REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

A. AUSLENDER

Brève communication. Résolution numérique d'inégalités variationnelles

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R2 (1973), p. 67-72

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_67_0>

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 67-72)

Brèves communications

RESOLUTION NUMERIQUE D'INEGALITES VARIATIONNELLES

par A. AUSLENDER

Résumé. — *On propose ici deux méthodes de résolution d'inégalités variationnelles avec opérateurs monotones : la première généralise les méthodes de sous-gradients en analyse convexe, la seconde est de type accumulation.*

— Soit X un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(.,\ .)$, C un convexe fermé de X, A une multi-application de X dans X, bornée sur C et telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait pour tout u, $v \in C$, tout $c \in A(u)$, tout $d \in A(v)$:

$$(c - d, u - v) \geqslant \alpha \left\|u - v\right\|^2 \tag{1}$$

Soit M l'ensemble des points $u^* \in C$ tels qu'il existe $c^* \in A(u^*)$ vérifiant :

$$(c^*, u - u^*) \geqslant 0 \qquad \forall\, u \in C \tag{2}$$

La condition (1) entraîne que M, s'il n'est pas vide, est réduit à un point u^*.

Nous supposerons désormais que M n'est pas vide (pour des conditions suffisantes assurant cette hypothèse, on pourra se reporter à Browder [3], [4]) et nous nous proposons de donner deux méthodes permettant de calculer u^*.

1) Méthodes à petits pas

— On remarquera que l'inégalité variationnelle (2) recouvre en particulier les problèmes d'analyses convexe non différentiable. Ainsi :

a) si $A = \partial f(x)$, $f \in \Gamma_0(X)$ continue à valeurs réelles alors M est formé des points qui minimisent f sur C ;

b) si $X = X_1 \times X_2$, $C = C_1 \times C_2$, $A = \partial f(x_1, x_2)$ où f est une fonction concave convexe continue à valeurs réelles alors M est formé des cols de f par rapport à $C_1 \times C_2$.

(1) Département de Mathématiques Appliquées, Université de Clermont-Ferrand.

— Pour calculer u^* on propose la méthode suivante : soit ρ_n une suite de réels > 0. A partir d'un point arbitraire $u_1 \in C$ on construit de façon récurrente une suite $\{ u_n \}$ par la relation :

$$u_{n+1} = P_C\left(u_n - \rho_n \frac{c_n}{\|c_n\|} \right), \; c_n \in A(u_n) \tag{3}$$

c_n est un élément quelconque de $A(u_n)$ (si $c_n = 0$, alors $u_n = u^*$ et l'algorithme s'arrête) ; de plus $P_C(u)$ indique la projection de u sur C. On peut faire certaines remarques sur cet algorithme.

a) En analyse convexe non différentiable, dans le cas des exemples cités ci-dessus, lorsque ρ_n est une série divergente de type $\frac{1}{n}$ on obtient des méthodes de sous-gradients (cf. Polyack [6], Auslender [1]) classiques.

b) Lorsque A est un opérateur monotone ne relevant pas de ces exemples, alors à notre connaissance il n'existe qu'un algorithme de ce type (cf. Sibony Brezis [2]) dont la convergence n'est assurée que si A est univoque ; le choix de ρ_n est alors : $\rho_n = \rho \, \|c_n\|$. On montre alors qu'il existe ρ_0 tel que si $\rho \in]0, \rho_0[$ l'algorithme converge. Malheureusement, on n'a aucune idée de ce ρ_0. Le choix suivant de ρ_n permet, entre autres, de pallier à ce manque.

Théorème : Soit ρ_n une suite de réels vérifiant :

$$\rho_n > 0, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 < +\infty, \; \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = +\infty \tag{4}$$

alors la suite $\{ u_n \}$ construite à partir des relations (3) et (4) converge fortement vers u^*.

Démonstration :

a) Montrons d'abord qu'il existe une sous-suite de $\{ u_n \}$ convergeant vers la solution u^*. D'après les propriétés de projection, on a :

$$\|u_{n+1} - u^*\|^2 \leqslant \|u_n - u^*\|^2 - 2\rho_n\left(\frac{c_n}{\|c_n\|}, u_n - u^* \right) + \rho_n^2 \tag{A}$$

et à cause de (2) on a alors :

$$\|u_{n+1} - u^*\|^2 \leqslant \|u_n - u^*\|^2 - \frac{2\rho_n}{\|c_n\|} (c_n - c^*, u_n - u^*) + \rho_n^2$$

et donc à cause de la forte monotonie de A sur C :

$$\|u_{n+1} - u^*\|^2 \leqslant \|u_n - u^*\|^2 - \frac{2\rho_n}{\|c_n\|} \alpha \|u_n - u^*\|^2 + \rho_n^2 \tag{B}$$

Posons $b_n = \|u_n - u^*\|^2$, $d_n = \alpha \dfrac{b_n}{\|c_n\|}$

On a alors :

$$b_{n+1} - b_n \leqslant \rho_n^2 - 2\rho_n d_n \tag{C}$$

Et en sommant :

$$b_{n+1} \leqslant b_1 + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} \rho_j d_j \tag{D}$$

Puisque $b_{n+1} \geqslant 0$ cela entraîne :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j d_j < +\infty \tag{E}$$

La relation (D) entraîne alors que la suite $\{ u_n \}$ est bornée ; comme A est bornée sur C il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\frac{1}{\|c_n\|} > K \qquad \forall n \tag{F}$$

La relation (E) entraîne alors que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j b_j < +\infty \tag{G}$$

Il existe donc une sous-suite $\{ b_{j_n} \}$ convergeant vers 0. En effet dans le cas contraire, il existerait $\varepsilon > 0, j_0$ tel que :

$$j \geqslant j_0 \Rightarrow b_j \geqslant \varepsilon \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j < +\infty$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un indice k_0 tel que :

$$b_{k_0} \leqslant \varepsilon, \sum_{j=k_0}^{\infty} \rho_j^2 \leqslant \varepsilon$$

l'inégalité (C) entraîne alors :

$$0 \leqslant b_{k_0+m} \leqslant b_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{\infty} \rho_j^2 \leqslant 2\varepsilon \qquad \forall m > 0$$

et, par conséquent, la suite $\{ b_j \}$ converge vers 0.

2) Méthodes d'accumulation

On suppose maintenant que $X = \mathbf{R}^n$, C est compact et que A est univoque et hemicontinu sur C.

La méthode proposée est alors une généralisation de la méthode de Zuhovickii, Polyack, Primak [7] établie pour la résolution des jeux à n personnes.

L'algorithme consiste à construire à partir d'un point $x_1 \in C$ arbitraire une suite $\{ x_n \}$ de la façon suivante :

$$x_1, x_2 \dots, x_n \to x_{n+1} \qquad \text{par la relation :}$$

$$x_{n+1} \in C, \mu_n = \varphi_n(x_{n+1}) = \max (\varphi_n(x) | x \in C) \tag{5}$$

avec :

$$\varphi_n(x) = \min_{i=1\dots n} (A(x_i), x_i - x) \tag{6}$$

S'il existe $j \in [1 \dots n]$ tel que $x_{n+1} = x_j$ l'algorithme s'arrête.

Théorème : Si l'algorithme s'arrête à l'étape n alors il existe $i \in [1 \dots n]$ tel que $x_i = u^*$ sinon il existe une sous-suite $\{ x_{i_n} \}$ convergeant vers u^*.

Démonstration :

1) D'après un résultat classique de la théorie des inégalités variationnelles avec opérateurs monotones on a l'équivalence :

$$u^* \in M \Leftrightarrow u^* \in C, \qquad (A(v), v - u^*) \geqslant 0 \qquad \forall v \in C.$$

Par conséquent si l'on pose $\varphi(u) = \inf ((A(v), v - u) \mid v \in C)$ comme on a :

$$\varphi(u^*) = 0, \qquad \varphi(u) < 0 \qquad \text{si} \qquad u \neq u^*, \qquad u \in C$$

on a alors l'équivalence :

$$u^* \in M \Leftrightarrow u^* \in C, \qquad \varphi(u^*) = \max (\varphi(u) \mid u \in C) \tag{a}$$

2) On a pour $i \in [1, 2 \dots n]$ grâce aux inégalités (1) et (2) :

$$\alpha \|x_i - u^*\|^2 \leqslant (A(x_i) - A(u^*), x_i - u^*) \leqslant (A(x_i), x_i - u^*)$$

Soit alors x_{i_n} défini par :

$$\|x_{i_n} - u^*\| = \inf_{i=1\dots n} \|x_i - u^*\|$$

On a alors la relation :

$$\alpha \|x_{i_n} - u^*\|^2 \leqslant \inf_{i=1\dots n} (A(x_i), x_i - u^*) \leqslant \mu_n \tag{b}$$

3) De part les définitions on a les relations vraies pour tout x :

$$\varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \dots \geqslant \varphi(x)$$

De sorte que :

$$\mu_n \geqslant \mu_{n+1} \geqslant \dots \geqslant 0 \tag{c}$$

S'il existe $j \in [1 \dots n]$ tel que $x_{n+1} = x_j$ on a alors par la définition de $\varphi_n(x_{n+1})$:

$$\mu_n \leqslant 0$$

et la relation (b) montre qu'il existe alors un indice $i_n \in [1 \dots n]$ tel que $x_{i_n} = u^*$.

4) D'après la relation (c) il existe $\mu \geqslant 0$ tel que $\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \mu_n$. Soit x un point limite d'une sous-suite $\{ x_{n+1} \}_{n \in S}$. Puisque C est un compact un tel point existe toujours et appartient à C. Comme :

$$\mu_n \leqslant (A(x_m), x_m - x_{n+1}) \qquad \forall\, n, m - 1 \in S \qquad m \leqslant n$$

On voit puisque A est borné et que $\mu_n \geqslant 0$ que :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in S}} \mu_n = 0$$

mais alors on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = 0$$

et la relation (b) permet d'achever la démonstration du théorème.

REMARQUE 1 : Le calcul de x_{n+1} est un problème de programmation convexe, et même lorsque C est un polyèdre convexe un problème de programmation linéaire de sorte que la méthode précédente consiste à résoudre une suite de problèmes d'optimisation convexe.

REMARQUE 2 : La relation (a) permet d'appliquer les méthodes de type inf sup de Lemaire [5]. Ainsi pour la plus simple il suffit alors de modifier l'algorithme en remplaçant dans (5) x_{n+1} par $\bar{x}_n$ et on obtient x_{n+1} à partir de $\bar{x}_n$ par la relation :

$$x_{n+1} \in C, (A(x_{n+1}), x_{n+1} - \bar{x}_n) = \inf \left((A(x), x - \bar{x}_n) \middle| x \in C \right)$$

Les conditions de convergence données dans [5] sont remplies mais le calcul précédent en général n'est pas faisable. Signalons néanmoins un cas où l'on peut l'appliquer avec succès c'est celui des inégalités variationnelles avec opérateurs linéaires non symétrique et coercifs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AUSLENDER, *Recherche des points de selle d'une fonction.* Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle, Institut de Statistiques de l'Université Libre de Bruxelles, vol. 12, n° 2, 1970.

[2] BREZIS SIBONY, *Méthodes d'approximation et d'itérations pour les opérateurs monotones*, Archive, Rat, Mecha Analysis, 1968, 28, 59-82.

[3] BROWDER, *Non linear maximal monotone operators in Banach space*, Maths Annalen, 113, 1968, 175-180.

[4] BROWDER and HESS, *Non linear mappings of monotone type in Banach spaces*, Journal of functionnal Analysis, 11, 1972, 251-194.

[5] B. LEMAIRE, *Problèmes de minimax et application au contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires*, Thèse d'État, Paris (septembre 1970).

[6] B. T. POLYACK, *A general method for solving extremum problems*, Soviet Mathematics, vol. n° 3.

[7] S. I. ZUHOVICKII, B. T. POLYACK et M. E. PRIMAK, *Two methods of search for equilibrium points of n-person concave games*, Soviet Math Dokl, vol. 10, 1969, n° 2.