Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

A. Auslender

Brève communication. Une méthode de résolution des problèmes de col

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R1 (1973), p. 53-56

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_53_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 53-56)

Brèves communications

UNE METHODE DE RESOLUTION DES PROBLEMES DE COL

par A. Auslender [1]

Résumé. — *On donne une méthode de résolution de problèmes de col, qui consiste à résoudre successivement des jeux de stratégie, à l'aide de la méthode de Brown et Robinson, et des programmes convexes.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels réels de dimension finie, C [resp D] un sous ensemble convexe fermé de X [resp Y], f une fonction numérique définie sur $X \times Y$ continue sur $C \times D$, tel que pour tout $y \in D$ l'application $x \to f(x, y)$ soit convexe et tel que pour tout $x \in C$ l'application $y \to f(x, y)$ soit concave sur D. On fait l'hypothèse H :

H : *a*) Soit C est borné, soit on a :

H_1 : Pour tout borné $B_1 \in D$ on a :

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \inf (f(x, y) \mid y \in B_1) = + \infty.$$

b) Soit D est borné, soit on a :

H_2 : Pour tout borné $B_2 \in C$ on a :

$$\lim_{\|y\| \to +\infty} \sup (f(x, y) \mid x \in B_2) = - \infty.$$

On se propose de résoudre le problème P qui consiste à trouver un point (x^*, y^*) tel que :

$$(x^*, y^*) \in C \times D \quad , \quad f(x^*, y) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \qquad \forall\ (x, y) \in C \times D$$

c'est-à-dire, un col de f par rapport à $C \times D$. Pour cela on propose l'algorithme suivant :

(1) Département de Mathématiques Appliquées, Université de Clermont-Ferrand.

Méthode :

A partir d'un point $(x_1, y_1) \in C \times D$ on construit des suites

$\{(x_j, y_j)\}$ $j = 1 \dots r$ dans $C \times D$, $\{(\lambda_j^r, \eta_j^r)\}$ dans $\mathbf{R}^2$ $j = 1, 2, \dots r$, $r = 1, 2 \dots$, $\{(x_r^*, y_r^*)\}$ dans $C \times D$ de la façon suivante :

1) (x_j, y_j), $j = 1, \dots, r \to (\lambda_j^r, n_j^r)$ de la façon suivante :

On pose $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $H = (\eta_1 \dots \eta_r)$,

$$\varphi_r(\Lambda, H) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j n_i f(x_j, y_i)$$

$$C_r = D_r = \left\{ \Lambda \in \mathbf{R}^r : \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1 \quad , \quad \lambda_j \geqslant 0 \right\}$$

alors le vecteur (Λ_r, H_r) vérifie la relation :

$$(\Lambda_r, H_r) \in C_r \times D_r \,,\ \varphi_r(\Lambda_r, H) \leqslant \varphi_r(\Lambda_r, H_r) \leqslant \varphi_r(\Lambda, H_r)\ \forall\, (\Lambda, H) \in C_r \times D_r \tag{1}$$

2) (Λ_r, H_r), (x_j, y_j) $j = 1 \dots r \to (x_r^*, y_r^*)$ par la relation :

$$x_r^* = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^r x_j \quad , \quad y_r^* = \sum_{j=1}^{r} n_j^{r*} y_j. \tag{2}$$

3) $(x_r^*, y_r^*) \to x_{r+1}, y_{r+1}$ par les relations :

$$x_{r+1} \in C, \qquad f(x_{r+1}, y_r^*) \leqslant f(x, y_r^*) \qquad \forall\, x \in C \tag{3}$$

$$y_{r+1} \in D, \qquad f(x_r^*, y_{r+1}) \geqslant f(x_r^*, y) \qquad \forall\, y \in D. \tag{4}$$

S'il existe des indices j_1 et $j_2 \in [1, 2, \dots]$ tel que :

$$x_{r+1} = x_{j_1} \quad , \quad y_{r+1} = y_{j_2}. \tag{5}$$

Alors (x_r^*, y_r^*) est solution de P et l'algorithme s'arrête sinon on retourne en (1).

Théorème :

Si la relation (5) est vérifiée alors (x_r^*, y_r^*) est solution de P.

Sinon toute valeur d'adhérence de la suite $\{(x_r^*, y_r^*)\}$ et il en existe au moins une est solution de P.

Démonstration :

La relation 1 implique en particulier que pour tout $i, j \leqslant r$ on a :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^r f(x_i, y_j) \leqslant \sum_{j=1}^{r} f(x_i, y_j) n_j^r.$$

Comme f est convexe concave les relations (2) entraînent alors avec l'inégalité précédente :

$$f(x_r^*, y_j) \leqslant f(x_i, y_r^*) \qquad \forall i, j \leqslant r. \tag{A}$$

a) Supposons que (5) soit vérifiée, alors (A) entraîne que :

$$f(x_r^*, y_{r+1}) \leqslant f(x_{r+1}, y_r^*). \tag{B}$$

Et par conséquent, si l'on pose dans les inégalités (3) et (4) : $x = x_r^*$, $y = y_r^*$ on obtient alors avec (B) :

$$f(x_r^*, y_r^*) = f(x_{r+1}, y_r^*) = f(x_r^*, y_{r+1}).$$

En remplaçant dans (3) et (4) $f(x_{r+1}, y_r^*)$ et $f(x_r^*, y_{r+1})$ par $f(x_r^*, y_r^*)$ on voit alors que (x_r^*, y_r^*) est solution du problème P.

b) Montrons que les suites $\{ x_r^* \}, \{ y_r^* \}, \{ y_r \}, \{ x_r \}$ sont bornées.

Considérons uniquement le cas où l'on fait seulement les hypothèses H_1 et H_2 (pour les autres cas, le raisonnement est semblable).

Soit alors la fonction F_{x_1, y_1} définie par :

$$F_{x_1, y_1}(x, y) = f(x, y_1) - f(x_1, y).$$

Cette fonction vérifie à cause des hypothèses H_1 et H_2 :

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ \|y\| \to +\infty}} F_{x_1, y_1}(x, y) = +\infty.$$

La relation A entraîne alors que $F_{x_1, y_1}(x_r^*, y_r^*) \leqslant 0$.

Et par conséquent la suite $\{ x_r^*, y_r^* \}$ est bornée. Pour tout $(x, y) \in C \times D$, il existe alors des constantes K_1 et K_2 tel que :

$$f(x, y_r^*) \leqslant K_1 \quad , \quad f(x_r^*, y) \geqslant K_2.$$

Et par conséquent la relation (3) [resp (4)] entraîne si l'on prend la suite $\{ y_r^* \}$ comme borné B_1 [resp la suite $\{ x_r^* \}$ comme borné B_2] que la suite $\{ x_r \}$ [resp $\{ y_r \}$] est bornée.

c) Soit alors (x^*, y^*) une valeur d'adhérence arbitraire de la suite $\{ x_r^*, y_r^* \}$. D'après ce qui vient d'être dit, un tel point existe, et on a bien évidemment

$(x^*, y^*) \in C \times D$. D'autre part, il existe un point $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C \times D$, tel que $(x^*, y^*, \tilde{x}, \tilde{y})$ soit une valeur d'adhérence de la suite $\{ x_r^*, y_r^*, x_{r+1}, y_{r+1} \}$ car la suite $\{ x_{r+1}, y_{r+1} \}$ est bornée ; f étant continue on obtient alors à partir des inégalités (3) et (4) par passage à la limite :

$$f(\tilde{x}, y^*) \leqslant f(x, y^*) \qquad \forall x \in C \tag{C}$$

$$f(x^*, \tilde{y}) \geqslant f(x^*, y) \qquad \forall y \in D. \tag{D}$$

On obtient aussi après avoir fixé i, j dans (A) par passage à la limite dans (A) :

$$f(x^*, y_j) \leqslant f(x_i, y^*) \qquad \forall i, j.$$

Et en passant à la limite sur i, j l'inégalité précédente devient :

$$f(x^*, \tilde{y}) \leqslant f(\tilde{x}, y^*). \tag{E}$$

En raisonnant comme dans (a), on voit alors à partir des relations (C), (D), (E) que (x^*, y^*) est solution de P.

REMARQUE

Ainsi donc, la méthode proposée s'obtient en calculant successivement la solution d'un jeu de stratégie (ceci peut se faire par la méthode très efficace de Brown et Robinson [1] [2] qui est à la théorie des jeux, ce qu'est la programmation linéaire aux méthodes d'optimisation), et la solution d'un programme convexe, ce que l'on sait aisément faire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWN G. W., *Iterative solutions of games by fictitious play.*
[2] ROBINSON J., *An iterative method of solving a game.* Ann Math 54 (1951), 296-301.