Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

A. Haurie

# Brève communication. Optimalité dans un système multicritère et perturbé avec application à des systèmes de commande linéaires à coûts quadratiques

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n° R2 (1973), p. 91-105
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_91_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 91-105)

# OPTIMALITE DANS UN SYSTEME MULTICRITERE ET PERTURBE AVEC APPLICATION A DES SYSTEMES DE COMMANDE LINEAIRES A COUTS QUADRATIQUES (1)

par A. HAURIE (2)

Résumé. — *Dans cet article on propose une définition de l'optimalité dans un système à plusieurs critères de performance et soumis à des perturbations. Cette définition généralise la notion de Pareto-optimalité et celle de critère « Min-Sup ».*

*Pour une classe de systèmes particuliers on établit des conditions suffisantes d'optimalité qui offrent une grande similarité avec les principes de scalarisation des critères vectoriels utilisés pour les systèmes sans perturbation. Ces conditions sont directement applicables au cas de systèmes dynamiques décrits par des équations d'état linéaires et des critères quadratiques sur l'état terminal.*

*Finalement le problème est légèrement généralisé en considérant, en plus, une cible que l'on veut atteindre à coup sûr.*

## INTRODUCTION

Cet article est consacré à la définition de l'optimalité dans un système multicritère soumis à des perturbations, à l'établissement de conditions suffisantes d'optimalité et à leur application au cas de systèmes de commande linéaires à critères quadratiques terminaux.

La considération de systèmes soumis à des perturbations non aléatoires ou pilotés par plusieurs agents ayant chacun leur critère propre a rapproché la théorie de la commande optimale de la théorie des jeux (Réf. [1]-[10]).

Dans le cas de systèmes perturbés, des critères d'optimalité de type « Mini-Max » ou « Min-Sup » ont été proposés. Dans le cas de systèmes dont les performances sont évaluées suivant plusieurs critères, la notion de « Pareto-optimalité », tirée de la théorie des jeux coopératifs, a déjà été largement utilisée (Réf. [1]-[6]).

(1) Ce travail a bénéficié d'une subvention du Conseil des Arts du Canada (Fonds S-72 513).
(2) Professeur à l'École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

Des systèmes présentant simultanément les deux aspects d'évaluation multicritère et de perturbation ne semblent pas avoir fait l'objet d'une étude approfondie. Cependant, de tels systèmes interviennent naturellement si une coalition de preneurs de décision doit choisir une décision « optimale » alors qu'elle ne contient pas tous les agents susceptibles d'affecter l'état du système (Réf. [11]-[16]).

Le concept d'optimalité que nous proposons généralise les conditions « Min-Sup » et de « Pareto-optimalité ». Pour une classe de systèmes particulière on peut obtenir des conditions suffisantes d'optimalité. Dans cette classe de système se trouvent les systèmes de commande linéaires à critères quadratiques sur l'état terminal.

## 2. DEFINITION GENERALE DE L'OPTIMALITE POUR UN SYSTEME MULTICRITERE PERTURBE

### 2.1. Système multicritère perturbé

Nous considérons un système défini par :

(i) un ensemble de décisions $U$

(ii) un ensemble de perturbations $V$

(iii) un critère de performance vectoriel :

$$Q : U \times V \rightarrow E^s$$

qui associe à une décision $u$ et une perturbation $v$ un vecteur de coûts :

$$Q(u, v) = \{ Q_j(u, v) \}_{j=1,\dots,s}$$

Un tel système peut décrire un jeu de coalition sous forme normale (Réf. [16]). $S$ est une coalition de $s$ joueurs choisissant une stratégie commune dans l'ensemble $U$; $V$ est l'ensemble des stratégies possibles pour les joueurs qui ne font pas partie de la coalition $S$. Les joueurs de $S$, ne disposant d'aucune information sur le choix d'une stratégie $v$ par leurs adversaires, considèrent ces stratégies comme des perturbations affectant leurs gains décrits par le vecteur $Q(u, v)$.

Un système multicritère perturbé peut se rencontrer dans des circonstances qui ne se rapportent pas à une situation de jeu : Par exemple, si l'on veut piloter un système physique, soumis à des perturbations dues à l'environnement, tout en tenant compte de divers aspects des performances du système. Le rendez-vous spatial est un cas classique de problème multicritère où l'on doit tenir compte par exemple de la consommation de carburant de chaque satellite. Nous nous intéressons donc au cas où, en plus de l'aspect multicritère, on doit tenir compte de perturbations qu'on ne peut pas probabiliser.

### 2.2. Optimalité

*Définition 2.1.* — Une décision $u^* \in U$ sera dite « Sup-Pareto-Optimale » si $\forall u \in U$

$$\text{Sup}\,\{\,Q_j(u, v) : v \in V\,\} \leqslant \text{Sup}\,\{\,Q_j(u^*, v) : v \in V\,\}\ \forall j = 1, \dots, s$$

implique nécessairement

$$\text{Sup}\,\{\,Q_j(u, v) : v \in V\,\} = \text{Sup}\,\{\,Q_j(u^*, v) : v \in V\,\}\ \forall j = 1, \dots, s \quad \blacklozenge$$

Cette définition se ramène à la définition de la Pareto-optimalité quand $V = \varnothing$. Cette définition se ramène à une condition « Min-Sup » quand $s = 1$. Il s'agit donc d'une généralisation d'un concept d'optimalité classique pour l'étude des systèmes multicritères (Réf. [1]-[6]) et d'un concept d'optimalité classique pour l'étude des systèmes perturbés (Réf. [7]-[9]).

On peut interpréter cette condition d'optimalité en disant que, si on choisit la décision $u^*$, il est impossible de réduire la borne supérieure du coût suivant une composante du critère sans augmenter la borne supérieure du coût suivant une autre composante du critère. Par la suite nous dirons simplement « décision optimale » pour « décision Sup-Pareto Optimale ».

## 3. CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITE

### 3.1. Hypothèses fondamentales

Nous dériverons des conditions suffisantes d'optimalité pour une certaine classe de problèmes satisfaisant aux hypothèses suivantes :

**Hypothèse 3.1 :** Il existe un espace euclidien $E^n$ et deux fonctions :

$$h : U \to E^n,\ g : V \to E^n$$

telles que l'on ait :

$$\forall (u, v) \in U \times V \quad Q(u, v) = \psi[h(u) + g(v)]$$

où $\psi$ est une application de $E^n$ dans $E^s$,

$\psi(.) \triangleq \{\,\psi_j(.)\,\}_{j=1,\dots,s}$, telle que chaque composante $\psi_j$ soit une fonctionnelle convexe non constante et de classe $C^1$ sur $E^n$. $\blacklozenge$

**Hypothèse 3.2 :** L'ensemble perturbant $g(V)$ est compact dans $E^n$. $\blacklozenge$

### 3.2. Lemmes

Soit une décision $\bar{u} \in U$, il y correspond un point $h(\bar{u})$ qui est soit intérieur à l'ensemble $h(U)$ soit élément de sa frontière $\partial h(U)$.

Soit $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$.

**Lemme 3.1** : Etant donné $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$, il existe $s$ vecteurs $y^j(\bar{x}) \in \partial g(V)$ tels que :

$$\forall\, j = 1, \ldots, s \quad \text{Sup}\,[\psi_j(\bar{x} + y) : y \in g(V)] = \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})).$$

*Démonstration* : Selon l'hypothèse 3.1, pour $\bar{x}$ donné chaque fonction $\psi_j(\bar{x} + (.))$ est une fonctionnelle continue et convexe sur $E^n$. Puisque $g(V)$ est compact, chaque fonction $\psi_j(\bar{x} + (.))$ atteint son maximum sur $g(V)$. Il ne reste donc qu'à montrer que ce maximum est nécessairement atteint en un point de la frontière $\partial g(V)$. Ceci est évident puisque, en un point intérieur de $g(V)$ on devrait avoir nécessairement :

$$\nabla\, \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) = 0$$

ce qui, du fait de la convexité de $\psi_j$, entraîne que le point $\bar{x} + y^j(\bar{x})$ est un minimum local pour $\psi_j$. Ceci est une contradiction si $\psi_j$ n'est pas une fonction constante. ✦

**Lemme 3.2** : Étant donné $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$ définissons les $s$ gradients :

$$z^j \triangleq \nabla\, \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

et formons le cône :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\bar{x}) \triangleq \{\, x : < x - \bar{x}, z^j > \; \leqslant 0 \qquad & \forall\, j = 1, \ldots, s \\ \text{et} < x - \bar{x}, z^l > \; < 0 \qquad & \text{pour un } l \,\} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, si l'on a : $\mathcal{C}(\bar{x}) \cap (hU) = \emptyset$, alors $\bar{u}$ est une décision optimale.

*Démonstration* : Supposons que l'on ait $\mathcal{C}(\bar{x}) \cap h(U) = \emptyset$ cependant que $\bar{u}$ n'est pas optimal. Il existe donc $\hat{x} \in h(U)$ tel que l'on ait :

$$\forall\, j = 1, \ldots, s \qquad \text{Sup}\,[\psi_j(\hat{x} + y) : y \in g(V)] \leqslant \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \tag{3.1}$$

et pour un $l$

$$\text{Sup}\,[\psi_l(\hat{x} + y) : y \in g(V)] < \psi_l(\bar{x} + y^l(\bar{x}))$$

Par hypothèse on a : $\hat{x} \notin \mathcal{C}(\bar{x})$ et donc aussi :

$$\forall\, j = 1, \ldots, s \qquad < \hat{x} - \bar{x}, z^j > \; \geqslant 0 \tag{3.2}$$

ou bien $\exists\, l \in \{1, \ldots, s\}$ *t.q.* $< \hat{x} - \bar{x}, z^l > \; > 0$.

Considérons alors pour chaque $j = 1. \ldots, s$ la valeur

$$\psi_j(\hat{x} + y^j(\bar{x})) = \psi_j[(\hat{x} - \bar{x}) + (\bar{x} + y^j(\bar{x}))]$$

On a d'après la convexité de $\psi_j$ et (3.2) :

$$\forall j = 1, \dots, s \; \psi_j(\hat{x} + y^j(\bar{x})) - \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \geqslant < \hat{x} - \bar{x}, \nabla \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) >$$

$$= < \hat{x} - \bar{x}, z_j > \; \geqslant 0.$$

ou bien

$$\psi_l(\hat{x} + y^l(\bar{x})) - \psi_l(\bar{x} + y^l(\bar{x})) > 0$$

ce qui contredit la condition (3.1). Donc $\bar{u}$ est optimal. ✦

### 3.3. Conditions suffisantes d'optimalité

Nous pouvons établir le résultat suivant qui permet de caractériser certaines décisions optimales.

**Théorème 3.1 :** Soit $\bar{u} \in U$ et $\bar{x} \triangleq h(\bar{u})$. Définissons les $s$ gradients :

$$z^j \triangleq \nabla \psi_j(\bar{x} + y^j(\bar{x})) \quad = 1, \dots, s$$

On a les propriétés suivantes :

(i) S'il existe $s$ scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, \dots, s$ tels que l'on ait :

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j = 0 \tag{3.3}$$

alors $\bar{u}$ est optimal.

(ii) S'il existe un vecteur $z^0 \in E^n$ et $s$ scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, \dots, s$ tels que l'on ait :

(*a*)
$$\forall x \in h(U) \qquad < x - \bar{x}, z^0 > \; \geqslant 0 \tag{3.4}$$

(*b*)
$$z^0 = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j \tag{3.5}$$

alors $\bar{u}$ est optimal.

*Démonstration* : Si la condition (3.3) est vérifiée alors le cône $\mathcal{C}(\bar{x})$ est vide donc $h(U) \cap \mathcal{C}(\bar{x}) = \varnothing$ et $\bar{u}$ est optimal d'après le lemme 3.2. Ceci établit la propriété (i). Si la condition (3.4) est satisfaite alors $\bar{x}$ est un élément de la frontière $\partial h(U)$ et $z^0$ est une normale à un plan d'appui de $h(U)$ en $\bar{x}$. Si la condition (3.5) est satisfaite alors on a :

$$\forall x \in \mathcal{C}(\bar{x}) \qquad < x - \bar{x}, z^0 > \; < 0 \tag{3.6}$$

En effet pour un $l \in \{ 1, \dots, s \}$ on a : $\forall x \in \mathcal{C}(\bar{x})$

$$< x - \bar{x}, z^0 > \; = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j < x - \bar{x}, z^j > \; \leqslant \alpha_l < x - \bar{x}, z^l > \; < 0 \tag{3.7}$$

D'après les expressions (3.6) et (3.5) $z^0$ est une normale en $\bar{x}$ à un plan séparant $h(U)$ et $\mathcal{C}(\bar{x})$. De plus l'expression (3.7) montre que ce plan séparant est disjoint de $\mathcal{C}(\bar{x})$. Donc on a encore $h(U) \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$, donc $\bar{u}$ est optimal. ✦

# 4. SYSTEMES DE COMMANDE LINEAIRES A COUTS QUADRATIQUES TERMINAUX

## 4.1. Définition du système de commande

Considérons un système décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)v(t) \tag{4.1}$$

où $x(t) \in E^n$, $A(t)$ est une matrice $n \times n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$, $u(t) \in E^m$, $D(t)$ est une matrice $n \times p$, $v(t) \in E^p$.

Nous supposons que les matrices $A(t)$, $B(t)$ et $D(t)$ sont continues sur un intervalle $(0, T)$.

Soit $x(t_0)$ l'état initial en $t_0 > 0$, une commande admissible est une fonction mesurable

$$u : t \rightarrow u(t) \in \Omega \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad , \quad t_1 < T$$

où $\Omega$ est un ensemble de contrainte compact, convexe fixé dans $E^m$.

Une perturbation possible est une fonction mesurable

$$v : t \rightarrow v(t) \in \Xi \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad , \quad t_1 < T$$

où $\Xi$ est un ensemble compact, convexe fixé dans $E^p$.

Finalement soit un critère de performance vectoriel défini par la fonction de l'état terminal :

$$\psi : x(t_1) \rightarrow \psi[x(t_1)] = \{ \psi_j[x(t_1)] \}_{j=1, 2, \ldots, s} \in E^s \tag{4.2}$$

Nous voulons caractériser une famille de commandes $u$, optimales pour le système perturbé (4.1) relativement au critère vectoriel (4.2).

Soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale solution de l'équation homogène associée à (4.1) avec $\Phi(t_0) = I$. Pour une commande $u$ et une perturbation $v$ admissibles, définissons les expressions :

$$h(u) \triangleq \Phi(t_1)x(t_0) + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)^{-1}B(t)u(t)dt \tag{4.3}$$

et

$$g(v) \triangleq \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)^{-1}D(t)v(t)dt \tag{4.4}$$

alors l'état terminal $x(t_1)$ associé par (4.1) à la commande $u$, la perturbation $v$ et l'état initial $x(t_0)$ est donné par :

$$x(t_1) = h(u) + g(v).$$

Donc la fonction critère, (4.2), peut s'écrire :

$$\psi[x(t_1)] = \psi[h(u) + g(v)] \triangleq Q(u, v) \tag{4.5}$$

où $Q$ est définie sur l'ensemble $U \times V$ des commandes admissibles et des perturbations possibles.

Nous voyons que nous retrouvons donc les termes de notre analyse précédente si nous supposons que chaque fonctionnelle $\psi_j$ est convexe de classe $C_1$ sur $E^n$. C'est effectivement le cas si chaque $\psi_j$ s'écrit :

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2} x^T C_j x \tag{4.6}$$

où la matrice $C_j$ est définie positive.

### 4.2. Application des conditions suffisantes

Cherchons d'abord à caractériser des commandes optimales $\hat{u}$ telles que $h(\hat{u})$ soit intérieur à l'ensemble $h(U)$.

Soit $\hat{x}(t_1) \triangleq h(\hat{u})$. Si l'ensemble de contraintes $\Xi$ est compact l'ensemble $g(V)$ est aussi compact (cf. Référence [17] p. 69) donc il existe $\zeta^j(t_1) \in g(V)$ tel que :

$$\psi_j[x(t_1) + \zeta^j(t_1)] = \text{Sup}\,\{\, \psi_j[\hat{x}(t_1) + y] : y \in g(V)\,\}$$

et ceci pour $j = 1, 2, \dots, s$.

De plus on a montré (Lemme 3.1) que chaque $\zeta^j(t_1)$ est nécessairement un point de la frontière de $g(V)$. Cela revient donc à dire que la perturbation $v^j$ telle que $g(v^j) = \zeta^j(t_1)$ est une commande extrémale pour le système :

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + D(t)v(t) \tag{4.7}$$

avec pour état initial $y(t_0) = 0$.

D'après un résultat bien connu de la théorie de la commande optimale (cf. Référence [17], p. 73), $v$ sera extrémale pour le système (4.7) si et seulement si il existe une solution non nulle de l'équation adjointe :

$$\dot{\eta}_j(t) = -\,\eta_j(t)A(t)$$

telle que presque partout sur $[t_0, t_1]$ on ait

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \underset{v \in \Xi}{\text{Max}}\ \eta(t)D(t)v \tag{4.8}$$

et de plus $\eta_j(t_1)$ est une normale extérieure à un hyperplan de support pour l'ensemble $g(V)$ au point $\zeta^j(t_1)$.

Nous pouvons dès lors appliquer le théorème 3.1 (i) ce qui établit :

**Théorème 4.1 :** Pour le système défini en section 4.1, s'il existe une commande $\hat{u}$ et $s$ scalaires $\alpha_j$ strictement positifs tels que les $m$ systèmes d'équations suivants définis pour $j = 1, ..., s$ :

$$\dot{y}^j(t) = A(t)y^j(t) + D(t)v^j(t) \tag{4.9}$$

$$\dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t)A(t) \tag{4.10}$$

avec les conditions aux bornes :

$$y^j(t_0) = 0 \tag{4.11}$$

$$\eta_j(t_1) = \nabla\psi_j[h(\hat{u}) + y^j(t_1)] = (h(\hat{u}) + y^j(t_1))^T C_j \tag{4.12}$$

et vérifiant la condition :

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \underset{v(t)\in\Xi}{\mathrm{Max}}\ \eta_j(t)D(t)v(t) \tag{4.13}$$

presque partout sur $[t_0, t_1]$, aient une solution telle que :

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j\eta_j(t_1) = 0 \tag{4.14}$$

alors $\hat{u}$ est une commande optimale. ✦

De la même façon une application directe du théorème 3.1 (ii) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.2 :** S'il existe une commande $\hat{u}$ et $s$ scalaires $\alpha_j$ strictement positifs tels que les $s$ systèmes d'équations suivants définis pour $j = 1, ..., s$ :

$$\dot{y}^j(t) = A(t)y^j(t) + D(t)v^j(t) \tag{4.15}$$

$$\dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t)A(t) \tag{4.16}$$

avec les conditions aux bornes

$$y^j(0) = 0$$

$$\eta_j(t_1) = \nabla\psi_j[h(\hat{u}) + y^j(t_1)] = (h(\hat{u}) + y^j(t_1))^T C_j \tag{4.17}$$

et vérifiant presque partout les conditions

$$\eta_j(t)D(t)v^j(t) = \underset{v(t)\in V}{\mathrm{Max}}\ \eta_j(t)D(t)v(t) \tag{4.18}$$

et le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\hat{u}(t) \tag{4.19}$$

$$\dot{\eta}_0(t) = -\eta_0(t)A(t) \tag{4.20}$$

avec les conditions aux bornes

$$x(0) \quad = x_0 \tag{4.21}$$

$$\eta_0(t_1) \neq 0$$

vérifiant presque partout les conditions

$$\eta_0(t)B(t)\hat{u}(t) = \min_{u(t)\in U} \eta_0(t)B(t)u(t) \tag{4.23}$$

aient des solutions telles que l'on ait :

$$\eta_0(t_1) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \eta_j(t_1)$$

alors $\hat{u}$ est une commande optimale. ✦

# 5. OPTIMALITE SUR UNE CIBLE POUR UN SYSTEME MULTICRITERE PERTURBE

## 5.1. Un problème d'accessibilité optimale

Nous considèrerons dans cette section une généralisation du modèle fondamental décrit en section 2, obtenue en ajoutant une contrainte impliquant à la fois la décision $u$ et la perturbation $v$. Plus précisément nous considèrerons une fonction

$$\varphi : U \times V \to H$$

où $H$ est un ensemble donné et nous nous imposerons la contrainte

$$\varphi(u, v) \in \Lambda \subset H \tag{5.1}$$

où $\Lambda$ sera une cible fixée dans $H$. Nous dirons alors :

*Définition 5.1.* — Une décision $\hat{u}$ sera optimale sur la cible $\Lambda$ si :

(i) $\Lambda$ est fortement accessible suivant $\hat{u}$, c'est-à-dire :

$$\forall\, v \in V \quad \varphi(\hat{u}, v) \in \Lambda \tag{5.2}$$

(ii) Pour toute décision $u$ telle que

$$\forall\, v \in V \quad \varphi(u, v) \in \Lambda \quad , \quad \text{on a :}$$

$$\operatorname{Sup}\{Q_j(u, v) : v \in V\} \leqslant \operatorname{Sup}\{Q_j(\hat{u}, v) : v \in V\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sup}\{Q_j(u, v) : v \in V\} = \operatorname{Sup}\{Q_j(\hat{u}, v) : v \in V\} \tag{5.3}$$

### 5.2. Un problème avec cible dans l'espace d'état

Considérons un système multicritère perturbé vérifiant l'hypothèse 3.1, c'est-à-dire :

$$Q(u, v) = \psi(h(u) + g(v)) \tag{5.4}$$

$$x \triangleq h(u) + g(v) \in E^n \tag{5.5}$$

$$\psi : E^n \to E^s, \psi = \{ \psi_j \}_{j=1,\dots,s}$$

$$Q_j(u, v) = \psi_j(x) \tag{5.6}$$

$E^n$ est alors l'espace d'état du système, $u$ la commande, $v$ la perturbation. Nous considérerons ici une cible $\Lambda$ dans $E^n$ avec la contrainte $x \in \Lambda$. On a donc :

$$\varphi : U \times V \to E^n$$

$$(u, v) \to x = h(u) + g(v)$$

et la contrainte $\varphi(u, v) \in \Lambda$.

## 6. CONDITIONS SUFFISANTES D'OPTIMALITE SUR UNE CIBLE

Nous généraliserons dans cette section les résultats obtenus en 3, pour un système satisfaisant aux hypothèses 3.1 et 3.2.

### 6.1. Hypothèse fondamentale

Nous supposerons que $\Lambda \subset E$ est un ensemble convexe fermé.

### 6.2. Résultats fondamentaux sur l'accessibilité pour un système perturbé

Les problèmes d'accessibilité pour des systèmes perturbés ont été étudiés dans les références [7]-[9]. Nous retiendrons pour notre étude les résultats suivants.

**Lemme 6.1.** Soit $M$ la cible modifiée définie par :

$$M \triangleq \{ x \in E^n : \{ x \} + g(V) \subset \Lambda \} \tag{6.1}$$

alors :

(i) $\Lambda$ est fortement accessible suivant $u$ si et seulement si :

$$h(u) \in M \tag{6.2}$$

(ii) Si $\Lambda$ est convexe fermé, $M$ l'est aussi. ✦

**Corollaire 6.1.** $h(u) \in M$ si et seulement si :

$$\forall z \in E^n, \| z \| = 1,$$
$$\sigma_u(z) \triangleq \operatorname{Sup} \{ z^T x : x \in \{ h(u) \} + g(V) \}$$
$$\leqslant \operatorname{Sup} \{ z^T x : x \in \Lambda \} \triangleq \sigma_\Lambda(z) \tag{6.3}$$

*Démonstration* : On doit avoir $\{ h(u) \} + g(V) \subset \Lambda$. Puisque $\Lambda$ est convexe fermé ceci est équivalent à :

$$\operatorname{Co} [ \{ h(u) \} + g(V)] \subset \Lambda \tag{6.4}$$

ou Co [.] désigne la fermeture convexe. (6.3) est alors un résultat bien connu sur les fonctionnelles du support d'ensembles convexes fermés, équivalent à (6.4). ✦

## 6.3. Conditions suffisantes

**Théorème 6.1** : Soit $\bar{u} \in U$ et $\bar{x} = h(\bar{u})$.

(i) Si l'on a :

$$\operatorname{Sup} \{ \sigma_{\bar{u}}(z) - \sigma_\Lambda(z) : \|z\| = 1 \} \leqslant 0 \tag{6.5}$$

et si les conditions (i) ou (ii) du théorème 3.1 sont satisfaites alors $\bar{u}$ est optimal sur la cible $\Lambda$

(ii) Si l'on a :

$$\sigma_{\bar{u}}(\bar{z}) - \sigma_\Lambda(\bar{z}) = \operatorname{Sup} \{ \sigma_{\bar{u}}(z) - \sigma_\Lambda(z) : \|z\| = 1 \} = 0 \tag{6.6}$$

et si, avec les notations du théorème 3.1, il existe $s$ scalaires $\alpha_j > 0, j = 1, ..., s$, tels que l'on ait :

$$-\bar{z} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j z^j \tag{6.7}$$

alors $\bar{u}$ est optimal sur la cible $\Lambda$.

*Démonstration* : D'après les lemmes 3.2 et 6.1 (i) si l'on a :

$$h(\bar{u}) \in M \tag{6.8}$$

et

$$\mathcal{C}(\bar{x}) \cap h(U) \cap M = \varnothing \tag{6.9}$$

alors $\bar{u}$ est une décision optimale sur la cible $\Lambda$.

Démontrons la partie (i) du théorème. La condition (6.5) implique (6.8) d'après le corollaire 6.1.

D'autre part les conditions (i) ou (ii) du théorème (3.1) impliquent :

$$\mathcal{C}(\bar{x}) \cap h(U) = \emptyset$$

donc aussi (6.9). Ce qui établit (i).

Démontrons la partie (ii) du théorème. Puisque $g(V)$ est compact il existe $\bar{y} \in g(V)$ tel que :

$$\begin{aligned} z^T(\bar{x} + \bar{y}) &= \operatorname{Sup}\{ z^T x : x \in \{ \bar{x} \} + g(V) \} \\ &= \operatorname{Sup}\{ z^T x : x \in \Lambda \} \end{aligned} \tag{6.10}$$

D'après (6.10) $z^T$ définit la normale en $\bar{x} + \bar{y}$ à un hyperplan d'appui de l'ensemble convexe $\Lambda$ tel que :

$$\forall\, x \in \Lambda \quad z^T(x - [\bar{x} + \bar{y}]) \leqslant 0 \tag{6.11}$$

Nous allons montrer que $z$ est aussi la normale en $\bar{x}$ à un hyperplan d'appui de l'ensemble $M$. Il suffit pour cela de montrer que l'on a :

$$\forall\, x \in M \quad z^T(x - \bar{x}) \leqslant 0 \tag{6.12}$$

Supposons que (6.12) ne soit pas vérifié pour $\tilde{x} \in M$, donc :

$$\tilde{x} \in M \qquad \text{et} \qquad z^T\tilde{x} > z^T\bar{x} \tag{6.13}$$

considérons alors le point

$$x \triangleq \tilde{x} + \bar{y} \in \tilde{x} + g(V)$$

On a :

$$z^T x = z^T(\tilde{x} - \bar{x} + [\bar{x} + \bar{y}]) > z^T(\bar{x} + \bar{y})$$

et donc d'après (6.11) $x \notin \Lambda$ ; ceci est en contradiction avec l'hypothèse : $\tilde{x} \in M$ faite en (6.13) donc (6.12) est vrai.

Si la condition (6.7) est vraie l'hyperplan de normale $\bar{z}$ en $\bar{x}$ est un hyperplan séparant pour les ensembles $M$ et $\mathcal{C}(\bar{x})$, disjoint de $\mathcal{C}(\bar{x})$ donc on a :

$$\mathcal{C}(\bar{x}) \cap M = \emptyset$$

donc aussi (6.9). ✦

## 7. APPLICATION A UN SYSTEME DE COMMANDE LINEAIRE, A CIBLE POLYHEDRALE

Considérons le système défini en section 4.1 et la cible définie à l'instant final $t_1$ par :

$$\Lambda \triangleq \{ x : \lambda_k^T x \leqslant a_k, k = 1, ..., p \}$$

où $\lambda_k, k = 1, ..., p$ sont $p$ vecteurs de norme unité donnés dans $E^n$ et $a_k$, $p$ scalaires.

**Théorème 7.1** : $\bar{u}$ est une commande d'accessibilité forte pour $\Lambda$ si et seulement si les $m$ systèmes d'équations suivants définis pour $k = 1, ..., p$ :

$$\dot{y}^k(t) = A(t)y^k(t) + D(t)v^k(t)$$

$$\dot{\eta}_k(t) = -\eta_k(t)A(t)$$

avec les conditions aux bornes :

$$y^k(t_0) = 0$$

$$\eta_k(t_1) = \lambda_k$$

et vérifiant la condition :

$$\eta_k(t)D(t)v^k(t) = \underset{v(t)\in\Xi}{\mathrm{Max}}\ \eta_k(t)D(t)v(t)$$

presque partout sur $[t_0, t_1]$, ont une solution telle que :

$$\lambda_k^T(h(\bar{u}) + y^k(t_1)) \leqslant a_k, k = 1, ..., p$$

*Démonstration* : Il suffit d'appliquer le corollaire 6.1 et de remarquer que la perturbation $v^k(.)$ qui fait atteindre la borne supérieure de $\lambda_k^T x$ pour $x$ dans $\{ h(\bar{u}) \} + g(V)$ est une commande extrémale pour le système :

$$\dot{y} = A(t)y + D(t)v.$$

nous pouvons alors appliquer directement le théorème 6.1 pour généraliser les théorèmes 4.1 et 4.2.

## 8. CONCLUSION

Les systèmes perturbés que nous avons étudiés peuvent être réduits à des systèmes non perturbés en considérant les fonctionnelles auxiliaires :

$$\theta_j : U \to R \cup \{ \infty \} \triangleq \bar{R}$$

$$\theta_j(u) = \operatorname{Sup} \{ Q_j(u, v) : v \in V \} \qquad j = 1, \dots, s$$

et l'ensemble de contrainte sur $U$, auxiliaire :

$$W \triangleq \{ u \in U : \varphi(u, V) \subset \Lambda \}$$

Dès lors les systèmes perturbés définis en sections 2.1 et 5.1 se ramènent au système non perturbé :

$$u \in W, \theta_j : W \to \bar{R} \qquad j = 1, \dots, s$$

Cependant ce travail de réduction peut-être considérable et conduire à des fonctionnelles $\theta_j$ difficiles à analyser. Les théorèmes établis précédemment permettent d'engendrer une classe de décisions ou commandes optimales à partir seulement de considérations relatives aux données du problème, c'est-à-dire des fonctionnelles $Q_j$, des perturbations $v \in V$ et de la cible $\Lambda$. Sans contenir nécessairement l'ensemble de toutes les solutions du problème d'optimisation multicritère, cette classe de solution peut être assez riche pour fournir une solution acceptable.

Evidemment il serait souhaitable de compléter ces conditions suffisantes par des conditions nécessaires de même nature qui permettraient de généraliser aux systèmes multicritères perturbés les principes du processus de scalarisation des critères vectoriels utilisé en l'absence de perturbation. Cette généralisation n'est cependant pas évidente. Une tentative dans ce sens est indiquée dans les références [18] et [19].

Un autre développement souhaitable serait de développer une théorie de l'optimisation multicritère de systèmes perturbés avec commande en boucle fermée.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A. W. Starr et Y. C. Ho, *Nonzero-Sum Differential Games*, JOTA, 1969, 3, 184-206.

[2] A. W. Starr et Y. C. Ho, *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games*, JOTA, 1969, 3, 207-219.

[3] T. L. Vincent et G. Leitmann, *Control Space Properties of cooperative games*, JOTA, 1970, 4, 91-113.