(m+1)/2$ inconnues sont $\{(-1)^l\,\alpha_{2nl}\}_{l=0}^{(m-1)/2}$. Le déterminant de ce système est égal à :

$$D(0) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Comme il est différent de zéro, la solution du système est unique et en particulier α_0 s'écrit :

$$\alpha_0 := \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\delta_{k,0} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{n}(-1)\frac{1}{(2n)^2}\delta_{k,2} & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{n}(-1)^2\frac{1}{(2n)^4}\delta_{k,4} & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n}(-1)^{(m-1)/2}\frac{1}{(2n)^{m-1}}\delta_{k,m-1} & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix} / D(0).$$

Si k est impair entre 0 et $m-1$ alors $\alpha_0 = 0$ et donc $\Lambda_j^{(k)} = 0$ pour j de 1 à n.

Si k $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ est pair alors α_0 s'écrit :

$$\alpha_0 = \frac{1}{D(0)}(-1)^{k/2}\frac{1}{n}\frac{1}{(2n)^k}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 2^k & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^k \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Or $n(2n)^k \alpha_0$ peut être considéré comme le coefficient de z^k dans le développement de $\frac{D(z)}{D(0)}$ où :

$$D(z) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (-1)z^2 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ (-1)^2 z^4 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{(m-1)/2} z^{m-1} & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

En remarquant que $z = \pm i\mu$ $(1 \leqslant \mu \leqslant (m-1)/2)$ sont racines de $D(z)$ nous avons :

$$\frac{D(z)}{D(0)} = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right).$$

En raison de (4), nous obtenons alors $\alpha_0 = \frac{1}{n} \frac{1}{(2n)^k} a_{k,m-1}$ et donc

$$\Lambda_j^{(k)} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{(2n)^k} a_{k,m-1} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

2.2. Les deux lemmes qui suivent sont démontrés dans [3].

Lemme 2 : *La convergence de* (5) *pour une fonction entière f de type exponentiel implique que « $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm \infty$ » et que « $f(x)$ est bornée sur l'axe réel ».*

Lemme 3 : *Soit :*

$$\varphi(z) := \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right)^2 . \tag{8}$$

Si pour une fonction f donnée l'intégrale $\int_0^{\to +\infty} f(x)\, dx$ *est convergente alors* $\int_0^{\to +\infty} \varphi(hx)\, f(x)\, dx$ *converge pour tout* $h \in \mathbb{R}$ *et :*

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{\to +\infty} \varphi(hx)\, f(x)\, dx = \int_0^{\to +\infty} f(x)\, dx \tag{9}$$

pourvu que f soit bornée sur $[0, +\infty)$.

Nous aurons besoin à plusieurs reprises d'une certaine inégalité de Plancherel et Pólya qui s'énonce sous la forme

Lemme 4 [1, Théorème 6.7.15] : *Si f est une fonction entière de type exponentiel* τ *appartenant à* $L^1(-\infty, +\infty)$ *alors :*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f(\lambda_\nu) | \leqslant 2(\pi\delta)^{-1} e^{\tau\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |\, dx \tag{10}$$

pour toute suite réelle croissante $\{ \lambda_\nu \}$ *telle que* $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqslant 2\delta$.

Il nous paraît utile de citer aussi le résultat suivant.

Lemme 5 [1, Théorème 11.3.1] : *Si f est une fonction entière de type exponentiel* τ *appartenant à* $L^1(-\infty, +\infty)$ *alors* $f' \in L^1(-\infty, +\infty)$ *aussi et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f'(x) |\, dx \leqslant \tau \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |\, dx .$$

Ainsi les séries dans (6) sont toutes *nécessairement* convergentes si le membre de gauche existe en tant qu'intégrale de Lebesgue

Le Lemme 6 sera une version généralisée d'un lemme démontré dans [3]

LEMME 6 *Soit* φ *définie comme dans Lemme* 3 *Alors pour tout* $\alpha > 0$ *et tout entier* $k \geqslant 0$ *nous avons*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k)}((\nu + 1)\alpha) - \varphi^{(k)}(\nu\alpha) \right| \leqslant (2\pi)^{k+1} \tag{11}$$

Démonstration D'après le théorème fondamental du calcul intégral:

$$\begin{aligned} S := \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k)}((\nu + 1)\alpha) - \varphi^{(k)}(\nu\alpha) \right| &= \alpha \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\nu}^{\nu+1} \varphi^{(k+1)}(\alpha x)\, dx \right| \\ &\leqslant \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k+1)}(\alpha x) \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k+1)}(x) \right| dx \end{aligned}$$

La fonction entière φ est de type exponentiel 2π et appartient à $L^1(-\infty, +\infty)$. Donc par le Lemme 5 nous avons :

$$S \leqslant (2\pi)^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx = (2\pi)^{k+1}$$

2.3. Notons par $\mathscr{R}_\tau$ l'ensemble des fonctions entières f de type exponentiel τ telles que $f(x)$ soit réel et dans $[-1, +1]$ quand x est réel Soit φ définie comme dans le Lemme 3 Pour une fonction quelconque f de $\mathscr{R}_\tau$ et $h > 0$ posons :

$$f_h(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi(hz + \nu)\, f(z + \nu h^{-1}) \tag{12}$$

Comme cela est déjà mentionné dans [8] f_h *est périodique de période* h^{-1} et s'écrit sous la forme

$$f_h(z) = \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu\, e^{2\pi i \nu h z} \quad \left(N = \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n \geqslant \frac{\tau}{2\pi h} \right\} \right)$$

De plus $f_h(z) \to f(z)$ *uniformément sur tout borné du plan complexe* De l'identité ·

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi(z + \nu) \equiv 1$$

il découle que :

$$- 1 \leqslant f_h(x) \leqslant 1 \tag{13}$$

pour tout x réel. Voici maintenant le dernier résultat auxiliaire :

LEMME 7 : *Soit f une fonction dans $\mathscr{R}_\tau$ satisfaisant à :*

$$| f(x) | \leqslant \frac{M}{1 + x^2} \quad (- \infty < x < + \infty) \tag{14}$$

avec $M > 0$. Si f_h est définie comme en (12) *alors il existe une constante M^* ne dépendant que de M, m et τ telle que :*

$$| f_h^{(k)}(x) | < \frac{M^*}{1 + x^2} \quad pour \quad 0 \leqslant | x | \leqslant \frac{1}{2\,h}, \quad 0 < h \leqslant 1$$
$$et \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1 \,. \tag{15}$$

Démonstration : Une simple application du théorème de Bernstein [1, Théorème 11.1.2] à $(1 + z^2) f(z)$ nous donne $| f^{(k)}(x) | \leqslant \dfrac{M(\tau + 1)^k}{1 + x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. De plus $| \varphi^{(k)}(x) | \leqslant (2\,\pi)^k$. Donc nous avons

$$\begin{aligned} | f_h^{(k)}(x) | &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{k-j} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f^{(j)}(x + \nu h^{-1})\, \varphi^{(k-j)}(hx + \nu) | \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{k-j}\, M(\tau + 1)^j (2\,\pi)^{k-j} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (x + \nu h^{-1})^2}\,. \end{aligned}$$

Maintenant si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2\,h}$ alors pour $\nu \geqslant 0$

$$(x + \nu h^{-1})^2 \geqslant x^2 + (\nu h^{-1})^2$$

et pour $\nu \leqslant - 1$

$$(x + \nu h^{-1})^2 \geqslant \{ x + (| \nu | - 1)\, h^{-1} \}^2 \,,$$

d'où (15) découle facilement pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2\,h} \right]$. A cause de la symétrie la même estimation est vraie aussi pour $x \in \left[- \dfrac{1}{2\,h}, 0 \right)$.

3. PREUVES DES THÉORÈMES 1 ET 2

3.1. Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau > 0$ telle que (5) soit convergente. Selon le Lemme 2 la fonction f doit être bornée sur l'axe réel. Sans perdre la généralité nous pouvons supposer

$$\| f \|_{\infty} := \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| = 1 .$$

Grâce au Lemme 3 nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx &= \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(hx) f(x)\, dx \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} \int_{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}}^{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}} \varphi(hx) f(x)\, dx \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2h}}^{+\frac{1}{2h}} \varphi(hx + \nu) f(x + \nu h^{-1})\, dx \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{-\frac{1}{2h}}^{+\frac{1}{2h}} f_h(x)\, dx \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{+\pi} f_h\!\left(\frac{x}{2\pi h}\right) dx .
\end{aligned}$$

Dorénavant nous allons supposer que $\frac{\tau}{2\pi h}$ *est un entier positif.* Pour $h := \frac{\tau}{2\pi} \frac{1}{(m+1)n - 1}$ la fonction $f_h\left(\frac{x}{2\pi h}\right)$ est un polynôme trigonométrique de degré $(m+1)n - 1$ et ainsi grâce à la formule (7) :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f_h\!\left(\frac{x}{2\pi h}\right) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{\mu = 0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2n)^{\mu}} a_{\mu, m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu = -n+1}^{n} \left(\frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} f\!\left(\frac{x}{2\pi h}\right) \right)_{x = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}} .$$

Nous obtenons ainsi :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2} \frac{1}{\tau + 4\pi h}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-n+1}^{n} f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h}\right). \quad (16)$$

3.2. Supposons maintenant que f satisfait (14). Alors en utilisant les Lemmes 4 et 5 nous déduisons que pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tel que :

$$\sum_{|\nu| > n_1} \left| f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right| < \varepsilon \ (0 \leqslant \mu \leqslant m-1). \quad (17)$$

D'après le Lemme 7 :

$$\left| f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h}\right)\right| < 4 M^* \left(\frac{\tau + 4\pi h}{(m+1)\pi}\right)^2 \frac{1}{(2\nu-1)^2}$$

pour $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ et pour $-n+1 \leqslant \nu \leqslant n$. Il existe donc un entier $n_2 > n_1$ ne dépendant que de ε et non de h tel que :

$$\left(\sum_{\nu=-n+1}^{-n_2} + \sum_{\nu=n_2}^{n}\right) \left| f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h}\right)\right| < \varepsilon \quad (18)$$

pour $0 < h < h_{1,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. L'inégalité de Bernstein pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique associée à (13) peut être utilisée pour conclure que :

$$\left| \sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \left\{ f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h}\right) - f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right\}\right| < \varepsilon \quad (19)$$

pour $0 < h < h_{2,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. De plus, puisque $f_h(z) \to f(z)$ uniformément sur tout compact du plan complexe lorsque $h \to 0$, nous avons :

$$\left| \sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \left\{ f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau}\right) - f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2} \frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right\}\right| < \varepsilon \quad (20)$$

pour $0 < h < h_{3,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. Pour une fonction entière f de type exponentiel τ satisfaisant à (14) nous avons en vertu de (16)-(20) l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{(m+1)\pi}{\tau} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2\tau}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right),$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{(m+1)\pi}{\tau} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2\tau}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\nu\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right).$$

En particulier, si $\tau = (m+1)\sigma$ cette formule devient identique à (6).

3.3. Nous venons de démontrer le Théorème 2 sous la condition supplémentaire (14). Dans la présente section nous la remplacerons par l'appartenance à $L^1(-\infty, +\infty)$ et ainsi obtenir le résultat dans sa pleine généralité.

Définissons la fonction $f_{[h]}$ pour $h > 0$ par :

$$f_{[h]}(z) := \varphi(hz)\,f(z)\,.$$

C'est une fonction entière de type exponentiel $(m+1)\sigma + 2\pi h$ qui satisfait à (14) et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{\left\{2\left(\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}\right)\right\}^{\mu}} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right). \qquad (21)$$

Grâce au théorème de convergence dominée nous avons :

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Il suffit alors de démontrer que le membre de droite de (21) tend vers :

$$\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque h tend vers 0. Dans ce but remarquons d'abord que :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\mu=1}\binom{\mu}{k}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}h^{\mu-k}\varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right).$$

Chacune des μ sommes intervenant dans le deuxième membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0 car par le Lemme 4 nous avons :

$$\left|\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 4\,\frac{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}{\pi^2}\,e^{(m+1)\pi/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi^{(\mu-k)}(hx)\,f^{(k)}(x)\right|dx$$
$$\leqslant 4\,\frac{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}{\pi^2}\,e^{(m+1)\pi/2}(2\pi)^{\mu-k}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f^{(k)}(x)\right|dx\,.$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\frac{2\pi h}{m+1}}\right)$$

tend vers :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque h tend vers 0 pour $0\leqslant\mu\leqslant m-1$. Pour une raison évidente nous n'avons à traiter que le cas $\mu=0$. Dans ce but fixons $\varepsilon>0$ et choisissons un entier $\nu_1=\nu_1(\varepsilon)$ tel que nous ayons :

$$\sum_{|\nu|>\nu_1}\left|f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right|<\varepsilon\,. \tag{22}$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un entier $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε et non de h tel que :

$$\sum_{|\nu| > \nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) \right| < 2\varepsilon \tag{23}$$

pour $0 < h < \dfrac{(m+1)\sigma}{2\pi}$. A cette fin remarquons que pour tout entier ν et pour tout $h \in \left(0, \dfrac{(m+1)\sigma}{2\pi}\right)$ il existe un entier $n(\nu, h)$ tel que :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\nu}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}} - n(\nu, h) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Dans l'ensemble $\{ n(\nu, h) \}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ *un entier peut apparaître au plus deux fois* parce que la distance de $\dfrac{\nu}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}}$ à $\dfrac{\nu+1}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}}$ est plus grande que $\dfrac{1}{2}$.

Définissons maintenant $\zeta_\nu\,(-\infty < \nu < +\infty)$ par le plus petit ζ dans $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} - \dfrac{\pi}{2\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{2\sigma}\right]$ tel que :

$$| f(\zeta) | = \max_{\frac{\nu\pi}{\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma} \leqslant x \leqslant \frac{\nu\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{2\sigma}} | f(x) | .$$

Séparons alors la suite $\{ \zeta_\nu \}$ en exactement deux sous-suites $\{ \zeta'_\nu \}$ et $\{ \zeta''_\nu \}$, la première étant constituée des ζ_ν qui appartiennent à $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} - \dfrac{\pi}{2\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{4\sigma}\right]$ et la seconde étant constituée des ζ_ν qui appartiennent à $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{4\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{2\sigma}\right]$.
Remarquons que $\zeta'_{\nu+1} - \zeta'_\nu \geqslant \dfrac{\pi}{4\sigma}$ et $\zeta''_{\nu+1} - \zeta''_\nu \geqslant \dfrac{3\pi}{4\sigma}$ et utilisons le résultat de Plancherel et Pólya de nouveau pour obtenir :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f(\zeta'_\nu) | \leqslant \frac{16\sigma}{\pi^2} e^{(m+1)\pi/8} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | \, dx$$

et :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f(\zeta''_\nu) | \leqslant \frac{16\sigma}{3\pi^2} e^{3(m+1)\pi/8} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx .$$

Il existe donc un entier $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ tel que :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} |f(\zeta'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{|\nu|>\nu_2} |f(\zeta''_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} |f(\zeta_\nu)| < \varepsilon .$$

Cette définition de ν_2 ne dépend pas de h et nous permet d'arriver au résultat. Utilisons (24) pour écrire :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right)\right| \leqslant \sum_{|\nu|>\nu_2} \max_{\frac{n(\nu,h)\pi}{\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma} \leqslant x \leqslant \frac{n(\nu,h)\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{2\sigma}} |f(x)|$$
$$= \sum_{|\nu|>\nu_2} |f(\zeta_{n(\nu,h)})| .$$

En rappelant que les éléments de $\{ n(\nu, h) \}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ ne peuvent reparaître qu'une fois nous déduisons :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right)\right| \leqslant 2 \sum_{|\nu|>\nu_2} |f(\zeta_\nu)| < 2\varepsilon .$$

En posant $\nu_0 := \max(\nu_1, \nu_2)$ il est alors possible de trouver $h_{4,\varepsilon} > 0$ tel que pour $0 < h < h_{4,\varepsilon}$ nous ayons :

$$\left| \sum_{|\nu|>\nu_0} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right) f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right) - \sum_{|\nu|\leqslant\nu_0} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right| < \varepsilon . \tag{25}$$

Nous déduisons de (22), (23) et (25) pour tout $h \in \left(0, \min\left(h_{4,\varepsilon}, \frac{(m+1)\sigma}{2\pi}\right)\right)$ l'inégalité :

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right) f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \frac{2\pi h}{m+1}}\right) - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right| < 4\varepsilon$$

qui termine la démonstration du Théorème 2.

3.4. A ce stade il devient possible d'achever la preuve du Théorème 1. L'hypothèse sur f ne sera plus $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ mais sera $\tau < (m+1)\sigma$.

Avec $0 < h < \frac{1}{2\pi}\{(m+1)\sigma - \tau\}$, la fonction entière $f_{[h]}(z) := \varphi(hz)\, f(z)$ satisfait aux hypothèses du Théorème 2. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\, dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right). \tag{26}$$

En utilisant les Lemmes 2 et 3 nous avons

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\, dx = \int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx .$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite de (26) tend vers

$$\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$. Dans ce but nous choisissons le plus petit entier N_ε tel que

$$\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon \tag{27}$$

quel que soit μ de 0 à $m-1$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. Posons

$$s_{N_\varepsilon - 1}^{(\mu)} := 0 , \qquad s_n^{(\mu)} := \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

avec $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. En utilisant (27) nous avons pour tout $n > N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} \left\{ \frac{d^{\mu-k}}{dx^{\mu-k}} \varphi(hx) \right\}_{x=\frac{\nu\pi}{\sigma}} f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k} \left\{ \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{n\pi h}{\sigma}\right) s_n^{(k)} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n-1} \left(\varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right)\right) s_\nu^{(k)} \right\} \right| \\
&< \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k} \left(\left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{n\pi h}{\sigma}\right) \right| + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n-1} \left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right) \right| \right) \right\} \varepsilon .
\end{aligned}$$

En remarquant que $| \varphi(x) | \leqslant 1$ sur l'axe réel et en appliquant le théorème de Bernstein il vient d'abord :

$$\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| <$$

$$< \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k}\left((2\pi)^{\mu-k} + \sum_{\nu \geqslant N_\varepsilon} \left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right) \right| \right) \right\} \varepsilon$$

puis ensuite à l'aide du Lemme 6 :

$$\left| \sum_{\nu \geqslant N_\varepsilon} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k}((2\pi)^{\mu-k} + (2\pi)^{\mu-k+1}) \right\} \varepsilon$$

$$= (2\pi + 1)(1 + 2\pi h)^{\mu} \varepsilon .$$

Parce que $\lim_{h \to 0} f_{[h]}(z) = f(z)$ uniformément sur tout compact, il existe un nombre positif $h_{5,\varepsilon}$ tel que :

$$\left| \sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon - 1} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) - \sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon - 1} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon$$

pour $0 < h < h_{5,\varepsilon}$. Donc :

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \to \sum_{\nu=0}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$ et ceci quel que soit μ de 0 à $m - 1$. De manière analogue :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \to \sum_{\nu=-\infty}^{-1} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$ et ceci quel que soit μ de 0 à $m - 1$. Ici se termine la preuve du Théorème 1.