Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique

Jean Duchon

Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 10, n° R3 (1976), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1976__10_3_5_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique
(vol. 10, n° 12, décembre 1976, p. 5 à 12)

INTERPOLATION DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES SUIVANT LE PRINCIPE DE LA FLEXION DES PLAQUES MINCES

par Jean DUCHON [1]

Communiqué par P.-J. LAURENT

Résumé. — *On montre comment interpoler une fonction connue en un nombre fini de points quelconques du plan, en minimisant (suivant le principe des fonctions-spline) une fonctionnelle quadratique qui est en première approximation l'énergie de flexion d'une plaque mince. La méthode est convergente dans* $H^2(\Omega)$.

I. L'ESPACE $D^{-m}L^2$ DES FONCTIONS D'ÉNERGIE FINIE

Soit m un entier $\geqq 2$. Appelons $D^{-m}L^2$ l'espace des distributions sur $\mathbf{R}^2$ dont les dérivées d'ordre m sont dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Munissons-le de la semi-norme

$$|v|_m = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{2} \int_{\mathbf{R}^2} |D_{i_1} \ldots D_{i_m} v|^2 \right)^{1/2}$$

et du semi-produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{2} \int_{\mathbf{R}^2} D_{i_1} \ldots D_{i_m} u \, D_{i_1} \ldots D_{i_m} v.$$

Considérons le quotient $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ avec la norme $\dot{v} \mapsto |v|_m$; c'est un espace de Hilbert ([6], p. 366, où cet espace serait noté $BL_m^{\cdot}(L^2(\mathbf{R}^2))$). La surjection canonique $v \mapsto \dot{v}$ de $D^{-m}L^2$ sur $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ sera notée π_m.

D'après le théorème de Krylov ([18], p. 181), les distributions appartenant à $D^{-m}L^2$ sont en réalité des fonctions continues, et si v_j est une suite de telles fonctions vérifiant $|v_j|_m \to 0$, alors il existe des polynômes $p_j \in P_{m-1}$ tels que $v_j + p_j \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^2$. Il en résulte que si μ est une mesure de Radon à support compact sur $\mathbf{R}^2$, vérifiant $\int_{\mathbf{R}^2} p(t)\, d\mu(t) = 0$, $\forall p \in P_{m-1}$, alors l'application $\dot{v} \mapsto \int v \, d\mu$ de $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ dans $\mathbf{R}$ est bien définie, et est continue. En particulier, si A est un ensemble fini $\subset \mathbf{R}^2$ et si des coefficients $(\lambda_a, a \in A)$ sont tels que $\sum_{a \in A} \lambda_a p(a) = 0$, $\forall p \in P_{m-1}$, alors l'application $\dot{v} \mapsto \sum_{a \in A} \lambda_a v(a)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $D^{-m}L^2/P_{m-1}$.

[1] Mathématiques appliquées, Université scientifique et médicale de Grenoble.

Les distributions appartenant à $D^{-m} L^2$ sont tempérées. Plus généralement d'ailleurs, toute distribution T dont les dérivées premières sont tempérées est tempérée. En effet, d'après [12] (p. 239), il faut et il suffit que les régularisées $\alpha \bigstar T$, $\alpha \in \mathscr{D}$, qui sont des fonctions C^∞, soient à croissance lente, c'est-à-dire majorées par des polynômes.

Or on a $(\alpha \bigstar T)(t) = (\alpha \bigstar T)(0) + t . D(\alpha \bigstar T)(\theta t)$, $0 < \theta < 1$, d'où

$$|(\alpha \bigstar T)(t)| \leqq |(\alpha \bigstar T)(0)| + |t| \sup_{|s| \leqq |t|} |D(\alpha \bigstar T)(s)|,$$

mais $D(\alpha \bigstar T) = \alpha \bigstar DT$ est à croissance lente : il existe un polynôme $K(1 + |t|^2)^k$ qui majore $|(\alpha \bigstar DT)(t)|$, alors

$$|(\alpha \bigstar T)(t)| \leqq |(\alpha \bigstar T)(0)| + K(1 + |t|^2)^{k+1}$$

et $\alpha \bigstar T$ est à croissance lente.

II. INTERPOLATION D'ÉNERGIE MINIMALE : EXISTENCE ET UNICITÉ

PROPOSITION : *Soit A un ensemble fini $\subset \mathbf{R}^2$, contenant un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvent, et soit f une fonction définie sur A. L'ensemble $I_m(f, A)$ des fonctions de $D^{-m} L^2$ qui coïncident avec f sur A possède un élément unique f^A de semi-norme $|\,.\,|_m$ minimale.*

Démonstration : Soit A_0 un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvent de A. Il lui correspond une base $\{ p_a ; a \in A_0 \}$ de P_{m-1}, définie par : $p_a(a) = 1$, $p_a(b) = 0$ si $b \in A_0$, $b \neq a$.

Ensuite toute classe $\dot{v}$ de $D^{-m} L^2 / P_{m-1}$ possède un représentant unique nul sur A_0, qui est $v - \sum_{a \in A_0} v(a) p_a$. Une classe $\dot{v}$ de $D^{-m} L^2/P_{m-1}$ appartient à $\pi_m I_m(f, A)$ si et seulement si

$$v - \sum_{a \in A_0} v(a) p_a = f - \sum_{a \in A_0} f(a) p_a \quad \text{sur } A \diagdown A_0.$$

Autrement dit $\pi_m I_m(f, A)$ est l'intersection des hyperplans

$$\{ \dot{v} \in D^{-m} L^2/P_{m-1} ; v(b) - \sum_{a \in A_0} p_a(b) v(a) = f(b) - \sum_{a \in A_0} p_a(b) f(a) \}$$

considérés pour $b \in A \diagdown A_0$. Chacun de ces hyperplans est fermé puisque la fonctionnelle $\dot{v} \mapsto v(b) - \sum_{a \in A_0} p_a(b) v(a)$ est continue sur $D^{-m} L^2/P_{m-1}$. Donc $\pi_m I_m(f, A)$ est un sous-espace affine fermé de $D^{-m} L^2/P_{m-1}$, d'ailleurs non vide (il existe une fonction de $D^{-m} L^2$ qui coïncide avec f sur l'ensemble *fini* A).

Il a donc un élément unique de norme minimale, soit $\dot{\sigma}$, dont l'intersection avec $I_m(f, A)$ se réduit à l'élément $f^A = \sigma - \sum_{a \in A_0} \sigma(a) p_a + \sum_{a \in A_0} f(a) p_a$.

REMARQUE : La démonstration précédente reste valable si A est un ensemble *infini* $\subset \mathbf{R}^2$, à condition que la fonction f (définie sur A) possède un prolongement $\tilde{f} \in D^{-m} L^2$. La proposition dit qu'alors, parmi les prolongements possibles de f à $\mathbf{R}^2$, il en existe un et un seul de semi-norme $|.|_m$ minimale, f^A.

III. CARACTÉRISATION

PROPOSITION 3.1 : *$\Delta^m f^A$ est une mesure portée par A et orthogonale à P_{m-1} (c'est-à-dire de la forme $\sum_{a \in A} \lambda_a \delta_a$, où $\sum \lambda_a p(a) = 0$, $\forall p \in P_{m-1}$).*

Démonstration : f^A est la projection orthogonale de 0 sur $\pi_m I_m(f, A)$ et est donc orthogonale au sous-espace vectoriel parallèle $\pi_m I_m(0, A)$, autrement dit $(f^A, v)_m = 0$ pour toute $v \in D^{-m} L^2$ nulle sur A.

Choisissons arbitrairement des fonctions $\beta_a \in D^{-m} L^2$ (par exemple $\beta_a \in \mathcal{D}$) telles que $\beta_a(a) = a$, $\beta_a(t) = 0$ si $t \in A \setminus \{a\}$. Pour toute $v \in D^{-m} L^2$ la fonction $v - \sum_{a \in A} v(a) \beta_a$ est nulle sur A, donc $(f^A, v)_m = \sum (f^A, \beta_a)_m v(a)$.

Posons $\lambda_a = (f^A, \beta_a)_m$. On a donc $(f^A, v)_m = \sum \lambda_a v(a)$, $\forall v \in D^{-m} L^2$.
En particulier pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, $(f^A, \varphi)_m = \sum \lambda_a \varphi(a)$.
Mais

$$
\begin{aligned}
(f^A, \varphi)_m &= \sum \int_{\mathbf{R}^2} D_{i_1} \ldots D_{i_m} f^A \, D_{i_1} \ldots D_{i_m} \varphi \\
&= \sum \langle D_{i_1} \ldots D_{i_m} f^A, D_{i_1} \ldots D_{i_m} \varphi \rangle = (-1)^m \sum \langle D_{i_1}^2 \ldots D_{i_m}^2 f^A, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

d'après la définition de la dérivation des distributions; et d'autre part $\sum \lambda_a \varphi(a) = \langle \sum \lambda_a \delta_a, \varphi \rangle$.

Mais $\sum D_{i_1}^2 \ldots D_{i_m}^2 = \Delta^m$, d'où $\langle (-1)^m \Delta^m f^A, \varphi \rangle = \langle \sum \lambda_a \delta_a, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, autrement dit $\Delta^m f^A = (-1)^m \sum \lambda_a \delta_a$.

PROPOSITION 3.2 : *Si $g \in D^{-m} L^2$ et $\Delta^m g = \Delta^m f^A$ alors $g - f^A \in P_{m-1}$.*

Démonstration : Posons $u = g - f^A$. On a $u \in D^{-m} L^2$, donc u est une distribution tempérée (§ I) et $\Delta^m u = 0$. Donc ([12], p. 283) u est un polynôme. Donc aussi ses dérivées d'ordre m, qui sont dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Un polynôme ne peut appartenir à $L^2(\mathbf{R}^2)$ sans être nul, donc $u \in P_{m-1}$.

PROPOSITION 3.3 : *Posons $K_m(t) = |t|^{2m-2} \operatorname{Log} |t| / 2\pi (2^{m-1}(m-1)!)^2$. Si μ est une mesure à support compact orthogonale à P_{m-1}, on a $\mu \bigstar K_m \in D^{-m} L^2$ et $\Delta^m(\mu \bigstar K_m) = \mu$.*

Démonstration : K_m est une « solution élémentaire de l'équation de Laplace itérée » : $\Delta^m K_m = \delta$ ([12], p. 47). Donc $\Delta^m(\mu \bigstar K_m) = \mu \bigstar \Delta^m K_m = \mu$.
Le point crucial est $\mu \bigstar K_m \in D^{-m} L^2$.

On peut le montrer directement, mais il est plus simple d'utiliser la transformation de Fourier (notée $\hat{}$). Considérons une dérivée d'ordre m, sôit $D^\alpha(\mu \bigstar K_m)$, $|\alpha| = m$. Sa transformée de Fourier est le produit multiplicatif de la distribution $\hat{K}_m$ par la fonction (indéfiniment dérivable) $\tau \mapsto (2\pi i \tau)^\alpha \hat{\mu}(\tau)$. Comme μ est orthogonale à P_{m-1}, μ a ses dérivées d'ordre $\leqq m-1$ nulles à l'origine.

Or, parmi les dérivées de tous ordres de τ^α, seule $D^\alpha \tau^\alpha$ est non nulle à l'origine (car $D^\beta \tau^\alpha$ est identiquement nul si l'un des β_i est $> \alpha_i$, et est proportionnel à $\tau^{\alpha-\beta}$ si $\beta \leqq \alpha$). Donc $D^\beta(\tau \mapsto \tau^\alpha \mu(\tau))(0)$ qui est de la forme $\sum_{\gamma \in \beta} c_\gamma D^\gamma(\tau^\alpha)(0) D^{\beta-\gamma}\mu(0)$ se réduit à un terme en $D^{\beta-\alpha}\mu(0)$, lui-même nul si $|\beta| \leqq 2m-1$. Autrement dit la fonction $\tau^\alpha \mu(\tau)$ a ses dérivées d'ordre $\leqq 2m-1$ nulles à l'origine.

$\hat{K}_m$ est calculée dans [12] (p. 258). C'est une combinaison linéaire de $\Delta^{m-1}\delta$ et de la distribution $Pf.r^{-2m}$ définie dans la page 44 du même ouvrage.

Le produit de $\Delta^{m-1}\delta$ par la fonction $\tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)$ est nul. En effet cette distribution agit sur $\varphi \in \mathscr{D}$ par $\varphi \mapsto \Delta^{m-1}(\tau \mapsto \tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)\varphi(\tau))(0)$. Mais la valeur en 0 d'une dérivée d'ordre $2m-2$ de cette fonction $\tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)\varphi(\tau)$ est de la forme :

$$\sum C_{\beta\gamma} D^\beta(\tau \to \tau^\alpha \hat{\mu}(\tau))(0)\, D\varphi(0), \qquad \text{où} \quad |\beta| \leqq 2m-2,$$

elle est donc nulle.

Étudions maintenant la distribution produit de $Pf.r^{-2m}$ par la fonction $\tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)$. Elle agit sur $\varphi \in \mathscr{D}$ par $\varphi \mapsto Pf\int |\tau|^{-2m}\tau^\alpha \mu(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$. Mais ici le symbole Pf (« partie finie ») est inutile, l'intégrale est convergente parce que $|\tau^\alpha| \leqq |\tau|^m$ et $|\hat{\mu}(\tau)| \leqq C|\tau|^m$ au voisinage de l'origine : la fonction intégrée est bornée et à support compact. La distribution en question est donc en réalité une fonction : la (distribution définie par la) fonction $\tau \mapsto |\tau|^{-2m}\tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)$. Mais $\hat{\mu}$ est une fonction bornée (transformée de Fourier d'une mesure bornée), donc la fonction $|\tau|^{-2m}\tau^\alpha \hat{\mu}(\tau)$, qui est déjà bornée au voisinage de l'origine, est dominée par $|\tau|^{-m}$, fonction qui est de carré sommable sur le complémentaire d'un voisinage de 0.

En résumé, la transformée de Fourier de $D^\alpha(\mu \bigstar K_m)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^2)$, donc aussi $D^\alpha(\mu \bigstar K_m)$ elle-même, autrement dit $\mu \bigstar K_m \in D^{-m}L^2$.

REMARQUE : La fonction K_m elle-même n'appartient pas à $D^{-m}L^2$.

THÉORÈME 3 : *f^A s'écrit d'une manière unique sous la forme :*

$$f^A(t) = \sum_{a \in A} \lambda_a |t-a|^{2m-2} \operatorname{Log}|t-a| + p(t)$$

avec $p \in P_{m-1}$ et $\sum_{a \in A} \lambda_a q(a) = 0$, $\forall q \in P_{m-1}$.

Démonstration : $\Delta^m f^A$ s'écrit (d'une manière unique) sous la forme $\sum \lambda'_a \delta_a$, avec $\sum \lambda'_a q(a) = 0\ \forall q \in P_{m-1}$ (prop. 3.1). La fonction

$$g = (\Delta^m f^A) \bigstar K_m = (\sum \lambda'_a \delta_a) \bigstar K_m = \sum \lambda'_a K_m(\cdot - a)$$

qui peut s'écrire (d'une manière unique) $\sum_{a \in A} \lambda_a |t-a|^{2m-2} \operatorname{Log} |t-a|$, appartient à $D^{-m} L^2$ et vérifie $\Delta^m g = \Delta^m f^A$ (prop. 3.3). Donc (prop. 3.2) $f^A = g$ plus un polynôme de degré $\leqq m-1$, autrement dit f^A s'écrit d'une manière unique sous la forme indiquée.

IV. CONVERGENCE DANS $H^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$, qu'on supposera pour simplifier *borné* et à frontière lipschitzienne. Si A_k est une suite (non nécessairement croissante) de sous-ensembles de $\bar{\Omega}$, qui « remplit » $\bar{\Omega}$ en un sens à préciser, et si f est une fonction définie et continue sur $\bar{\Omega}$, appartenant à l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$, la suite f^{A_k} des interpolés de semi-norme $|.|_m$ minimale converge vers f dans $H^m(\Omega)$.

Le sens précis de l'expression « A_k remplit $\bar{\Omega}$ » est le suivant : posant $d(t, A) = \inf_{a \in A} |t-a|$, on doit avoir $d(t, A_k) \to 0$, $\forall t \in \Omega$.

Ce résultat peut être montré en utilisant un théorème de convergence de Joly [9] pour les fonctions-spline « abstraites » : soient X, Y des espaces de Hilbert et T une application linéaire, continue, surjective, de X sur Y, ayant un noyau de dimension finie. Soit Λ_k une suite de parties de X' ayant la propriété suivante : pour chaque $\xi \in X'$, il existe une suite ξ_k de combinaisons linéaires d'éléments de Λ_k, qui converge (fortement) vers ξ dans X'. Soit enfin $f \in X$, et, pour chaque k assez grand, f^k la fonction-spline d'interpolation de f sur Λ_k, c'est-à-dire l'élément unique de X qui vérifie $\xi(f^k) = \xi(f)$, $\forall \xi \in \Lambda_k$, et

$$\| Tf^k \|_Y = \inf \{ \| Tv \|_Y ;\ v \in X,\ \xi(v) = \xi(f),\ \forall \xi \in \Lambda_k \}.$$

alors $f^k \to f$ dans X.

On fait ici $X = H^m(\Omega)$, muni de sa structure usuelle d'espace de Hilbert définie par la norme

$$\| v \|_\Omega = \left(\sum_{|\alpha| \leqq m} \int_\Omega | D^\alpha v |^2 \right)^{1/2}, \qquad Y = H^m(\Omega)/P_{m-1}$$

muni de la norme $\| \dot{v} \|_Y = \inf \{ |w|_m ;\ w \in D^{-m} L^2,\ w|_\Omega = v \}$ et $T =$ la surjection caninique de $H^m(\Omega)$ sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$.

La continuité de T vient du fait que Ω a la propriété de m-prolongement ([11], p. 80) : il existe un opérateur linéaire continu P de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(\mathbf{R}^2)$ tel que $Pu|_\Omega = u$, $\forall u \in H^m(\Omega)$. Ensuite

$$\| Tu \|_Y \leqq | Pu |_m \leqq C \| Pu \|_{m, \mathbf{R}^2} \leqq C \| P \| \cdot \| u \|_{m, \Omega}.$$

Ainsi toute fonction de $H^m(\Omega)$ est la restriction à Ω d'une fonction de $H^m(\mathbf{R}^2) \subset D^{-m} L^2$. Réciproquement, la restriction à Ω d'une fonction de $D^{-m} L^2$ appartient à $H^m(\Omega)$ [une distribution dont les dérivées premières sont dans $L^2(\Omega)$, $\forall\,\Omega$ borné $\subset \mathbf{R}^2$, est elle-même dans $L^2(\Omega)$ et même dans $L^p(\Omega)$ pour tout p fini, [11], p. 181]. On voit alors que l'application $\dot{u} \mapsto \dot{u}^\Omega$ de $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ dans $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ qui, à des fonctions définies sur Ω, associe leurs prolongements de semi-norme $|.|_m$ minimale, a pour image exactement l'orthogonal de $\pi_m I_m(0, \Omega)$ dans l'espace de Hilbert $D^{-m}L^2/P_{m-1}$, et cette application est une isométrie. Ceci montre que Y est un espace de Hilbert, avec $\| Tv \|_Y = \inf\{ |w|_m ; w|_Y = v \}$, $\forall\, v \in H^m(\Omega)$.

Enfin on pose $\Lambda_k = \{ \varepsilon_a ; a \in A_k \}$, où ε_a est la fonctionnelle linéaire continue définie sur $H^2(\Omega)\,(\hookrightarrow C(\Omega))$ par $v \mapsto v(a)$. La condition de Joly s'écrit ici : pour toute $\xi \in H^m(\Omega)'$, et pour tout $\eta > 0$, il existe un entier k_0 tel que, $\forall\, k \geqq k_0$, il existe $\xi_k \in H^m(\Omega)'$, de la forme $\xi_k = \sum_{a \in A_k} \lambda_a \varepsilon_a$, telle que $\| \xi_k - \xi \|_{H^m(\Omega)'} \leqq \eta$, c'est-à-dire $| \xi_k(v) - \xi(v) | \leqq \eta$, $\forall\, v \in$ la boule unité B de $H^m(\Omega)$.

Montrons que cette condition est vérifiée si $d(t, A_k) \to 0$, $\forall\, t \in \Omega$. D'abord, l'ensemble $\{ \varepsilon_a ; a \in \Omega \}$ est total dans $H^m(\Omega)'$, donc toute $\xi \in H^m(\Omega)'$ peut être approchée à $\eta/2$ près par $\sum_{a \in A} \lambda_a \varepsilon_a$, où A est fini $\subset \overline{\Omega}$. Pour chaque point $a \in A$, il existe une suite $a'_k \in A_k$ vérifiant $a'_k \to a$. La boule unité B de $H^m(\Omega)$ étant un ensemble équicontinu de fonctions sur $\overline{\Omega}$ [l'injection $H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ est compacte, [11], p. 107], on a $\sup_{v \in B} | v(a'_k) - v(a) | \to 0$, c'est-à-dire $\varepsilon_{a'_k} \to \varepsilon_a$ dans $H^m(\Omega)'$ (fort). Alors $\sum_{a \in A} \lambda_a \varepsilon_{a'_k} \to \sum_{a \in A} \lambda_a \varepsilon_a$ dans $H^m(\Omega)'$, et, posant $\xi_k = \sum_{a \in A} \lambda_a \varepsilon_{a'_k}$, il existe k_0 tel que

$$\| \xi_k - \sum \lambda_a \varepsilon_a \|_{H^m(\Omega)'} \leqq \eta/2 ;$$

donc $\| \xi_k - \xi \| \leqq \eta$, $\forall\, k \leqq k_0$.

On a donc le :

THÉORÈME : *Soit Ω un ouvert borné $\subset \mathbf{R}^2$ à frontière lipschitzienne, soit A_k une suite de sous-ensembles de Ω, telle que* $\lim_{k \to \infty} \inf_{a \in A_k} | t - a | = 0$, $\forall\, t \in \Omega$.

Soit enfin $f \in H^m(\Omega)$. Alors la suite f^{A_k} des (restrictions à Ω des) fonctions de $D^{-m}L^2$ vérifiant $f^{A_k} = f$ sur A_k et

$$|f^{A_k}|_m = \inf\{ |v|_m ; v \in D^{-m}L^2,\ v = f \text{ sur } A_k \}$$

converge vers f dans $H^m(\Omega)$ fort.

V. EXTENSIONS

On a considéré seulement, pour simplifier, l'*interpolation* de fonctions de *deux* variables dont on connaît des *valeurs ponctuelles*. Mais :

1° Si, au lieu de minimiser $|v|_m$ sous les contraintes d'interpolation $v(a) = f(a)$, on choisit de minimiser $\varepsilon\, |v|_m^2 + \sum_{a \in A} | v(a) - f(a) |^2$, $\varepsilon > 0$, on obtient une « fonction-spline d'ajustement » qui est encore de la forme

$$\sum_{a \in A} \lambda_a |t-a|^{2m-2} \operatorname{Log} |t-a| + p(t),$$

où $p \in P_{m-1}$ et $\sum \lambda_a q(a) = 0 \ \forall q \in P_{m-1}$. Les coefficients λ_a et le polynôme p sont alors donnés par le système

$$\begin{cases} C_m \varepsilon \lambda_a + \sum\limits_{t \in a} \lambda_t |t-a|^{2m-2} \operatorname{Log} |t-a| + p(a) = f(a), & \forall a \in A, \\ \sum\limits_{t \in A} \lambda_t q(t) = 0, & \forall q \in P_{m-1}, \end{cases}$$

où $C_m = (-1)^m 2\pi (2^{m-1}(m-1)!)^2$.

2° En dimension quelconque n, on peut encore minimiser la semi-norme

$$|v|_m = \left(\sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{n} \int_{\mathbf{R}^n} |D_{i_1} \ldots D_{i_m} v|^2 \right)^{1/2}$$

à condition que $m > n/2$. Les fonctions $|t|^{2m-2} \operatorname{Log} |t|$ doivent alors être remplacées par $|t|^{2m-n}$ si n est impair, par $|t|^{2m-n} \operatorname{Log} |t|$ si n est pair.

3° Les données à interpoler peuvent être non seulement des valeurs ponctuelles $f(a)$, mais plus généralement les valeurs $\mu_i(f)$ de certaines distributions à support compact, d'ordre $\leqq m-2$ [les μ_i sont alors des fonctionnelles linéaires continues sur $C^{m-2}(\mathbf{R}^2)$]. On obtient dans ce cas des fonctions-spline de la forme :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i \bigstar K_m + p,$$

où $p \in P_{m-1}$ et $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \mu_i(q) = 0, \ \forall q \in P_{m-1}$.

4° Enfin, les espaces $D^{-m} L^2$ peuvent être remplacés par $D^{-m} \tilde{H}^s$, où $\tilde{H}$ est (pour $s < n/2$) l'espace de Hilbert des distributions tempérées v sur $\mathbf{R}^n$ dont la transformée de Fourier $\hat{v}$ est une fonction vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\tau|^{2s} |\hat{v}(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

On obtient alors (supposant $s > -m+n/2$) des fonctions-spline de la forme

$$\sum_{a \in A} \lambda_a |t-a|^{2m+2s-n} + p(t),$$

où $p \in P_{m-1}$ et $\sum \lambda_a q(a) = 0, \ \forall q \in P_{m-1}$ (sauf si $n-2s$ est entier pair, auquel cas $|t-a|^{2m+2s-n}$ est remplacé par $|t-a|^{2m+2s-n} \operatorname{Log} |t-a|$).

VI. BIBLIOGRAPHIE

Ce travail suit les idées de M. Atteia [1, 2, 3] sur les fonctions-spline abstraites (voir aussi [10], chap. 4) et sur les fonctions-spline à plusieurs variables [4, 5], mais en choisissant de minimiser l'intégrale $\int |D^m v|^2$

étendue à tout l'espace, au lieu d'un domaine borné, ce qui simplifie considérablement la caractérisation et le calcul.

La méthode étudiée ici (avec $m = 2$) a été utilisée par des ingénieurs [8], sous le nom de « surface spline ».

Les extensions signalées au paragraphe précédent sont étudiées dans [7], en utilisant la théorie des noyaux reproduisants de L. Schwartz [13].

1. M. ATTEIA, *Généralisation de la définition et des propriétés des spline-fonctions*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 3550-3553.
2. M. ATTEIA, *Spline-fonctions généralisées*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2149-2152.
3. M. ATTEIA, *Étude de certains noyaux et théorie des fonctions « spline » en analyse numérique*, Thèse, Grenoble, 1966.
4. M. ATTEIA, *Existence et détermination des fonctions « spline » à plusieurs variables*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, série A, 1966, p. 575-578.
5. M. ATTEIA, *Fonctions « spline » et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman*, R.A.I.R.O. R 3, 1970, p. 31-43.
6. J. DENY et J.-L. LIONS, *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 5, 1954, p. 305-370.
7. J. DUCHON, *Fonctions-spline à énergie invariante par rotation*, Rapport de recherche n° 27, Mathématiques appliquées, Grenoble, 1976.
8. R. L. HARDER et R. N. DESMARAIS, *Interpolation Using Surface Splines*, J. Aircraft, vol. 9, n° 2, 1972, p. 189-191.
9. J.-L. JOLY, *Théorèmes de convergence des fonctions « spline » générales d'interpolation et d'ajustement*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, série A, 1967, p. 126-128.
10. P.-J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
11. J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
12. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
13. L. SCHWARTZ, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Anal. Math., vol. 13, 1964, p. 115-256.