

R. ARCANGÉLI

C. RABUT

**Sur l'erreur d'interpolation par fonctions splines**

*Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 20, n° 2  
(1986), p. 191-201

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1986\\_\\_20\\_2\\_191\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_2_191_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



UNIVERSITÉ PAUL SABATIER  
 LABORATOIRE DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS  
 119, ROUTE DE NARBONNE  
 31062 TOULOUSE CEDEX

**SUR L'ERREUR D'INTERPOLATION  
 PAR FONCTIONS SPLINES (\*)**

par R. ARCANGÉLI <sup>(1)</sup> et C. RABUT <sup>(2)</sup>

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On établit une majoration de l'erreur d'interpolation par fonctions splines plaques minces pour des fonctions appartenant à l'espace de Sobolev d'ordre non entier  $H^{1+\theta}(\Omega)$ , avec  $0 < \theta \leq 1$ . On généralise ainsi les résultats obtenus par J. Duchon dans le cas de l'espace  $H^2(\Omega)$ .

Abstract. — Bounds for the thin plate spline interpolation error are derived for functions belonging to the fractional-order Sobolev space  $H^{1+\theta}(\Omega)$ , with  $0 < \theta \leq 1$ . This is a generalization of the results which J. Duchon had obtained for the space  $H^2(\Omega)$ .

**1. INTRODUCTION**

Pour tout ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $H^m(\Omega)$  l'espace de Sobolev (d'ordre entier) des (classes de) fonctions  $v$  qui appartiennent à  $L^2(\Omega)$  ainsi que toutes leurs dérivées partielles  $\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$  (où  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  et  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ ) d'ordre  $|\alpha| \leq m$ , muni de la norme  $\|v\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$ . On utilise également les semi-normes  $|v|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$  et  $[v]_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$ .

Pour tout ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $s = m + \theta$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in ]0, 1[$ , on désigne par  $H^s(\Omega)$  l'espace de Sobolev d'ordre non

(\*) Reçu en janvier 1985, révisé en juin 1985.

<sup>(1)</sup> Département de Mathématiques, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue de l'Université, 64000 Pau.

<sup>(2)</sup> Service de Mathématiques, I.N.S.A. de Toulouse.

entier (cf. par exemple Adams [1] et Lions-Magenes [6]) des (classes de) fonctions  $v \in H^m(\Omega)$  telles que

$$|v|_{s,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|^2}{|x - y|^{2+2\theta}} dx dy \right)^{1/2} < +\infty$$

( $|x - y|$  désigne la norme euclidienne de  $x - y$ ), muni de la norme

$$\|v\|_{s,\Omega} = \left( \sum_{l=0}^m |v|_{l,\Omega}^2 + |v|_{s,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Notons que, si  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  désignent deux ouverts disjoints de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\forall v \in H^s(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad |v|_{s,\Omega_1 \cup \Omega_2}^2 \geq |v|_{s,\Omega_1}^2 + |v|_{s,\Omega_2}^2 \tag{1.1}$$

et que si  $s'$  et  $s$  désignent deux réels tels que  $0 < s' < s$  et si  $\Omega$  est borné,

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s'}(\Omega).$$

Enfin pour tout compact  $K$  d'intérieur  $\overset{\circ}{K}$  non vide à frontière lipschitzienne et pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$ , entier ou non entier, on note  $H^s(K)$  au lieu de  $H^s(\overset{\circ}{K})$  et  $\|\cdot\|_{s,K}, |\cdot|_{l,K}, 0 \leq l < s$  et  $|\cdot|_{s,K}$  au lieu de  $\|\cdot\|_{s,\overset{\circ}{K}}, |\cdot|_{l,\overset{\circ}{K}}$  et  $|\cdot|_{s,\overset{\circ}{K}}$  respectivement.

Aux paragraphes 2, 3 et 4, on désigne par  $\Omega$  un carré ouvert à côtés parallèles aux axes de coordonnées. Soit  $\mathcal{H}$  une suite dans  $\mathbb{R}_+^*$  convergeant vers 0. Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , on suppose donnée une « triangulation »  $\mathcal{C}_h$  de  $\overline{\Omega}$  au moyen de carrés fermés égaux  $K$  de côtés  $h$  et on note  $A_h$  l'ensemble des nœuds de  $\mathcal{C}_h$ . Pour toute fonction  $f$  continue sur  $\overline{\Omega}$ , on note alors  $f^{A_h}$  la fonction spline « plaque mince » interpolant  $f$  sur  $A_h$ , i.e. (cf. Duchon [4]) la fonction de l'espace  $D^{-2} L^2(\mathbb{R}^2)$ , espace des distributions sur  $\mathbb{R}^2$  dont toutes les dérivées partielles d'ordre 2 appartiennent à  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , qui minimise  $[v]_{2,\mathbb{R}^2}$  dans l'ensemble des fonctions  $v$  de  $D^{-2} L^2(\mathbb{R}^2)$  qui interpolent  $f$  sur  $A_h$ .

On sait (cf. Duchon [4]) que si  $f \in H^2(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné assez régulier de  $\mathbb{R}^2$ , alors la suite des (restrictions à  $\Omega$  des) fonctions  $f^{A_h}$  converge vers  $f$  dans  $H^2(\Omega)$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Dans ce travail, nous montrons la convergence de la suite  $(f^{A_h})$  lorsque  $f$  est moins régulière : on suppose seulement que  $f \in H^{1+\theta}(\Omega)$ , avec  $0 < \theta \leq 1$  (rappelons que, d'après le théorème de Sobolev,  $H^{1+\theta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ ). Pour cela on introduit au paragraphe 2 une fonction polynomiale par morceaux  $\tilde{\Pi}_h f \in H^2(\Omega)$  interpolant  $f$  sur  $A_h$  et, aux paragraphes 3 et 4, on majore séparément les deux termes de la décomposition

$$f - \sigma_h = (f - \tilde{\Pi}_h f) + (\tilde{\Pi}_h f - \sigma_h),$$

où pour simplifier  $\sigma_h$  est mis à la place de  $f^{A_h}$ . Au paragraphe 5, on obtient ainsi une majoration de l'erreur  $f - \sigma_h$  en norme  $\| \cdot \|_{1+\eta, \Omega}$ , avec  $0 < \eta < \theta$  lorsque  $\Omega$  est un carré et on généralise le résultat obtenu au cas où  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$  frontière lipschitzienne.

On montre ainsi la convergence de  $(\sigma_h)$  vers  $f$  dans  $H^{1+\eta}(\Omega)$  et par conséquent aussi la convergence de  $(\sigma_h)$  dans  $C^0(\overline{\Omega})$ .

2. DÉFINITION DE L'INTERPOLANT  $\tilde{\Pi}_h f$

Soit  $h \in \mathcal{H}$ , fixé.

Soit  $V_h$  l'espace des fonctions polynomiales par morceaux ainsi défini :  $V_h$  est l'espace de type « éléments finis » d'élément générique « Bogner-Fox-Schmit » (en abrégé B.F.S.) associé à l'ensemble de degrés de liberté  $\{ v \mapsto \partial^\alpha v(a) ; a \in A_h, \alpha \in J \}$ , où  $J$  désigne l'ensemble  $\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \}$ .

L'élément fini de B.F.S. (cf. Ciarlet [3]) est le triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$ , où  $K$  désigne ici un carré appartenant à  $\mathcal{T}_h$ ,  $P_K$  l'espace  $Q_3(K)$  des fonctions polynomiales de degré  $\leq 3$  par rapport à chaque variable et  $\Sigma_K$  l'ensemble  $\{ v \mapsto \partial^\alpha v(a) ; a \in K \cap A_h, \alpha \in J \}$ .

D'autre part, l'élément fini de B.F.S. est de classe  $C^1$ , donc on a l'inclusion :  $V_h \subset H^2(\Omega)$ .

Enfin le  $V_h$ -interpolant d'une fonction  $v$  suffisamment régulière s'écrit

$$\Pi_h v = \sum_{\substack{a \in A_h \\ \alpha \in J}} \partial^\alpha v(a) w_{a,\alpha}, \tag{2.1}$$

où  $\{ w_{a,\alpha} ; a \in A_h, \alpha \in J \}$  désigne l'ensemble des fonctions de base de  $V_h$ , dont nous ne rappellerons pas l'expression ici.

Définissons maintenant l'interpolant  $\tilde{\Pi}_h v$  d'une fonction  $v$  supposée seulement continue sur  $\overline{\Omega}$ . On pose

$$\tilde{\Pi}_h v = \sum_{\substack{a \in A_h \\ \alpha \in J}} \tilde{v}_{a,\alpha} w_{a,\alpha}, \tag{2.2}$$

où, pour tout  $\alpha \neq (0, 0)$ , les nombres  $\tilde{v}_{a,\alpha}$  sont des approximations de type différences finies des dérivées  $\partial^\alpha v(a)$ . Plus précisément, en désignant par  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on prend

$$\forall a \in A_h, \quad \tilde{v}_{a,(0,0)} = v(a) \tag{2.3}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{a,(1,0)} = \frac{1}{h} (v(a + \varepsilon_1 h e_1) - v(a)), \\ \tilde{v}_{a,(0,1)} = \frac{1}{h} (v(a + \varepsilon_2 h e_2) - v(a)), \\ \tilde{v}_{a,(1,1)} = \frac{1}{h^2} (v(a + \varepsilon_1 h e_1 + \varepsilon_2 h e_2) + v(a) - v(a + \varepsilon_1 h e_1) - \\ \hspace{15em} - v(a + \varepsilon_2 h e_2)), \\ \text{avec} \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \quad \text{si } a + h e_1 + h e_2 \in \overline{\Omega}, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \quad \text{si } a + h e_1 + h e_2 \notin \overline{\Omega} \text{ et } a - h e_1 - h e_2 \in \overline{\Omega}, \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1, \quad \text{si } a + h e_1 + h e_2 \notin \overline{\Omega}, \quad a - h e_1 - h e_2 \notin \overline{\Omega} \\ \hspace{10em} \text{et } a + h e_1 - h e_2 \in \overline{\Omega}, \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1, \quad \text{sinon.} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Par construction, l'interpolant  $\tilde{\Pi}_h v$  d'une fonction  $v \in C^0(\overline{\Omega})$  appartient à l'espace  $V_h$ .

### 3. ÉTUDE DE L'ERREUR $f - \tilde{\Pi}_h f$

Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , on désigne par  $\mathcal{K}$  le carré

$$\mathcal{K}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = K \cup (K + \varepsilon_1 h e_1) \cup (K + \varepsilon_2 h e_2) \cup (K + \varepsilon_1 h e_1 + \varepsilon_2 h e_2),$$

avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ , si  $\mathcal{K}_{1,1} \subset \overline{\Omega}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$  si  $\mathcal{K}_{1,1} \not\subset \overline{\Omega}$  et si  $\mathcal{K}_{-1,-1} \subset \overline{\Omega}$ ;  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ , si  $\mathcal{K}_{1,1} \not\subset \overline{\Omega}$ ,  $\mathcal{K}_{-1,-1} \not\subset \overline{\Omega}$  et  $\mathcal{K}_{1,-1} \subset \overline{\Omega}$ ;  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$ , sinon.

Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  et pour toute fonction  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière, on définit alors la fonction  $\tilde{\Pi}_K v : K \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\tilde{\Pi}_K v = \sum_{\substack{a \in K \cap A_h \\ \alpha \in J}} \tilde{v}_{a,\alpha} w_{a,\alpha} |_K. \quad (3.1)$$

Il résulte immédiatement des définitions (2.2) et (3.1) et des propriétés des fonctions de base  $w_{a,\alpha}$  de  $V_h$  que

$$\forall v \in C^0(\overline{\Omega}), \quad (\tilde{\Pi}_h v) |_K = \tilde{\Pi}_K v. \quad \square \quad (3.2)$$

Dans la suite la lettre  $C$  désignera diverses constantes.

PROPOSITION 3.1 : Pour tout  $s \in ]0, 1]$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \leq s$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall v \in H^s(\mathcal{K}), \quad |v - \tilde{\Pi}_K v|_{m,K} \leq Ch^{s-m} |v|_{s,\mathcal{K}}.$$

Démonstration :

a) Soient  $\hat{K}$  et  $\hat{\mathcal{K}}$  deux carrés fermés fixes de  $\mathbb{R}^2$ , de côtés  $\hat{h}$  et  $2\hat{h}$  respectivement, avec  $\hat{K} \subset \hat{\mathcal{K}}$ ,  $\hat{K}$  et  $\hat{\mathcal{K}}$  ayant un sommet commun. Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , on note  $F_K$  la similitude  $\hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K$  avec  $B_K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  et  $b_K \in \mathbb{R}^2$ , telle que  $K = F_K(\hat{K})$  et  $\mathcal{K} = F_K(\hat{\mathcal{K}})$ . On remarque que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\|B_K\| = \|B_K^{-1}\|^{-1} = |\det B_K|^{1/2} = \frac{h}{\hat{h}}. \tag{3.3}$$

A toute fonction  $\hat{v} : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$  (resp. à toute fonction  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ ) on associe la fonction  $v = \hat{v} \circ F_K^{-1}$  (resp. la fonction  $\hat{v} = v \circ F_K$ ) et pour toute fonction  $\hat{v} : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière, on définit la fonction  $\tilde{\Pi}\hat{v} : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\tilde{\Pi}\hat{v} = \sum_{\substack{\alpha \in \hat{S} \\ \alpha \in J}} (\hat{v})_{\alpha,\alpha} \hat{p}_{\alpha,\alpha}, \tag{3.4}$$

où  $\hat{S}$  désigne l'ensemble des sommets de  $\hat{K}$ , où les nombres  $(\hat{v})_{\alpha,\alpha}$  sont définis comme en (2.3) et (2.4) et où les fonctions  $\hat{p}_{\alpha,\alpha}$  sont les fonctions de base de l'élément fini de B.F.S. sur  $\hat{K}$ .

On vérifie immédiatement que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall v \in C^0(\mathcal{K}), \quad \widehat{\tilde{\Pi}_K v} = \tilde{\Pi}\hat{v}. \tag{3.5}$$

On vérifie également que, d'après (2.3) et (2.4) et compte tenu du fait que, pour l'élément fini de B.F.S. sur  $\hat{K}$ ,  $P_{\hat{K}} = Q_3(\hat{K})$ , on a :

$$\forall \hat{\psi} \in P_1(\hat{\mathcal{K}}), \quad \tilde{\Pi}\hat{\psi} = \hat{\psi}|_{\hat{K}}. \tag{3.6}$$

b) On raisonne maintenant comme dans Ciarlet [3]. Soit  $v \in H^s(\mathcal{K})$ , avec  $1 < s \leq 2$ . Comme  $H^s(\mathcal{K}) \subset C^0(\mathcal{K})$ ,  $\tilde{\Pi}_K v$  est défini et l'on voit, compte tenu de (3.5), que pour  $m \leq s$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$|v - \tilde{\Pi}_K v|_{m,K} \leq C \|B_K^{-1}\|^m |\det B_K|^{1/2} |\hat{v} - \tilde{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{K}}. \tag{3.7}$$

Mais la semi-norme  $|\cdot|_{s,\mathcal{K}}$  est sur l'espace quotient  $H^s(\hat{\mathcal{K}})_{/P_1(\hat{\mathcal{K}})}$  une norme équivalente à la norme quotient (cf. Ciarlet [3] lorsque  $s = 2$ , Sanchez-Arcangeli [8] dans le cas  $s \in ]1, 2[$ ). Utilisant (3.6), il vient

$$|\hat{v} - \tilde{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{s,\hat{\mathcal{K}}}. \tag{3.8}$$

c) D'après [8], on a pour  $s \in ]1, 2[$  :

$$|\hat{v}|_{s, \hat{\mathcal{X}}} \leq C \|B_K\|^{s+1} |\det B_K|^{-1} |v|_{s, \mathcal{X}},$$

soit encore, compte tenu de (3.5), la relation

$$|\hat{v}|_{s, \hat{\mathcal{X}}} \leq C \|B_K\|^s |\det B_K|^{-1/2} |v|_{s, \mathcal{X}}, \tag{3.9}$$

et il est classique que (3.9) est encore vraie pour  $s = 2$ . Il suffit alors de combiner (3.7), (3.8) et (3.9) et d'utiliser (3.3) pour obtenir le résultat.  $\square$

On peut maintenant établir le

**THÉORÈME 3.1 :** *Pour tous réels  $\theta$  et  $\eta$  tels que  $0 < \eta < \theta \leq 1$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall f \in H^{1+\theta}(\Omega), \quad \|f - \tilde{\Pi}_h f\|_{1+\eta, \Omega} \leq Ch^{\theta-\eta} \|f\|_{1+\theta, \Omega}.$$

*Démonstration :*

a) Pour tout  $s \in ]1, 2[$ , soit  $v \in H^s(\Omega)$ . Avec 3.2, on déduit de la proposition 3.1 que

$$\|v - \tilde{\Pi}_h v\|_{1, \Omega}^2 \leq Ch^{2(s-1)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{s, K}^2.$$

Mais chaque terme  $|v|_{s, K}^2$  n'intervient qu'au plus un nombre fini de fois dans la sommation, donc

$$\|v - \tilde{\Pi}_h v\|_{1, \Omega}^2 \leq Ch^{2(s-1)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{s, K}^2.$$

Compte tenu de la sur-additivité du carré de la semi-norme  $|\cdot|_{s, K}$  (cf. (1.1) pour  $s \in ]1, 2[$ ), il vient

$$\|v - \tilde{\Pi}_h v\|_{1, \Omega} \leq Ch^{s-1} |v|_{s, \Omega}. \tag{3.10}$$

Soit  $v \in H^2(\Omega)$ . On obtient de même

$$\|v - \tilde{\Pi}_h v\|_{2, \Omega} \leq C |v|_{2, \Omega}. \tag{3.11}$$

b) Supposons maintenant  $\theta$  et  $\eta$  donnés, avec  $0 < \eta < \theta \leq 1$ , et raisonnons par interpolation abstraite entre espaces de Hilbert. Utilisons la méthode des traces de Lions (cf. Lions-Magenes [6]). Alors on a algébriquement et topologiquement

$$(H^1(\Omega), H^2(\Omega))_\eta = H^{1+\eta}(\Omega),$$

où le premier membre désigne l'espace d'interpolation du paramètre  $\eta$  entre  $H^1(\Omega)$  et  $H^2(\Omega)$ , et si on choisit

$$s = \frac{1 + \theta - 2 \eta}{1 - \eta}, \tag{3.12}$$

on a de même

$$(H^s(\Omega), H^2(\Omega))_\eta = H^{1+\theta}(\Omega).$$

Les relations (3.10) et (3.11) montrent que

$$I - \tilde{\Pi}_h \in \mathcal{L}(H^s(\Omega), H^1(\Omega)) \cap \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^2(\Omega)).$$

Le théorème d'interpolation pour les applications linéaires donne alors le résultat avec le choix (3.12) de  $s$ , vu que

$$(1 - \eta) \left( \frac{1 + \theta - 2 \eta}{1 - \eta} - 1 \right) = \theta - \eta. \quad \square$$

**4. ÉTUDE DE L'ERREUR  $\tilde{\Pi}_h f - \sigma_h$**

Puisque  $\tilde{\Pi}_h f = f$  sur  $A_h$ , la quantité  $\tilde{\Pi}_h f - \sigma_h$ , où  $\sigma_h$  est mis pour  $f^{A_h}$ , fonction spline plaque mince interpolant  $f$  sur  $A_h$ , représente aussi l'erreur d'interpolation de l'élément  $\tilde{\Pi}_h f$  par la fonction spline plaque mince  $(\tilde{\Pi}_h f)^{A_h}$  interpolant  $\tilde{\Pi}_h f$  sur  $A_h$ .

**PROPOSITION 4.1 :** *Pour tous réels  $s$  et  $s'$  tels que  $1 < s' < s \leq 2$  et pour  $m = 0, 1$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall v \in H^s(\Omega), \quad | \tilde{\Pi}_h v - v^{A_h} |_{m,\Omega} \leq C h^{s'-m} \| v \|_{s,\Omega},$$

où  $v^{A_h}$  désigne la fonction spline plaque mince interpolant  $v$  sur  $A_h$ .

*Démonstration :*

a) Rappelons que, pour tout  $v \in H^s(\Omega)$ ,  $1 < s \leq 2$ , l'interpolant  $\tilde{\Pi}_h v$  défini en (2.2) appartient à  $H^2(\Omega)$ . Alors, d'après Duchon [5], pour  $m = 0, 1, 2$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall v \in H^s(\Omega), \quad 1 < s \leq 2, \quad | \tilde{\Pi}_h v - v^{A_h} |_{m,\Omega} \leq C h^{2-m} | \tilde{\Pi}_h v |_{2,\Omega}. \tag{4.1}$$

b) Soient  $s' \in ]1, 2[$  et  $v \in H^{s'}(\Omega)$ . Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , considérons le terme  $| \tilde{\Pi}_K v |_{2,K}$  et raisonnons comme dans la démonstration de la proposition 3.1. On obtient

$$| \tilde{\Pi}_K v |_{2,K} \leq C \| B_K^{-1} \|^2 | \det B_K |^{1/2} | \tilde{\Pi} \hat{v} |_{2,K}. \tag{4.2}$$



Mais les semi-normes  $|\cdot|_{2,\hat{K}}$  et  $|\cdot|_{s',\hat{K}}$  sont des normes équivalentes sur l'espace quotient (de dimension finie)  $Q_3(\hat{K})_{/P_1(\hat{K})}$ . Comme  $\tilde{\Pi}\hat{v} \in Q_3(\hat{K})$ , on en déduit que

$$|\tilde{\Pi}\hat{v}|_{2,\hat{K}} \leq C |\tilde{\Pi}\hat{v}|_{s',\hat{K}}. \tag{4.3}$$

D'autre part, il vient [cf. (3.9)]

$$|\tilde{\Pi}\hat{v}|_{s',\hat{K}} \leq C \|B_K\|^{s'} |\det B_K|^{-1/2} |\tilde{\Pi}_K v|_{s',K}. \tag{4.4}$$

Combinant (4.2), (4.3) et (4.4), on obtient avec (3.3)

$$|\tilde{\Pi}_K v|_{2,K} \leq Ch^{s'-2} |\tilde{\Pi}_K v|_{s',K},$$

d'où

$$|\tilde{\Pi}_h v|_{2,\Omega} \leq Ch^{s'-2} |\tilde{\Pi}_h v|_{s',\Omega}. \tag{4.5}$$

c) Soient maintenant  $s$  et  $s'$  tels que  $1 < s' < s \leq 2$  et  $v \in H^s(\Omega)$ . Alors  $v \in H^{s'}(\Omega)$  et l'on déduit du théorème 3.1 que

$$|\tilde{\Pi}_h v|_{s',\Omega} \leq C \|v\|_{s,\Omega}. \tag{4.6}$$

La proposition (4.1) résulte alors de (4.1), (4.5) et (4.6).  $\square$

**THÉORÈME 4.1 :** *Pour tous réels  $\theta, \theta'$  et  $\eta$  tels que  $0 < \eta < \theta' < \theta \leq 1$ , il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall f \in H^{1+\theta}(\Omega), \quad \|\tilde{\Pi}_h f - \sigma_h\|_{1+\eta,\Omega} \leq Ch^{\theta'-\eta} \|f\|_{1+\theta,\Omega}.$$

*Démonstration :* Soit  $T_h$  l'opérateur  $f \mapsto \tilde{\Pi}_h f - \sigma_h$ . Il résulte de la proposition 4.1 d'une part et des relations (4.1) et (3.11) d'autre part que

$$T_h \in \mathcal{L}(H^s(\Omega), H^1(\Omega)) \cap \mathcal{L}(H^2(\Omega), H^2(\Omega)).$$

On obtient alors le résultat en raisonnant par interpolation entre espaces de Hilbert comme dans la démonstration du théorème 3.1, en choisissant  $s' = \frac{1 + \theta' - 2\eta}{1 - \eta}$ .  $\square$

### 5. MAJORATIONS DE L'ERREUR D'INTERPOLATION PAR FONCTIONS SPLINES

Pour simplifier, supposons dans ce paragraphe que  $h < 1$ .

Combinant les théorèmes 3.1 et 4.1, on a évidemment le

**THÉORÈME 5.1 :** *Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un carré ouvert et  $\sigma_h$  la fonction spline plaque mince définie comme au paragraphe 1. Alors, pour tous réels  $\theta, \theta'$  et  $\eta$*

tels que  $0 < \eta < \theta' < \theta \leq 1$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall f \in H^{1+\theta}(\Omega), \quad \|f - \sigma_h\|_{1+\eta, \Omega} \leq Ch^{\theta'-\eta} \|f\|_{1+\theta, \Omega}. \quad \square \quad (5.1)$$

Le résultat précédent est également valable pour la «  $D^2$ -spline dans  $\Omega$  » interpolant  $f$  sur  $A_h$ , i.e. l'élément de  $H^2(\Omega)$  qui minimise  $|v|_{2, \Omega}$  dans l'ensemble des fonctions  $v$  de  $H^2(\Omega)$  qui interpolent  $f$  sur  $A_h$  :

**THÉOREME 5.2 :** *Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un carré ouvert et  $\sigma_h$  la  $D^2$ -spline dans  $\Omega$  interpolant  $f$  sur l'ensemble  $A_h$  défini au paragraphe 1. Alors pour tous réels  $\theta, \theta'$  et  $\eta$  tels que  $0 < \eta < \theta' < \theta \leq 1$ , il existe une constante  $C$  telle que la relation (5.1) ait lieu.*

*Démonstration :* La relation (4.1) est encore valable dans le cas où  $v^{A_h}$  est la  $D^2$ -spline dans  $\Omega$  interpolant  $v$  sur  $A_h$  (cf. [2]). Le reste de la proposition 4.1 est inchangé et on en déduit que le théorème 4.1 reste vrai lorsque  $\sigma_h$  est la  $D^2$ -spline dans  $\Omega$  interpolant  $f$  sur  $A_h$ . D'où le résultat.  $\square$

On peut maintenant généraliser le résultat obtenu au théorème 5.1. On suppose dorénavant que (cf. Duchon [5]).

$$\Omega \text{ est un ouvert borné connexe de } \mathbb{R}^2 \text{ à frontière lipschitzienne,} \quad (5.2)$$

et on désigne par  $\Omega_1$  un carré ouvert contenant  $\Omega$ . Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ , on définit  $A_h^1$  à partir de  $\Omega_1$  comme au paragraphe 1 on a défini  $A_h$  à partir de  $\Omega$  et on pose  $A_h = A_h^1 \cap \bar{\Omega}$ . Enfin on note encore  $\sigma_h$  la fonction spline plaque mince  $f^{A_h}$  interpolant  $f$  sur  $A_h$ .

**THÉOREME 5.3 :** *Soient  $\Omega$  un ouvert vérifiant (5.2) et  $\sigma_h$  la fonction spline plaque mince définie comme ci-dessus. Alors, pour tous réels  $\theta, \theta'$  et  $\eta$  tels que  $0 < \eta < \theta' < \theta \leq 1$ , il existe une constante  $C$  telle que la relation (5.1) ait lieu.*

*Démonstration :*

1) Soient  $\theta, \theta'$  et  $\eta$ , avec  $0 < \eta < \theta' < \theta \leq 1$  et  $f \in H^{1+\theta}(\Omega)$ . L'ouvert  $\Omega$  vérifiant (5.2), on sait (cf. Lions-Magenes [6]) qu'il existe un opérateur de prolongement  $P \in \mathcal{L}(H^s(\Omega), H^s(\mathbb{R}^2))$ ,  $0 \leq s \leq 2$ . Notons

$$f_1 = (Pf)|_{\Omega_1}$$

et définissons  $\tilde{\Pi}_h f_1$  sur  $\Omega_1$  comme au paragraphe 2 on a défini  $\tilde{\Pi}_h f$  sur  $\Omega$ .

2) D'après le théorème 3.1, on a

$$\|f_1 - \tilde{\Pi}_h f_1\|_{1+\eta, \Omega_1} \leq Ch^{\theta'-\eta} \|f_1\|_{1+\theta, \Omega_1}.$$

D'autre part, il est clair que

$$\forall s \in [0, 2], \quad \forall v \in H^s(\Omega), \quad \|Pv\|_{s,\Omega_1} \leq C \|v\|_{s,\Omega}. \quad (5.3)$$

On en déduit la relation

$$\|f - \tilde{\Pi}_h f_1\|_{1+\eta,\Omega} \leq Ch^{\theta-\eta} \|f\|_{1+\theta,\Omega}, \quad (5.4)$$

qui joue le rôle du résultat du théorème 3.1.

3) Soient  $s$  et  $s'$  tels que  $1 < s' < s \leq 2$ ,  $v \in H^s(\Omega)$  et  $v_1 = (Pv)|_{\Omega_1}$ . D'après Duchon [5], pour  $m = 0, 1, 2$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$|\tilde{\Pi}_h v_1 - v^{A_h}|_{m,\Omega} \leq Ch^{2-m} |\tilde{\Pi}_h v_1|_{2,\Omega},$$

relation qui correspond à (4.1). Avec (5.3), on obtient de même, au lieu de (4.5) et (4.6) :

$$|\tilde{\Pi}_h v_1|_{2,\Omega_1} \leq Ch^{s'-2} \|v\|_{s,\Omega}.$$

On en déduit une proposition analogue à la proposition 4.1 et aussi par conséquent une relation qui remplace le résultat du théorème 4.1 :

$$\|\tilde{\Pi}_h f_1 - \sigma_h\|_{1+\eta,\Omega} \leq Ch^{\theta-\eta} \|f\|_{1+\theta,\Omega}.$$

D'où le théorème 5.3, compte tenu de (5.4).  $\square$

Puisque, d'après le théorème de Sobolev :  $H^{1+\eta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ , il est clair que l'on a le

**COROLLAIRE 5.1** : *On se place dans la situation du théorème 5.3. Alors, pour toute fonction  $f \in H^{1+\theta}(\Omega)$ , avec  $\theta > 0$ , la fonction spline plaque mince  $\sigma_h$  interpolant  $f$  sur  $A_h$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\overline{\Omega}$ .  $\square$*

*Remarque 5.1* : On peut se demander ce qui justifie l'introduction de l'interpolant polynomial  $\tilde{\Pi}_h f$ .

Raisonnant comme dans Duchon [5], on peut obtenir *directement* pour  $m = 0, 1$  une majoration de la forme

$$\forall f \in H^s(\Omega), \quad 1 < s < 2, \quad |f - \sigma_h|_{m,\Omega} \leq Ch^{s-m} |f - \sigma_h|_{s,\Omega}. \quad (5.5)$$

Malheureusement on ne voit pas comment majorer le second membre de (5.5) et, de ce fait, on ne peut conclure.  $\square$

*Remarque 5.2* : Il est clair qu'on pourrait généraliser le théorème 5.3 au cas des  $D^m$ -splines dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \geq 2$ , interpolant une fonction  $f \in H^s(\Omega)$ ,  $1 < s \leq m$  (rappelons que les splines plaques minces correspondent au cas

$m = 2$ ; cf. Duchon [4]). Mais cela suppose l'introduction d'un interpolant polynomial  $\tilde{\Pi}_h f$  de classe  $C^{m-1}$  dont l'explicitation est compliquée, quoique sans difficultés théoriques.

L'extension aux  $D^m$ -splines dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  ne pose elle aussi que des problèmes techniques.

Par contre, on voit mal comment traiter le cas des splines définies sur des ensembles  $A_h$  quelconques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York (1975).
- [2] R. ARCANGELI, *Thèse*, Toulouse (1974).
- [3] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam (1978).
- [4] J. DUCHON, *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces*, R.A.I.R.O., Anal. Numer., vol. 10, n° 12, 5-12 (1976).
- [5] J. DUCHON, *Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les  $D^m$ -splines*, R.A.I.R.O. Anal. Numer., vol. 12, n° 4, 325-334 (1978).
- [6] J. M. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris (1968).
- [7] J. L. LIONS, J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., Paris, n° 19, 5-68 (1964).
- [8] A. M. SANCHEZ, R. ARCANGELI, *Estimations des erreurs de meilleure approximation polynomiale et d'interpolation de Lagrange dans les espaces de Sobolev d'ordre non entier*, NUMER. MATH. VOL. 45, 301-321 (1984).

UNIVERSITE PAUL SABATIER  


---

  
 LABORATOIRE  
 DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

118, ROUTE DE NARBONNE  
 31062 TOULOUSE CEDEX