

F. MUSY

M. CHARNAY

**Sur le théorème de Stein-Rosenberg**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, tome 8, n° R2 (1974), p. 95-107

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1974\\_\\_8\\_2\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1974__8_2_95_0)

© AFCET, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LE THEOREME DE STEIN-ROSENBERG\*

par F. MUSY (1) et M. CHARNAY (2)

Communiqué par F. ROBERT

---

Résumé. — On présente une extension du théorème de Stein-Rosenberg qui l'éclaire d'un nouveau point de vue :  $A$  étant une matrice carrée à éléments  $\geq 0$ , on peut comparer son rayon spectral avec celui d'un produit  $A_1, \dots, A_n$  de matrices « extraites » de  $A$  et de la matrice unité.

### 1. INTRODUCTION

Rappelons la formulation classique du :

**Théorème de Stein-Rosenberg [2] [4]**

Soit  $A = L + U$  une matrice carrée à éléments  $\geq 0$ , de diagonale nulle, de triangulaire inférieure stricte  $L$ , et de triangulaire supérieure  $U$ .

Seuls les trois cas suivants (mutuellement exclusifs) sont possibles :

a)  $0 \leq \rho[(I - L)^{-1}U] \leq \rho(L + U) < 1$

b)  $\rho(L + U) = \rho[(I - L)^{-1}U] = 1$

c)  $1 < \rho(L + U) \leq \rho[(I - L)^{-1}U]$

$\rho$  désigne la fonction *rayon spectral* : maximum des modules des valeurs propres.

On rappelle que ce théorème règle la comparaison des méthodes de Jacobi et Gauss Seidel dans le « cas nonnégatif » pour la résolution itérative de systèmes linéaires [4].

L'étude de procédés itératifs *chaotiques* pour la résolution de systèmes non linéaires [3] nous a amenés à élaborer un résultat qui constitue en fait une extension du théorème ci-dessus en l'éclairant d'un nouveau point de vue.

Le but de cet article est de mettre en forme cette extension.

---

(1) Ecole Centrale de Lyon.

(2) S.A.N.T.I.-U.E.R. de Mathématiques Lyon I.

Une matrice  $A$  à éléments  $\geq 0$  sera dite nonnégative ( $A \geq 0$ ). Un vecteur  $u$  de  $R^n$  à composantes  $\geq 0$  sera noté  $u \geq 0$  et  $u > 0$  si toutes ses composantes sont  $> 0$ ; un vecteur  $u$  nonnégatif et différent de 0 sera noté  $\gg 0$ .

Soit  $A$  une matrice  $(n, n)$  nonnégative, et  $J$  une partie non vide de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . On définit la matrice (nonnégative)  $A_J$  de la façon suivante :

pour  $j \in J$   $A_J$  a même  $j^{\text{ème}}$  ligne que  $A$

pour  $j \notin J$   $A_J$  a même  $j^{\text{ème}}$  ligne que la matrice unité  $(n, n)$ .

EXEMPLE :  $n = 4$      $J = \{2, 4\}$      $A = (a_{ij})$ . Alors

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

## 2. RESULTATS PRELIMINAIRES

La proposition suivante montre comment, dans le théorème de Stein-Rosenberg, la matrice  $(I - L)^{-1}U$  peut être obtenue à partir de  $A = L + U$ , comme produit de matrices du type défini ci-dessus.

### Proposition 1.

Soit  $A = L + U$  une matrice  $(n, n)$  nonnégative de diagonale nulle, de triangulaire inférieure stricte  $L$  (et de triangulaire supérieure  $U$ ). Alors  $(I - L)^{-1}U$  s'écrit :

$$(I - L)^{-1}U = A_{\{n\}} \dots A_{\{2\}} \cdot A_{\{1\}}$$

La démonstration de cette identité, purement algébrique, ne présente aucune difficulté.

EXEMPLE :

$$n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & U \\ & 0 & \\ L & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 19 \\ 0 & 82 & 151 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notre but est de montrer que le théorème de Stein-Rosenberg s'applique en fait à d'autres produits de matrices  $A_j$  que celui qui vient d'être mis en évidence.

Nous utiliserons pour cela le corollaire « fin » suivant du théorème classique de Perron-Frobenius.

**Proposition 2 :** [1] [2] [3] [5].

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice nonnégative  $(n, n)$ . Pour  $u > 0$  et  $v \geq 0$  dans  $R^n$ , on pose :

$$\eta_A(v) = \text{Min}_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ v_i \neq 0}} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{v_j}{v_i} \quad ; \quad \tau_A(u) = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{u_j}{u_i}$$

Alors

$$\text{Sup}_{v \geq 0} \eta_A(v) = \rho(A) = \text{Inf}_{u > 0} \tau_A(u).$$

(L'intérêt de ce corollaire est d'être vrai que  $A$  soit ou non irréductible.)

### 3. LE RESULTAT PRINCIPAL

Nous l'énonçons dans le :

**Théorème 1 :** Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$ . Soit  $J_1, J_2 \dots J_r$  une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dont l'union redonne  $\{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\bigcup_{i=1}^r J_i = \{1, 2, \dots, n\}$$

(On ne suppose pas nécessairement les  $J_i$  disjoints deux à deux). On pose

$$K = A_{J_r} \cdot A_{J_{r-1}} \cdot \dots \cdot A_{J_1}$$

Alors seuls les trois cas suivants (mutuellement exclusifs) sont possibles.

- a)  $0 \leq \rho(A)^r \leq \rho(K) \leq \rho(A) < 1$
- b)  $\rho(A) = \rho(K) = 1$
- c)  $1 < \rho(A) \leq \rho(K) \leq \rho(A)^r$

1° Etablissons tout d'abord le point a).

Pour cela, démontrons un premier résultat intermédiaire.

**Lemme 1 :**

Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$  de rayon spectral  $\rho(A) < 1$ . Soit  $u > 0$  dans  $R^n$  tel que  $\tau_A(u) < 1$  (un tel  $u$  existe d'après la proposition 2). Soit  $T = A_{J_p} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  où  $J_1, J_2, \dots, J_p$  est une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Soient  $t_{ij}$  les éléments de  $T$ .

Alors

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u) \quad \text{pour} \quad i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p$$

*Preuve du lemme 1.*

Elle se fait par récurrence.

Pour  $p = 1$  et pour  $i$  pris dans  $J_1$ , il vient par définition :

$$\sum_{j=1}^n [A_{J_1}]_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u)$$

Posons  $S = A_{J_{p-1}} \cdot A_{J_{p-2}} \dots A_{J_1}$ .

Supposons, pour hypothèse de récurrence,  $s_{ij}$  étant les éléments de  $S$ , que :

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u) \quad \text{pour} \quad i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}$$

et montrons que

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u) \quad \text{pour} \quad i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p$$

Soit d'abord  $i \in J_p$ . Puisque  $T = A_{J_p} \cdot S$ , on a :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l=1}^n a_{il} s_{lj} \right) \frac{u_j}{u_i} = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n s_{lj} \frac{u_j}{u_i} \right) a_{il}$$

Or le produit à gauche par une matrice  $A_j$  ne perturbe que les lignes d'indices pris dans  $J$ . A l'aide de cette remarque, on démontre aisément que pour tout indice  $j$  pris dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  et n'appartenant pas à  $J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}$ , la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $S$  est la  $j^{\text{ème}}$  ligne de la matrice unité.

Donc :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} \left( \sum_{j=1}^n s_{lj} \frac{u_j}{u_i} \right) a_{il}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on déduit l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \tau_A(u) \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i}$$

D'où a fortiori, puisque  $\tau_A(u) < 1$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} \leq \tau_A(u)$$

Supposons maintenant que

$$i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1} \quad \text{et} \quad i \notin J_p$$

Puisque  $i \notin J_p$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A_{J_p}$  est  $[0 \dots 0 \underset{\uparrow_i}{1} 0 \dots 0]$ , par définition de  $A_{J_p}$  et puisque  $T = A_{J_p} \cdot S$ , il est clair que  $T$  et  $S$  ont même  $i^{\text{ème}}$  ligne. Donc :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u)$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

En appliquant ce résultat à la matrice  $K = A_{J_p} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  et puisque  $J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p = \{1, 2, \dots, n\}$ , on obtient,  $k_{ij}$  étant les éléments de  $K$  :

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u)$$

pour tout  $u > 0$  tel que  $\tau_A(u) < 1$  et pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ .

D'où

$$\tau_K(u) = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \tau_A(u)$$

D'où encore

$$\text{Inf}_{u>0} \tau_K(u) \leq \text{Inf}_{\substack{u>0 \\ \tau_A(u)<1}} \tau_K(u) \leq \text{Inf}_{\substack{u>0 \\ \tau_A(u)<1}} \tau_A(u) = \text{Inf}_{u>0} \tau_A(u)$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 2 :

$$\rho(K) \leq \rho(A)$$

Une partie du point a) est démontrée. Le reste de la démonstration est une conséquence du

**Lemme 2 :**

Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$  de rayon spectral  $\rho(A) \leq 1$ . Soit  $\omega \geq 0$  un secteur propre de  $A$  attaché à la valeur propre  $\rho(A)$ . (Théorème de Perron-Frobenius [5]).

Soit  $T = A_{J_p} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  où  $J_1, J_2 \dots J_p$  est une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Soit  $J = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} / \omega_j \neq 0\}$ .

Alors

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)^p \quad \text{pour} \quad i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p)$$

*Preuve du lemme 2.*

Elle se fait par une récurrence analogue à la précédente.  $p = 1$ . Soit  $i \in J \cap J_1$  supposé non vide (sinon il n'y a rien à démontrer).

$$\sum_{j=1}^n [A_{J_1}]_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = \rho(A)$$

On pose à nouveau  $S = A_{J_{p-1}} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$

On suppose que

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)^{p-1} \quad \text{pour} \quad i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}),$$

et on démontre que :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)^p \quad \text{pour} \quad i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p)$$

Soit  $i \in J \cap J_p$  supposé non vide.

Il vient en utilisant le calcul précédent :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{\omega_l}{\omega_i} + \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} \left( \sum_{j=1}^n s_{lj} \frac{\omega_j}{\omega_l} \right) a_{li}$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{\omega_l}{\omega_i} + \sum_{l \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})} \left( \sum_{j=1}^n s_{lj} \frac{\omega_j}{\omega_l} \right) \cdot a_{li}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{\omega_l}{\omega_i} + \sum_{l \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})} a_{il} \frac{\omega_l}{\omega_i} \rho(A)^{p-1}$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \sum_{i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i} + \sum_{i \in (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})} a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i} \rho(A)^{p-1}$$

puisque

$$\sum_{i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})} a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i} = \sum_{i \in (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})} a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} &\geq \sum_{i=1}^n a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i} - \left( \sum_{i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{ii} \frac{\omega_i}{\omega_i} \right) (1 - \rho(A)^{p-1}) \\ &\geq \rho(A) - \rho(A)(1 - \rho(A)^{p-1}) = \rho(A)^p \end{aligned}$$

D'autre part si  $J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}) \neq \emptyset$  et pour  $i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1})$  et  $i \notin J_p$ , on a encore :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)^{p-1} \geq \rho(A)^p$$

et le lemme 2 est établi. On l'applique à la matrice  $K$ , d'où :

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)^r \quad \text{pour } i \in J$$

Donc  $\rho(A)^r \leq \eta_K(\omega) \leq \rho(K)$  et  $a$  est entièrement démontré.

2° On établit de façon analogue les points  $b$ ) et  $c$ ) par l'intermédiaire des deux lemmes suivants.

**Lemme 3 :**

Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$  de rayon spectral  $\rho(A) \geq 1$ . Soient  $\epsilon$  réel  $> 0$  donné et  $u > 0$  dans  $R^n$  tel que :  $\tau_A(u) < \rho(A) + \epsilon$  [un tel  $u$  existe d'après la proposition 2].

Soit  $T = A_{J_p} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  ou  $J_1, J_2 \dots J_p$  est une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Alors :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq (\rho(A) + \epsilon)^p$$

pour  $i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_p$ .



*Preuve du lemme 3.*

Là aussi on mène une récurrence tout à fait semblable aux précédentes. Notons  $\rho = \rho(A)$

$p = 1$ . Le résultat est évident.

On pose

$$S = A_{J_{p-1}} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$$

On suppose que

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq (\rho + \varepsilon)^{p-1}$$

pour  $i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}$ .

Soit  $i \in J_p$ .

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \left( \sum_{j=1}^n s_{lj} \frac{u_j}{u_l} \right) a_{il}$$

D'où :

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + (\rho + \varepsilon)^{p-1} \left( \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right)$$

On décompose

$$\sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} \text{ en } \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i}$$

D'où encore :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} &\leq \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} - \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} \\ &\quad + (\rho + \varepsilon)^{p-1} \left( \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \left( \sum_{l \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}} a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right) [(\rho + \varepsilon)^{p-1} - 1]$$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} + \left( \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right) [(\rho + \varepsilon)^{p-1} - 1]$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} &\leq \left( \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right) (1 + (\rho + \varepsilon)^{p-1} - 1) \\ &= \left( \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{u_l}{u_i} \right) (\rho + \varepsilon)^{p-1} \leq (\rho + \varepsilon)(\rho + \varepsilon)^{p-1} = (\rho + \varepsilon)^p \end{aligned}$$

D'autre part si  $i \in J_1 \cup J_2 \dots \cup J_{p-1}$  et  $i \notin J_p$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \frac{u_j}{u_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq (\rho + \varepsilon)^{p-1} < (\rho + \varepsilon)^p$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.

**Lemme 4 :**

Soit  $A$  une matrice non négative  $(n, n)$  de rayon spectral  $\rho(A) \geq 1$ . Soit  $\omega \geq 0$  un vecteur propre de  $A$  attaché à la valeur propre  $\rho(A)$ .

Soit  $T = A_{J_p} \cdot \dots \cdot A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  ou  $J_1, J_2, \dots, J_p$  est une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Soit  $J = \{j \in \{1, 2, \dots, n\} / \omega_j \neq 0\}$ .

Alors

$$\sum t_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A) \quad \text{pour} \quad i \in J \cap (J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p)$$

La démonstration de ce lemme s'effectue en utilisant une technique analogue à celle du lemme 2. C'est pourquoi elle n'est pas détaillée.

En appliquant les lemmes 3 et 4 à la matrice  $K$ , on a :

si  $\rho(A) \geq 1, \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A)$  pour  $i \in J$  grâce au lemme 4.

D'où

$$\rho(K) = \text{Sup}_{v > 0} \eta_K(v) \geq \eta_K(\omega) = \text{Min}_{i \in J} \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} \geq \rho(A) \geq 1$$

et grâce au lemme 3 :

$$\text{Max}_{i=1,2,\dots,n} \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{u_j}{u_i} \leq (\rho + \varepsilon)^r$$

pour tout  $u > 0$  tel que  $\tau_A(u) < \rho + \varepsilon$  (en notant  $\rho(A) = \rho$ ).

D'où

$$\rho(K) = \text{Inf}_{u > 0} \tau_K(u) \leq \text{Inf}_{\substack{u > 0 \\ \tau_A(u) < \rho + \varepsilon}} \tau_K(u) \leq (\rho + \varepsilon)^r$$

Ainsi  $\rho(K) \leq (\rho + \varepsilon)^r$  et ceci pour tout  $\varepsilon > 0$ ; c'est-à-dire  $\rho(K) \leq \rho^r$ . En résumé :  $\rho \leq \rho(K) \leq \rho^r$  et dans le cas particulier où  $\rho = 1$ , on obtient  $\rho(K) = 1$ .

La démonstration du théorème 1 est complète.

EXEMPLE :  $n = 4$      $J_1 = \{1, 2\}$      $J_2 = \{1, 3\}$      $J_3 = \{4\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = A_{J_3} \cdot A_{J_2} \cdot A_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,02 & 0,37 & 0,13 \\ 0,10 & 0 & 0,10 & 0,10 \\ 0,07 & 0,02 & 0,19 & 0,25 \\ 0,045 & 0,012 & 0,16 & 0,136 \end{pmatrix}$$

On vérifie que l'on a

$$\rho(A)^3 = 0,215 < \rho(K) = 0,457 \dots < \rho(A) = 0,599 \dots < 1.$$

La proposition suivante montre donc dans quel cas le produit  $A_{J_r} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$  peut s'écrire sous la forme  $(I - L)^{-1}U$  avec  $A = L + U$ .

**Proposition 3 :**

Soit  $A$  une matrice  $(n, n)$  nonnégative.

Soit  $J_1, J_2, \dots, J_r$  une séquence de parties non vides de  $\{1, 2, \dots, n\}$  formant une partition de  $\{1, 2, \dots, n\}$  :

$$J_1 \cup J_2 \dots \cup J_r = \{1, 2, \dots, n\}; \quad J_i \cap J_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j.$$

Soit  $K = A_{J_r} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}$ . On peut construire, alors, deux matrices

$$L \geq 0 \quad \text{et} \quad U \geq 0$$

telles que :

$$A = L + U$$

$$(I - L)K = U$$

et comme  $\rho(L) = 0$ ,  $K = (I - L)^{-1} U \geq 0$ .

On va construire  $L$  et  $U$  par leurs éléments respectifs  $l_{ij}$  et  $u_{ij}$ .

Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ; il existe  $j$  unique dépendant de  $i$  tel que  $i \in J_j$  puisque les  $J_s, s = 1, 2, \dots, n$  forment une partition de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Posons alors :

pour  $s \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$

$$u_{is} = a_{is}$$

$$l_{is} = 0$$

pour  $s \notin J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$

$$u_{is} = 0$$

$$l_{is} = a_{is}$$

On vérifie que  $L$  et  $U$  sont nonnégatives et que  $A = L + U$ . D'autre part, on remarque que pour tout  $i \in J_j$  :

$$k_{is} = [A_{J_r} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}]_{is} = [A_{J_{r-1}} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}]_{is} = \dots = [A_{J_j} \dots A_{J_2} \cdot A_{J_1}]_{is}$$

Donc toujours pour  $i \in J_j$  :

$$k_{is} = \sum_{l \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r} a_{il} \cdot [A_{J_{j-1}} \dots A_{J_2} A_{J_1}]_{ls} + a_{is} \quad \text{pour } s \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$$

et

$$k_{is} = \sum_{l \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r} a_{il} \cdot [A_{J_{j-1}} \dots A_{J_2} A_{J_1}]_{ls} \quad \text{pour } s \notin J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$$

Donc pour  $i \in J_j$

$$k_{is} = \sum_{l \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r} a_{il} k_{ls} + a_{is} \quad \text{pour } s \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$$

et

$$k_{is} = \sum_{l \in J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r} a_{il} k_{ls} \quad \text{pour } s \notin J_j \cup J_{j+1} \dots \cup J_r$$

ce qui s'écrit encore d'après la définition de  $L$  et  $U$  :

$$K = LK + U \quad \text{soit } (I - L)K = U$$

Il est facile de voir que la matrice  $L$  construite par ce procédé peut s'écrire sous la forme  $L = PSP^t$  où  $S$  est une matrice nonnégative triangulaire inférieure stricte et  $P$  une matrice de permutation. Donc  $\rho(L) = 0$  et  $L$  étant non négative,  $I - L$  est une  $M$  matrice et  $K = (I - L)^{-1}U \geq 0$ .

EXEMPLE :  $n = 4$      $J_1 = \{2, 4\}$      $J_2 = \{3\}$      $J_3 = \{1\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 11 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A = L + U \quad \text{et} \quad \rho(L) = 0 < 1$$

$$K = A_{J_3} \cdot A_{J_2} \cdot A_{J_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 708 & 752 & 857 & 896 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 215 & 228 & 261 & 272 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

On vérifie que l'on a :

$$K = (I - L)^{-1}U \text{ avec d'ailleurs (théorème 1)}$$

$$1 < \rho(A) = 36,2 < \rho(K) = 990,2 < \rho(A)^3 = 47,5 \cdot 10^3.$$

REMARQUE : la proposition 3 reste vraie si  $A$  est une matrice réelle  $(n, n)$  quelconque. Toutefois les matrices  $L$ ,  $U$  et  $(I - L)^{-1}U$  ne sont plus non-négatives.

#### 4. CAS PARTICULIER

Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$ . Considérons la partition de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en  $n$  parties  $J_j = \{j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Si l'on construit les matrices  $L$  et  $U$  de la proposition 3,  $L$  est alors la *triangulaire inférieure stricte* de  $A$  et  $U$  la *triangulaire supérieure* de  $A$ .

La proposition 3 redonne la proposition 1 et le théorème 1 permet d'énoncer le

**Théorème 2 :** Soit  $A$  une matrice nonnégative  $(n, n)$  de triangulaire inférieure stricte  $L$  et de triangulaire supérieure  $U$ . Seuls les trois cas (mutuellement exclusifs) sont possibles.

$$a) \quad 0 \leq \rho(L + U)^n \leq \rho((I - L)^{-1}U) \leq \rho(L + U) = \rho(A) < 1$$

$$b) \quad \rho(A) = \rho(L + U) = \rho((I - L)^{-1}U) = 1$$

$$c) \quad 1 < \rho(A) = \rho(L + U) \leq \rho((I - L)^{-1}U) \leq \rho(L + U)^n$$

Ce résultat est à rapprocher de la version provenant du théorème de « Stein-Rosenberg tronqué » [6]. Notons toutefois que les inégalités introduisant  $\rho(A)^n$  sont nouvelles. Notons aussi que dans la proposition 1 et le théorème de Stein-Rosenberg classique, la nullité de la diagonale de  $A$  est une condition parfaitement anecdotique : elle peut être purement et simplement supprimée.

#### REFERENCES

- [1] C. ODIARD, *Un corollaire du théorème de Perron-Frobenius*. R.I.R.O., 1971, R. 2, pages 124 à 129.
- [2] F. ROBERT, Cours de D.E.A., Université de Lyon 1 (1973).
- [3] F. ROBERT, M. CHARNAY et F. MUSY, *Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe* (à paraître dans Num. Math.).
- [4] R. S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall (1962).
- [5] R. S. VARGA, *On a Connexion between Informa of Normes and eigenvalues of associated operators*. Linear Algebra and its Applications, 6, 249-256 (1973).
- [6] F. ROBERT, *Algorithmes tronqués de découpe linéaire*, R.I.R.O., 1972, R. 2, pages 45 à 64.