REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

JEAN HARDOUIN DUPARC

Deux résultats sur certaines formules particulières du type Runge-Kutta

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R2 (1971), p. 114-117

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_114_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-2, 1971, p. 114-117)

DEUX RESULTATS SUR CERTAINES FORMULES PARTICULIERES DU TYPE RUNGE-KUTTA

par Jean HARDOUIN DUPARC (1)

Résumé. — *L'auteur montre l'impossibilité d'un certain type de formule et exhibe une autre formule de Runge-Kutta pour résoudre des problèmes différentiels du second ordre lorsque les dérivées premières n'apparaissent pas dans l'équation.*

Ce texte est celui de la communication prononcée aux Journées Nationales d'Analyse Numérique de Bordeaux (septembre 1969) ; communication citée en référence dans l'article « Une formule de Runge Kutta » (*R.I.R.O.*, 4e année, no R-1, 1970, p. 3-8).

Je vais donner deux résultats, l'un négatif et l'autre positif, sur un certain type de formules de Runge-Kutta.

Il s'agit des formules destinées à résoudre un système d'équations différentielles du second ordre dans lequel les dérivées premières n'interviennent pas. Parmi ces formules ce sont celles du type proposé par M. Kuntzmann au congrès de Munich 1962 qui m'intéressent; c'est-à-dire celles où toute l'information disponible est utilisée pour le calcul de la dérivée première, à la fin du pas.

Soit à résoudre le problème de conditions initiales suivant :

$$\text{calculer } X(t_{i+1}) \text{ connaissant } X(t_i) \text{ et l'équation } X'' = F(X, t)$$

X étant un vecteur de fonctions de la variable t, X'' le vecteur des dérivées secondes; nous noterons X' le vecteur des dérivées premières.

Nous aurons les formules suivantes :
en posant :

$$h = t_{i+1} - t_i,\ X_{i,0} = X(t_i),\ X'_{i,0} = X'(t_i) \text{ et } X''_{i,0} = X''(t_i)$$

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bordeaux.

Pour $a := 1$ par pas de 1 jusqu'à $k - 1$ faire :

$$\begin{cases} X_{i,a} = X_{i,0} + h\theta_a X'_{i,0} + \frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=0}^{a-1} B_{a,\gamma}X''_{i,\gamma} \\ X''_{i,a} = F(X_{i,a}, t_i + h\theta_a) \end{cases}$$

Puis

$$X'_{i,k} = X'_{i,0} + h\sum_{\gamma=0}^{k-1} A_\gamma X'_{i,\gamma}$$

on prendra alors :

$$X(t_{i+1}) = X_{i,k-1} \text{ et } X'(t_{i+1}) = X'_{i,k}.$$

Pour $k = 2$ on a : $\theta_1 = 1$, $B_{1,0} = 1$, $A_0 = 1/2$, $A_1 = 1/2$; erreur en h^3.

Pour $k = 3$ on a : $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1$; $B_{1,0} = 1/4$, $B_{2,0} = 1/3$, $B_{2,1} = 2/3$,

$$A_0 = A_2 = 1/6,\ A_1 = 2/3; \text{ erreur en } h^5.$$

Ces deux formules ont été données par M. Kuntzmann [1] (2 pages 124-125).

Pour $k = 4$ on pourrait se proposer d'atteindre une erreur en h^6, il faudrait pour cela satisfaire les relations suivantes :

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_{3,1} \\ B_{3,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/10 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 1 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & 1 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$B_{3,\,2}B_{21}\theta_{1,} = 1/30 \tag{3}$$

$$A_3(B_{3,2}\theta_2 + B_{3,1}\theta_1) + A_2B_{2,1}\theta_1 = 1/12$$

ou bien : $A_3 + 3A_2B_{2,1}\theta_1 = 1/4.$ (4)

Une première relation de compatibilité issue du système (1) donne :

$$3 - 5(\theta_1 + \theta_2) + 10\,\theta_1\theta_2 = 0$$

puis en éliminant $B_{2,1}\theta_1$ entre (3) et (4) puis A_1 dans (2) et en reportant les valeurs de $B_{3,2}$ tirées de (1) et en éliminant A_2 on a :

$$A_3 = 1/8$$

si nous reportons cette valeur dans (2) nous obtenons une seconde relation de compatibilité :

$$3 - 5(\theta_1 + \theta_2) + 9\,\theta_1\theta_2 = 0$$

ce qui n'a pas de sens car il faudrait prendre l'un de ces paramètres nul.

Il n'existe donc pas de formule intéressante de ce type pour la valeur $k = 4$, tel est le résultat négatif.

Par contre pour $k = 5$ nous avons trouvé une solution permettant d'atteindre une erreur en h^7. Nous devons alors résoudre :

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 \\ \theta_1^4 & \theta_2^4 & \theta_3^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_{4,1} \\ B_{4,2} \\ B_{4,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/10 \\ 1/15 \end{vmatrix} \qquad (1')$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 1 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 & 1 \\ \theta_1^3 & \theta_2^3 & \theta_3^3 & 1 \\ \theta_1^4 & \theta_2^4 & \theta_3^4 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \end{vmatrix} \qquad (2')$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_1^2 & \theta_1^2 & \theta_2^2 \\ \theta_1 \times \theta_2 & \theta_1 \times \theta_3 & \theta_2 \times \theta_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_{4,2} \times B_{2,1} & A_2 \times B_{2,1} \\ B_{4,3} \times B_{3,1} & A_3 \times B_{3,1} \\ B_{4,3} \times B_{3,2} & A_3 \times B_{3,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/30 & 1/12 - A_4/3 \\ 1/90 & 1/30 - A_4/6 \\ 1/45 & 1/15 - A_4/3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Les valeurs suivantes satisfont à ces relations :

$$\theta_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{20}, \quad \theta_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad \theta_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad \theta_4 = 1 \quad ;$$

$$B_{1,0} = \frac{3-\sqrt{5}}{40},$$

$$B_{2,0} = \frac{3-\sqrt{5}}{30}, \quad B_{2,1} = \frac{3-\sqrt{5}}{15},$$

$$B_{3,0} = \frac{3+\sqrt{5}}{15}, \quad B_{3,1} = -\frac{4+2\sqrt{5}}{15}, \quad B_{3,2} = \frac{11+5\sqrt{5}}{30},$$

$$B_{4,0} = \frac{1}{6}, \quad B_{4,1} = 0, \quad B_{4,2} = \frac{5+\sqrt{5}}{12}, \quad B_{4,3} = \frac{5-\sqrt{5}}{12},$$

$$A_0 = \frac{1}{12}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{5}{12}, \quad A_3 = \frac{5}{12}, \quad A_4 = \frac{1}{12}.$$

Cette formule paraît intéressante; moins bonne mais plus économique que les formules de rang 5 d'Albrecht et de Laurent (2, page 123), d'ordre plus élevé que les formules de rang 4 de Nystrom et de Laurent (2 page, 120-121).

Tel est notre second résultat.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Kuntzmann, *Nouvelle méthode pour l'intégration approchée des équations différentielles*, Congrès de Munich, 1962.
2. F. Ceschino et J. Kuntzmann, *Problèmes différentiels de conditions initiales*, Dunod, Paris, 1963.