RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN JACQUES MOREAU

Approximation en graphe d'une évolution discontinue

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, nº 1 (1978), p. 75-84
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_1_75_0>

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 12, n° 1, 1978, p. 75 à 84)

APPROXIMATION EN GRAPHE D'UNE ÉVOLUTION DISCONTINUE (*)

par Jean Jacques MOREAU [1]

Communiqué par P. J. Laurent

Résumé. — *Une mesure de la qualité de l'approximation d'une fonction est définie, tenant compte à la fois des incertitudes sur les valeurs de la variable et les valeurs de la fonction. Application à un algorithme pour la résolution d'un certain processus d'évolution.*

1. INTRODUCTION

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, à valeurs dans un espace métrique (F, d_F). La connaissance d'une suite de fonctions calculables (f_n) convergeant uniformément vers f est usuellement reconnue, si la convergence est assez rapide, comme un fondement confortable pour l'approximation numérique de f.

Toutefois l'approximation uniforme peut être incompatible avec l'information effectivement disponible. Supposons que E soit un intervalle réel I (intervalle de temps, par exemple, auquel cas on dira que $f : I \longrightarrow F$ est une *évolution*) et que f présente des discontinuités en des points isolés τ_i de I. Les fonctions (f_n) d'une suite convergeant uniformément vers f devront nécessairement posséder aussi des discontinuités. De façon précise, si ρ_i est l'oscillation de f au point τ_i, toute fonction f_n approchant f uniformément à moins de ρ_i devra admettre τ_i comme point de discontinuité. L'approximation uniforme implique de la sorte la connaissance exacte des points de discontinuité de f. L'information possédée, sur le processus évolutif que f représente, comportera parfois cette connaissance exacte; dans d'autres cas non, et alors l'espoir d'approximations uniformes est exclu.

L'objet de cet article est de présenter, si (E, d_E) et (F, d_F) sont deux espaces métriques, un concept d'approximation d'une fonction $f : E \longrightarrow F$ prenant en compte à la fois l'incertitude sur la valeur de la variable et sur la valeur de la fonction. Pour deux fonctions f et g est défini un écart noté $h(f, g)$. Si on fait de l'espace produit $E \times F$ un espace métrique par

$$d_{E\times F}((x, y), (x', y')) = \max\{d_E(x, x'), d_F(y, y')\},$$

(*) Reçu mai 1977.

[1] Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

il vient que $h(f, g)$ égale l'écart de Hausdorff entre les graphes $\operatorname{gr} f$ et $\operatorname{gr} g$ dans cet espace produit. On parlera donc d'*approximation en graphe.*

Le paragraphe 2 ci-après formalise les définitions et leurs conséquences immédiates.

L'écart de Hausdorff entre deux sous-ensembles de $E \times F$ est nul si et seulement si ces sous-ensembles ont même adhérence. D'où l'intérêt qu'il y a ici à caractériser des classes de fonctions f telles qu'on ait correspondance bijective entre f et l'adhérence de son graphe; c'est l'objet du paragraphe 3. En particulier pour E intervalle réel, les fonctions *continues à droite* (resp. à gauche) forment une telle classe. Or bien d'autres raisons concourent à imposer la continuité à droite dans des problèmes d'évolution usuels (*cf.* [2]).

Le reste du papier illustre le concept par l'exemple du *processus de rafle par un convexe mobile d'un espace hilbertien H*, un problème auquel l'auteur a déjà consacré un nombre imposant de pages du Séminaire d'Analyse Convexe (tous les éléments invoqués pourront être trouvés dans les articles de synthèse [1] et [3]). Le processus est étudié ici sur un intervalle de temps compact $[t_0, t_0+T]$. La base des études antérieures était une procédure de discrétisation du temps dite *algorithme de rattrapage* : à toute subdivision finie

$$s: \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T$$

est associée une fonction en escalier $x_s : [t_0, t_0+T] \to H$. L'ensemble des subdivisions telles que s, ordonné par l'inclusion (i. e. $s < s'$ signifie que s' est un raffinement de s), est filtrant à droite. Moyennant des hypothèses convenables il a été prouvé que la « suite généralisée » des x_s converge uniformément sur $[t_0, t_0+T]$ vers la solution u du processus. Evidemment, si u possède des points de discontinuité, une telle convergence exige que chacun de ces points figure exactement dans les subdivisions s à partir d'un certain raffinement. La conclusion obtenue ici est plus satisfaisante en pratique pour l'approximation numérique : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\max(t_{i+1} - t_i) < \alpha \quad \Rightarrow \quad h(x_s, u) < \varepsilon.$$

Ce n'est donc plus une convergence uniforme qu'on obtient, mais une *convergence en graphe.*

2. ÉCART DE DEUX FONCTIONS

DÉFINITION 1 : *Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques et soient deux fonctions $f, g : E \to F$. On dira que f et g sont proches à moins de ε (réel strictement positif donné) si on a*

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E : \qquad d_E(x, x') < \varepsilon, \qquad d_F(f(x), g(x')) < \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E : \qquad d_E(x, x') < \varepsilon, \qquad d_F(g(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

*L'*inf *des* $\varepsilon > 0$ *tels que* (2.1) *et* (2.2) *aient lieu sera appelé écart de* f *et* g*; notation* $h(f, g)$ (*cet* inf *vaut* $+\infty$ *si l'ensemble des* ε *en question est vide*).

Faisons du produit $E \times F$ un espace métrique en posant, pour deux éléments (x, y), (x', y') de ce produit,

$$d_{E \times F}((x, y), (x', y')) = \max\{d_E(x, x'), d_F(y, y')\}. \tag{2.3}$$

PROPOSITION 1: *Si* $E \times F$ *est muni de la distance* (2.3), *l'écart des deux fonctions* f *et* g *est égal à l'écart de Hausdorff de leurs graphes.*

Preuve : La propriété (2.1) équivaut à

$$\forall (x, y) \in \operatorname{gr} f, \quad \exists (x', y') \in \operatorname{gr} g : \qquad d_{E \times F}((x, y), (x', y')) < \varepsilon \tag{2.4}$$

ce qui équivaut à (notation de distance d'un point à un ensemble) :

$$\forall (x, y) \in \operatorname{gr} f : \quad d_{E \times F}((x, y), \operatorname{gr} g) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Même remarque en échangeant f et g. On en conclut que si ε majore strictement $h(f, g)$, on a, en notant $h_{E \times F}$ l'écart de Hausdorff entre parties de $E \times F$,

$$\varepsilon \geqq h_{E \times F}(\operatorname{gr} f, \operatorname{gr} g).$$

Inversement, soit ε vérifiant cette inégalité strictement; cela entraîne (2.5), d'où (2.4) et la même conclusion en échangeant f et g ce qui fait que $\varepsilon \geqq h(f, g)$.

COROLLAIRE 1 : *L'écart* $h(f, g)$ *est nul si et seulement si les graphes* $\operatorname{gr} f$ *et* $\operatorname{gr} g$ *ont même adhérence dans* $E \times F$.

COROLLAIRE 2 : *Pour trois fonctions quelconques* f_1, f_2, f_3 *on a l'inégalité triangulaire*

$$h(f_1, f_3) \leqq h(f_1, f_2) + h(f_2, f_3). \tag{2.6}$$

3. CONVERGENCE EN GRAPHE

DÉFINITION 2 : *On dit qu'une suite* (f_n) *converge en graphe vers une fonction* f *si*

$$\lim_{n \to \infty} h(f, f_n) = 0. \tag{3.1}$$

Il résulte de l'inégalité triangulaire (2.6) qu'une autre fonction g possède la même propriété si et seulement si $h(f, g) = 0$, c'est-à-dire vu la proposition 1,

$$\operatorname{adh} \operatorname{gr} f = \operatorname{adh} \operatorname{gr} g \tag{3.2}$$

dans l'espace produit $E \times F$. Cette notion de convergence n'est donc confortable que si l'on se restreint à des classes de fonctions correspondant bijectivement avec les adhérences de leurs graphes dans $E \times F$. Le lemme topologique suivant aide à découvrir de telles classes :

LEMME 1 : *Soit E un espace topologique quelconque et F un espace topologique régulier. Soient f, g : $E \longrightarrow F$ telles que, dans l'espace topologique $E \times F$, on ait*

$$\operatorname{gr} f \subset \operatorname{adh} \operatorname{gr} g. \tag{3.3}$$

Soit B une base de filtre constituée d'ouverts de E. Si $\lim_B g$ *existe,* $\lim_B f$ *existe et lui est égale.*

Preuve : Puisque F est régulier, l'élément $\lim_B g$ possède un système fondamental de voisinages qui sont fermés. Quel que soit un tel voisinage V, il existe $\omega \in B$ tel que

$$\forall x \in \omega : \quad g(x) \in V.$$

Montrons que la même propriété a lieu pour f. Soit $x' \in \omega$ et supposons $f(x') \in F \setminus V$. Le produit $\omega \times (F \setminus V)$ est un ouvert de $E \times F$ contenant le point $(x', f(x')) \in \operatorname{gr} f$. D'après l'hypothèse (3.3) cet ouvert rencontre $\operatorname{gr} g$, c'est-à-dire

$$\exists x \in \omega : \quad g(x) \in F \setminus V,$$

contradictoire.

On s'intéresse dans ce qui vient à des *problèmes d'évolution*; désormais E sera donc un intervalle réel (intervalle de temps) muni de la distance usuelle de $\mathbf{R}$.

PROPOSITION 2 : *Soit I un intervalle réel ouvert à droite. Si f, g : $I \longrightarrow (F, d_F)$ sont continues à droite on a l'implication*

$$h(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = g. \tag{3.4}$$

En effet, si f (resp. g) est continue à droite, pour tout $t \in I$, la valeur $f(t)$ est la limite de f selon la base de filtre constituée par les intervalles ouverts $I \cap \,]t, t+(1/n)[$, $n \in \mathbf{N}$.

En fait beaucoup d'études de problèmes d'évolution sont développés plutôt pour un *intervalle compact* et on pose souvent :

CONVENTION : *Une fonction f est dite continue à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0+T]$ si elle est continue à droite en tout point de $[t_0, t_0+T[$.*

L'exemple suivant montre que *cette convention ne sauvegarde pas en général l'implication* (3.4). Définir les deux fonctions f et g sur l'intervalle compact $[-1, 0]$ par

$$f(t) = g(t) = \sin \frac{1}{t} \qquad \text{si} \quad t \in [-1, 0[$$

$$f(0) = 1, \qquad g(0) = -1.$$

Les deux fonctions sont continues à droite et leurs graphes dans $[-1, 0] \times \mathbf{R}$ ont visiblement même adhérence.

Toutefois le cas suivant est très usuel :

PROPOSITION 3 : *Soient f, g à valeurs dans l'espace métrique (F, d_F), continues à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0+T]$ au sens de la convention ci-dessus. Si les deux fonctions possèdent des limites à gauche au point t_0+T on a l'implication* (3.4).

En effet, l'existence de la limite à gauche, soit l, de f au point t_0+T fait que adh gr f rencontre l'ensemble $\{ t_0+T \} \times F$ aux deux seuls points (t_0+T, l) et $(t_0+T, f(t_0+T))$. Par ailleurs, en vertu du lemme 1, l'hypothèse $h(f, g) = 0$ entraîne que f et g ont même limite à gauche en t_0+T.

Cette proposition 3 s'applique en particulier dès que F est un espace de Banach et que les fonctions f et g sont réglées (*a fortiori* si elles sont à variation bornée).

REMARQUE : Notons une incommodité de la notion de convergence en graphe : pour une suite de fonctions (f_n), par exemple continues à droite sur l'intervalle I, il se peut que la suite des ensembles gr f_n dans l'espace métrique $I \times F$ converge au sens de l'écart de Hausdorff vers un ensemble limite L, sans qu'il existe de fonction f, continue à droite vérifiant $L =$ adh gr f. Exemple : prendre $f_n(t) = \sin nt$ sur $I = [0, \pi]$. Le rectangle $L = [0, \pi] \times [-1, +1]$ est limite de gr f_n au sens de l'écart de Hausdorff. Si une fonction f est continue à droite en un point $t_0 \in [0, \pi[$, il existe un sous-intervalle $]t_0, t_0+\varepsilon[$ sur lequel la fonction prend ses valeurs dans $[f(t_0)-(1/2), f(t_0)+(1/2)]$. On en conclut $L \neq$ adh gr f.

4. APPLICATION AU PROCESSUS DE RAFLE

Soit $I = [t_0, t_0+T]$ un intervalle réel compact; soit H un espace hilbertien réel et soit $t \mapsto C(t)$ une multifonction de I dans H, à valeurs convexes fermées non vides. Si I est interprété comme un intervalle de temps, on dit que C est un *convexe mobile* de H. Soit $x \mapsto \psi(t, x)$ la fonction indicatrice de $C(t)$ [i. e. $\psi(t, x) = 0$ si $x \in C(t)$ et $+\infty$ dans le cas contraire]. On sait que l'ensemble $\partial\psi(t, x)$, *sous-différentiel* de $\psi(t, .)$ en un point quelconque x de H est le cône convexe constitué par les éléments de H qui sont, en un sens classique, normaux au convexe C au point x [cône vide si et seulement si $x \notin C$; réduit à $\{ 0 \}$ en particulier si x est un point interne de $C(t)$].

Dans sa formulation forte, le *problème de rafle* consiste dans la détermination d'une fonction $u : I \to H$ (ou point mobile dans H), absolument continue et telle que, pour presque tout $t \in I$,

$$-\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u) \tag{4.1}$$

avec une *condition initiale*

$$u(t_0) = a \quad \text{donné dans } C(t_0). \tag{4.2}$$

L'auteur a consacré un grand nombre de pages à étudier ce problème, motivé par des questions de mécanique, en introduisant notamment divers concepts de *solutions faibles* : pour le dernier état de la question le lecteur pourra consulter [3]. On se limite ici à des hypothèses simples.

HYPOTHÈSE H 1 : *La multifonction $C : I \to H$ est à variation bornée au sens de l'écart de Hausdorff entre sous-ensembles de H.*

On introduit alors la fonction *variation* $v : I \to \mathbf{R}^+$:

$$v(t) = \operatorname{var}(C;\, t_0,\, t) \tag{4.3}$$

et on suppose de plus :

HYPOTHÈSE H 2 : *La fonction v est continue à droite en chaque point de* $[t_0,\, t_0+T[$.

Cela équivaut à dire que la multifonction C, vérifiant l'hypothèse H 1, est en outre continue à droite au sens de l'écart de Hausdorff en chaque point de $[t_0,\, t_0+T[$.

Moyennant ces deux hypothèses (en fait l'exposé [3] repose sur le concept plus faible de *rétraction* [1], analogue « unilatéral » de la variation utilisée ici) on montre que le problème (4.1), (4.2) possède une *unique solution faible* dans le sens suivant :

Cette solution faible $u : I \to H$ est à variation bornée, continue à droite; elle vérifie la condition initiale (4.2); il existe (de manière non unique) une mesure scalaire positive $d\mu$ sur I et une fonction $u' \in \mathscr{L}^1(d\mu, H)$ telles que la mesure vectorielle du (« mesure différentielle » de la fonction à variation bornée u) soit égale à $u'\, d\mu$ avec, pour tout $t \in I$,

$$-u'(t) \in \partial\psi(t,\, u(t)). \tag{4.4}$$

Le fait que, pour tout $x \in H$, l'ensemble $\partial\psi(t, x)$ soit *conique* joue ici un rôle essentiel : remplacer $d\mu$ par une mesure positive « équivalente » revient en effet à multiplier, pour chaque t, l'élément $u'(t) \in H$ par un scalaire $\geqq 0$. On montre que si u est solution faible la propriété précédente a lieu notamment avec $d\mu = dv$; en conséquence, dans le cas particulier où v est absolument continue (autrement dit, lorsque la multifonction C est absolument continue sur I au sens de l'écart de Hausdorff), la solution faible est en fait *forte*, c'est-à-dire qu'elle vérifie (4.1).

Pour l'approximation numérique de la solution u, une procédure de discrétisation se dégage naturellement :

On considère une subdivision finie

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T. \tag{4.5}$$

Si le quotient

$$\frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

est adopté comme une approximation de $(du/dt)(t_{i+1})$, (4.1) est remplacée par

$$u(t_i)-u(t_{i+1})\in\partial\psi(t_{i+1},\, u(t_{i+1}))$$

(se rappeler que $\partial\psi$ est un cône), ce qui équivaut classiquement à

$$u(t_{i+1})=\operatorname{proj}(u(t_i),\, C(t_{i+1})).$$

De là l'idée d'associer à la subdivision (4.5) une *fonction en escalier continue à droite* que nous noterons $t\mapsto x(t)$ et définie comme suit :

$$\forall t\in[t_i,\, t_{i+1}[:\quad x(t)=x_i, \tag{4.6}$$

$$x(t_n)=x_n, \tag{4.7}$$

où la suite des x_i, $i=0, 1, \ldots, n$, est construite par récurrence :

$$x_0=a \tag{4.8}$$

$$x_{i+1}=\operatorname{proj}(x_i,\, C_{i+1}) \tag{4.9}$$

(on écrit abréviativement C_{i+1} pour $C(t_{i+1})$). C'est ce que nous appelons l'*algorithme de rattrapage*. En particularisant une proposition de [3] on obtient une majoration de l'erreur commise lorsque la fonction x est adoptée comme approximation de la solution (faible) u. Soit p un majorant de la variation de C sur chacun des intervalles $[t_i,\, t_{i+1}[$ [c'est-à-dire un majorant des quantités $\lim_{t\uparrow t_{i+1}} v(t)-v(t_i)$ pour $i=0, 1, \ldots, n-1$]; alors la proposition en question donne

$$\forall t\in I:\quad \|x(t)-u(t)\|\leqq 2\sqrt{p\operatorname{var}(C,\, I)}. \tag{4.10}$$

L'ensemble S des subdivisions finies de I, ordonné par l'inclusion est filtrant à droite. Notant s un élément de S tel qu'il est écrit en (4.5) et x_s la fonction en escalier continue à droite qui lui est associée avec toujours la même donnée initiale a, on conclut de (4.10) que la *suite généralisée* (x_s), $s\in S$, *converge uniformément* vers la solution u; en effet, remplacer s par un de ses raffinements ne peut que diminuer p et il existe évidemment des subdivisions rendant p aussi petit qu'on le veut : prendre les images réciproques par v d'intervalles $[\nu\eta,\, (\nu+1)\eta[$, $\eta>0$ suffisamment petit, $\nu\in\mathbb{N}$.

Une remarque essentielle est que, si v est discontinu, l'exploitation de (4.10) pour obtenir une fonction x_s approchant uniformément u à moins d'un $\varepsilon>0$ près donné, exige que les points de I, où v présente un saut dépassant ε soient des points de la subdivision s; il faudra donc connaître exactement ces points de discontinuité du convexe mobile C.

L'objet du paragraphe qui vient sera d'établir la proposition suivante qui tourne cette difficulté.

PROPOSITION 4 : *Moyennant les hypothèses* 1 *et* 2 *formulées plus haut, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que, toute subdivision s de la forme* (4.5) *vérifiant*

$$\max_i (t_{i+1} - t_i) < \alpha \tag{4.11}$$

fournit une fonction en escalier x_s *dont l'écart à u est moindre que* ε.

5. PREUVE DE LA PROPOSITION 4

D'après les hypothèses, la fonction numérique v définie en (4.3) est (faiblement) croissante continue à droite. Elle admet une décomposition

$$v = v_c + v_d$$

où la fonction v_c est continue croissante tandis que la fonction v_d croissante continue à droite possède les mêmes sauts que v et est constante entre ses points de discontinuité.

Soit $\varepsilon_1 > 0$; comme l'intervalle I est compact, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour τ et τ' dans I on a l'implication

$$|\tau' - \tau| < \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad |v_c(\tau') - v_c(\tau)| < \varepsilon_1. \tag{5.1}$$

Soit $\varepsilon_2 > 0$; il existe un ensemble fini F de points de discontinuité de v_d tel que la somme des sauts de cette fonction en ses autres points de discontinuité soit moindre que ε_2. Soit $\alpha_2 > 0$ strictement inférieur à la plus courte distance entre deux points de F.

Soit une subdivision finie de I,

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T, \tag{5.2}$$

telle que, pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$ on ait

$$t_{i+1} - t_i < \min\left\{\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2\right\} \tag{5.3}$$

Chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ contient au plus un point de F. Construisons une autre subdivision de I,

$$t_0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n \leqq t_0 + T \tag{5.4}$$

de la façon suivante :

1° si $]t_i, t_{i+1}[$ contient un point de F, soit θ, on prend $t'_{i+1} = \theta$;

2° si $]t_i, t_{i+1}[$ ne contient pas de point de F, on prend $t'_{i+1} = t_{i+1}$.

Noter que, dans le cas 1°, vu (5.3), t_{i+1} n'est pas un point de F, donc l'intervalle $[t'_{i+1}, t'_{i+2}[$ ne contient pas d'autre point de F que son origine;

cette remarque s'applique en particulier à l'éventualité $i+1=n$ et alors $t'_n < t_0+T = t'_{n+1}$.

Bref chaque intervalle $[t'_i, t'_{i+1}[$, $i = 0, 1, \ldots, n$ contient au plus un point de F : son origine. On en conclut que la variation de v_d, continue à droite, sur un tel intervalle est moindre que ε_2. Par ailleurs, vu (5.3), la longueur de cet intervalle est moindre que α_1; d'après (5.1) la variation de v_c y est donc moindre que ε_1. Donc la variation de v sur $[t'_i, t'_{i+1}[$ est moindre que $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

A la subdivision (5.4) on associe, comme au paragraphe précédent, une fonction en escalier continue à droite notée x' :

$$\forall t \in [t'_i, t'_{i+1}[: \quad x'(t) = x'_n,$$

où la suite x'_n est définie par

$$x'_0 = a, \tag{5.5}$$

$$x'_{i+1} = \operatorname{proj}(x'_i, C'_{i+1}) \tag{5.6}$$

(on note $C'_{i+1} = C(t'_{i+1})$). La majoration (4.10) devient ici

$$\forall t \in I : \quad \| x'(t) - u(t) \| \leqq 2\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\operatorname{var}(C, I)}. \tag{5.7}$$

Cette majoration uniforme de $\| x'-u \|$ fournit *a fortiori* une majoration de l'écart $h(x', u)$.

Cherchons maintenant une majoration de $h(x, x')$. Vu (4.9) et (5.6), une inégalité élémentaire concernant les projections dans un espace hilbertien (*cf.* [3], lemme 2.*g*) donne

$$\begin{aligned} &\| x_{i+1} - x'_{i+1} \|^2 - \| x_i - x'_i \|^2 \\ &\quad \leqq 2(\| x_{i+1} - x_i \| + \| x'_{i+1} - x'_i \|)\, h(C_{i+1}, C'_{i+1}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Or, d'après la définition de la variation,

$$\begin{aligned} h(C_{i+1}, C'_{i+1}) &\leqq v(t_{i+1}) - v(t'_{i+1}) \\ &\leqq v_c(t_{i+1}) - v_c(t'_{i+1}) + v_d(t_{i+1}) - v_d(t'_{i+1}). \end{aligned}$$

Comme $]t'_{i+1}, t_{i+1}]$ ne contient pas de point de F, on a

$$v_d(t_{i+1}) - v_d(t'_{i+1}) < \varepsilon_2.$$

Compte tenu d'autre part de (5.1) et (5.3), cela laisse

$$h(C_{i+1}, C'_{i+1}) \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

On additionne les inégalités telles que (5.8), pour $i = 0, 1, \ldots, j \leqq n-1$; il reste

$$\| x_{j+1} - x'_{j+1} \|^2 \leqq 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\sum_{i=0}^{j} \| x_{i+1} - x_i \| + \sum_{i=0}^{j} \| x'_{i+1} - x'_i \| \right). \tag{5.9}$$

Or $\| x_{i+1} - x_i \|$ est la distance de x_i, élément de $C_i = C(t_i)$, à $C_{i+1} = C(t_{i+1})$; de même pour les x'_i; les deux $\sum$ du second membre sont donc majorés par var (C, I).

L'élément x_{j+1} est la valeur constante de la fonction x sur l'intervalle $[t_{j+1}, t_{j+2}[$ (resp. la valeur de x au point $t_n = t_0 + T$ si $j = n-1$); l'élément x'_{j+1} est la valeur constante de x' sur l'intervalle $[t'_{j+1}, t'_{j+2}[$. Par construction l'écart de Hausdorff de ces deux intervalles est moindre que $\alpha_1/2$. On conclut donc de (5.9) :

$$h(x, x') \leqq \max \left\{ \frac{\alpha_1}{2}, 2\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \operatorname{var}(C, I)} \right\}.$$

Vu (5.7) on a donc, par l'inégalité triangulaire,

$$h(u, x) \leqq \frac{\alpha_1}{2} + 4\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \operatorname{var}(C, I)}. \tag{5.10}$$

Reprenons alors l'énoncé de la proposition 4 : $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit ε_1 et ε_2 de manière que le dernier terme du second membre de (5.10) soit moindre que $\varepsilon/2$, par exemple

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon^2}{128 \operatorname{var}(C, I)}.$$

A ε_1 ainsi fixé correspond un α_1 assurant (5.1); imposons de plus $\alpha_1 < \varepsilon$; alors le second membre de (5.10) est moindre que ε. A ε_2 fixé ci-dessus correspond un α_2; si l'on prend $\alpha = \min \{ \alpha_1/2, \alpha_2 \}$ la proposition est établie.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. J. Moreau, *Multiapplications à rétraction finie.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc., serie IV, 1, 1974, p. 169-203.
2. J. J. Moreau, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution*, C.R. Acad. Sc., Paris, 282, série A-B, 1976, p. 837-840.
3. J. J. Moreau, *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Spaces*, J. Diff. Equ. 26, 1977, p. 347-374.